DS 3

CALCULATRICE **NON** AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).

Les différents exercices sont indépendants.

Les exercices ne sont pas ordonnés par difficultés croissantes :

l'ordre proposé est dicté par le gain de place et une meilleure lisibilité.

QUELQUES CONSIGNES :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
 - Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
 - Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et vous assurer que :
 - Vous n'avez pas affirmé, dès le début de votre raisonnement, que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier).
- Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ?
- Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.
 - Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ...) sont utilisés et utilisés à bon escient.
 - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute ou une question sur l'énoncé, n'hésitez pas à m'en faire part.

Exercice 1

Soit $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $a \in [0,1]$ tel que : $f(a) = a^2$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation $(z + i)^5 = (z - i)^5$ d'inconnue z complexe.

On note M le point d'affixe z , A le point d'affixe i et B celui d'affixe $-i$.

- 1) Montrer que si z est solution de (E) alors $M \in \text{med}[A, B]$. Qu'en déduit-on sur les solutions de (E) ?
- 2) Résoudre (E) en utilisant des racines n èmes et écrire les solutions de (E) de sorte que l'on voit qu'elles sont réelles .
- 3) Résoudre (E) d'une seconde manière en utilisant la formule du binôme de Newton.
- 4) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

PROBLEME

PARTIE 1. On définit la fonction tangente hyperbolique notée th par : $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, th(x)$ existe et $th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
- Justifier que th est impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.
- Déterminer
 - le signe de $th(x)$ en fonction de x
 - les variations de th
 - les limites de th en $\pm\infty$.
- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, |th(x)| \leq 1$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, th(x) < x$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*, |th(x)| < |x|$ et 0 est l'unique point fixe de th .
- Tracer la courbe représentative de th dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- Soit x un réel non nul fixé. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} th(2^{-k}x)$.
 - Montrer que $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$.
 - En déduire que $S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)}$.
 - Justifier que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{th(t)}{t} = 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.
- Justifier que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine J à déterminer.

La bijection réciproque de th est notée **Argth** et appelée **l'argument tangente hyperbolique**.

- Représenter la courbe de **Argth** sur le même dessin que la courbe de th .
- Montrer que $\forall x \in J, Argth(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.
- Justifier que **Argth** est dérivable sur J et donner une expression de sa dérivée.

PARTIE 2. On pose $f(x) = Arcsin(x) - 2Arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$

9. **Préliminaire** : compléter les formules suivantes : $\forall x \in \dots, Arcsin(x) + Arccos(x) = \dots$ et $Arccos(-x) = \dots$.

$$\forall x \in \dots, Arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \begin{cases} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{cases}$$

10. Déterminer le domaine de définition Df de f .

Nous allons dans la suite proposer différentes méthodes pour simplifier l'expression $f(x)$.

A. Par dérivation :

- Justifier que f est dérivable au moins sur $] -1, 1[$.
- Montrer que $\forall x \in] -1, 1[, f'(x) = 0$.
- En déduire $f(x)$ pour $x \in Df$.

B. Par changement de variable $x = \cos(\theta)$:

Soit $x \in Df$.

- Justifier qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi]$ tel que : $x = \cos(\theta)$. Exprimer θ en fonction de x .
- Montrer que si $x \neq -1$ et alors $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\tan^2(\frac{\theta}{2})}$.

16. Retrouver alors l'expression simplifiée de $f(x)$.

C. Par changement de variable $x = th(y)$:

17. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(2Arctan(e^y)) = -th(y)$.

18. Soit y un réel. En utilisant l'expression de **Argth**, déterminer un réel t , simple et dépendant de y , tel que : $\frac{1+th(y)}{1-th(y)} = e^t$.

19. Retrouver, grâce aux questions 17 et 18, l'expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in Df$.

D. A vous de jouer :

Les questions précédentes ont finalement permis de démontrer que : $\forall x \in [-1, 1[, Arcsin(x) = 2Arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) - \frac{\pi}{2}$.

Proposer et appliquer une autre méthode pour montrer cette égalité (sans dériver et sans changement de variable...). **FIN**

PROBLEME 2

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Soit $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}$ et $f_a: \left(z \mapsto \frac{z+a}{\bar{a}z+1}\right)$.

1. Déterminer D_{f_a} le domaine de définition de f_a .
2. On pose $a = re^{i\theta}$ $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les complexes z tels que $f_a(z) = z$ (on exprimera les solutions en fonction de θ).
3. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel $\beta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{1-a}{1-\bar{a}} = e^{i\beta}$. (on ne cherchera pas à calculer β).
b. Soit n un entier naturel fixé non nul. Déterminer les solutions de $f_a(z^n) = 1$ d'inconnue z complexe, en fonction de β et n .
4. **a.** Montrer que f_a est bijective de D_{f_a} sur un ensemble K , à déterminer et donner une expression de f_a^{-1} sa bijection réciproque. Déterminer un nombre complexe b tel que : $f_a^{-1} = f_b$.
b. Soit $z \in D_{f_a}$ et $y = f_a(z)$. Montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow y \in \mathbb{U}$.
c. En déduire que f_a est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.
5. On pose $a = -3i$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in f^{-1}(i\mathbb{R})$.