Corrigé du DS 3

Exercice 1

Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $a \in [0,1]$ tel que : $f(a) = a^2$.

Posons $g : \left(x \mapsto x^2 - f(x)\right)$.

g est continue sur $[0,1]$ car f et $(x \mapsto x^2)$ le sont.

$g(1) = 1 - f(1) > 0\ car\ f(1) \in [0,1]$.

$g(1) = 0 - f(0) < 0\ car\ f(0) \in [0,1]$.

Alors le TVI assure que g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ en un réel $a \in [0,1]$. Alors $g(a) = 0\ i.e.\ f(a) - a^2 = 0$. Ainsi $f(a) = a^2$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ d'inconnue z complexe .

On note M le point d' affixe z, A le point d'affixe i et B celui d'affixe $-i$.

1) Montrer que si z est solution de (E) alors $M \in med[A,B]$. Qu'en déduit-on sur les solutions de (E) ?
2) Résoudre (E) en utilisant des racines $nièmes$ et écrire les solutions de (E) de sorte que l'on voit qu'elles sont réelles .
3) Résoudre (E) d'une seconde manière en utilisant la formule du binôme de Newton.
4) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\ \ et\ \ \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

1) On suppose que z soit une solution de (E). Alors $|(z+i)^5| = |(z-i)^5|\ donc\ |z+i|^5 = |z-i|^5$. Comme la fonction réelle $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5 \end{pmatrix}$ est injective, nécessairement $|z+i| = |z-i|$ ce qui signifie que $BM = AM$. Par conséquent, M appartient à la médiatrice de $[A,B]$. Comme la médiatrice de [A,B] est l'axe réel, j'en déduis que toutes les solutions de (E) sont réelles.
2) i n'est pas solution de (E). Soit z un complexe distinct de i.

z est solution de $(E) \Leftrightarrow \frac{(z+i)^5}{(z-i)^5} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{z+i}{z-i}$ est une racine 5$^{\text{ième}}$ de l'unité$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] / \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{i2k\pi}{5}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] / (z+i) = (z-i)e^{\frac{i2k\pi}{5}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!]\ /\ z\left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right) \overset{(**)}{=} (-i)\left(e^{\frac{i2k\pi}{5}} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,4]\!]\ /\ z = \frac{(-i)\left(e^{\frac{i2k\pi}{5}}+1\right)}{\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right)}$

pour $k \in [\![0,4]\!]$, $\left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Et pour $k = 0$, $(**)$ n'est pas vérifiée.

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,4]\!]\ /\ z = \frac{(-i)\left(e^{\frac{i2k\pi}{5}}+1\right)}{\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right)} = \frac{(-i)\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)e^{\frac{ik\pi}{5}}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)e^{\frac{ik\pi}{5}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.

Ainsi, $sol(E) = \left\{cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right) / k \in [\![1,4]\!]\right\}$

3) Soit z un complexe. Posons $\mathbb{Z} = z^2$.

$z\ solutino\ de\ (E) \Leftrightarrow (z+i)^5 = (z-i)^5$

$\Leftrightarrow z^5 + 5iz^4 + 10z^3i^2 + 10z^2i^3 + 5zi^4 + i^5 = z^5 + 5(-i)z^4 + 10z^3(-i)^2 + 10z^2(-i)^3 + 5z(-i)^4 + (-i)^5$

$\Leftrightarrow 10iz^4 - 20z^2i + 2i = 0 \Leftrightarrow 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\mathbb{Z}^2 - 10\mathbb{Z} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{Z} = \frac{10+4\sqrt{5}}{10} = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $\mathbb{Z} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\Leftrightarrow z^2 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0$ ou $z^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$

$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$ ou $z = \pm\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Ainsi, $sol(E) = \left\{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}\right\}$

4) $Sol(E) = \left\{\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}\right\} = \left\{cotan\left(\frac{k\pi}{5}\right) / k \in [\![1,4]\!]\right\}$

Je sais que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \frac{4\pi}{5} < \pi$. Comme tan est strictement croissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante et négative sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Par conséquent, $\frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)} < \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} < 0 < \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} <$ $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ $i.e.$ $\text{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right) < \text{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) < 0 < \text{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.De plus, $-\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}} < 0 < \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

J' en déduis que $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$ et $\text{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$. Donc, $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}}$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{1}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ et de même $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

PROBLEME

PARTIE I. On définit la fonction tangente hyperbolique notée th par : $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, th(x)$ *existe et* $th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}, ch(x)$ *et* $sh(x)$ *existent et* $ch(x) \geq 1$ *donc* $th(x)$ *existe.*

$$th(x) = \frac{\frac{(e^x-e^{-x})}{2}}{\frac{(e^x+e^{-x})}{2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\substack{\text{en multipliant}\\ \text{numérateur et}\\ \text{dénominateur}\\ \text{par } e^x}}{\triangleq} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \overset{\substack{\text{en multipliant}\\ \text{numérateur et}\\ \text{dénominateur}\\ \text{par } e^{-2x}}}{\triangleq} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

2. Justifier que th est impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ *et* $th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$. th est donc impaire. De plus, th n'étant constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de de définition, th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = \frac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)} \overset{\substack{car\\ ch^2(x)-sh^2(x)=1}}{\triangleq} \frac{1}{ch^2(x)}$$ Et $th'(x) = \frac{ch^2(x)}{ch^2(x)} - \frac{sh^2(x)}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$.

3. Déterminer

a) le signe de th(x) en fonction de x

b) les variations de th

c) les limites de th en $\pm\infty$

a. $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) > 0$ *et* $sh(x)$ *est du signe de* x *. Donc,* $th(x)$ *est du signe de* x.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} > 0$. Donc th est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

c. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$. Comme th est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} th(x) = -1$.

4. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |th(x)| < 1$.

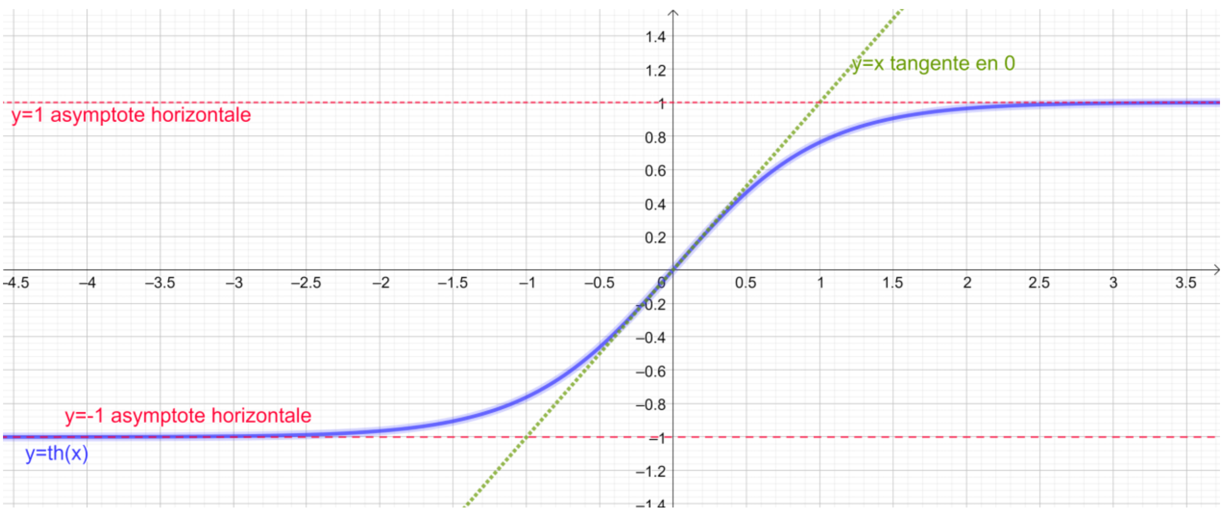
Il découle de ce qui précède que : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < th(x) < 1$ ce qui signifie $|th(x)| < 1$.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, th(x) < x$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*, |\,th(x)| < |x|$ et 0 est l'unique point fixe de th.

Etudions h: $(x \mapsto th(x) - x)$. h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 - th^2(x) - 1 = -th^2(x) < 0$. Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h(x) < 0$ i.e. $th(x) < x$. De plus, h est injective car strictement croissante donc h s'annule uniquement en 0 ; ainsi, 0 est l'unique point fixe de th.

Posons g: $(x \mapsto |\,th(x)| - |x|)$. g est paire et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \overset{\substack{car\ th(x)>0\\ et\ x>0}}{\triangleq} th(x) - x = h(x) < 0$. Alors comme g est paire, $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, g(x) < 0$. J'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) < 0$ et par suite, $|\,th(x)| < |x|$.

6. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de th, en précisant la tangente en 0, les asymptotes éventuelles et en illustrant le résultat de la question 5.



7. Soit x un réel non nul fixé. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} th(2^{-k}x)$.

a) Montrer que $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$.

b) En déduire que $S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)}$.

c) Justifier que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{th(t)}{t} = 1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$.

a) $\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)} = \frac{2ch(2x)}{sh(2x)} - \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{2ch(2x)sh(x) - ch(x)sh(2x)}{sh(2x)sh(x)} = \frac{2ch(2x)sh(x) - 2sh(x)ch^2(x)}{sh(2x)sh(x)} = \frac{2(1+2sh^2(x))sh(x) - 2sh(x)(1+sh^2(x))}{2ch(x)sh^2(x)} = \frac{2sh^3(x)}{2ch(x)sh^2(x)} = \frac{sh(x)}{ch(x)} = th(x)$

b) $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} th(2^{-k}x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\left[\frac{2}{th(2 \times 2^{-k}x)} - \frac{1}{th(2^{-k}x)}\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{2^{1-k}}{th(2^{1-k}x)} - \frac{2^{-k}}{th(2^{-k}x)}\right]$

$$S_n(x) \overset{u_k = \frac{2^{1-k}}{th(2^{1-k}x)}}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}[u_k - u_{k+1}]}_{somme\ télescopique} = u_0 - u_{n+1} = \frac{2^{1-0}}{th(2^{1-0}x)} - \frac{2^{1-(n+1)}}{th(2^{1-(n+1)}x)}$$

Ainsi, $S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)}$.

c) $\forall t \neq 0, \frac{th(t)}{t} = \frac{th(t) - th(0)}{t - 0}$ est le taux d'accroissement de th en 0 . Comme th est dérivable en 0 , $\lim\limits_{t \to 0} \frac{th(t)}{t} = th'(0) = 1$.

$S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{2^{-n}}{th(2^{-n}x)} = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{x}\frac{1}{\frac{th(2^{-n}x)}{2^{-n}x}}$. Or $\lim\limits_{t \to 0} \frac{th(t)}{t} = th'(0) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{-n}x = 0$. Donc, par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{th(2^{-n}x)}{2^{-n}x} = 1$. Ilen découle que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{x}$.

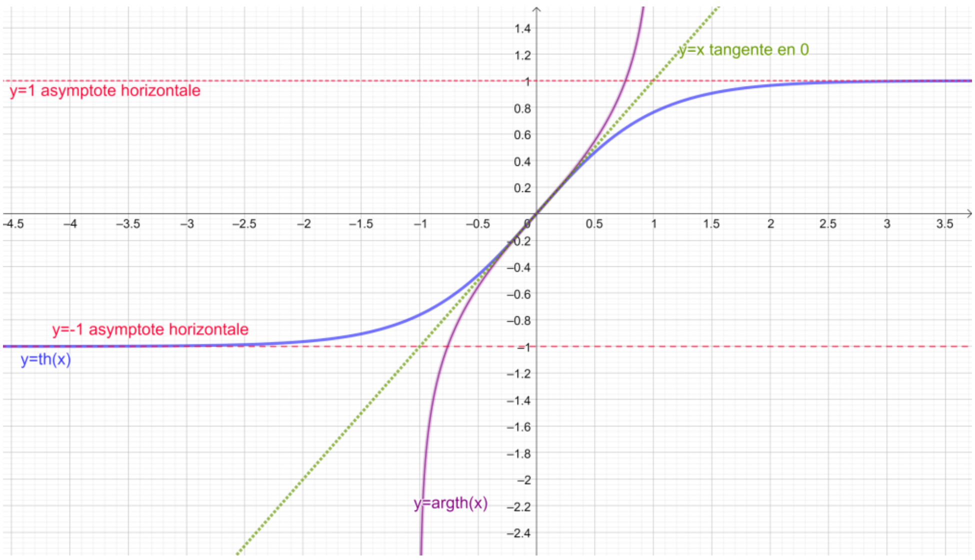
8. a) Justifier que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine J à déterminer . $\boldsymbol{Argth}$ est la bijection réciproque de th.

b) Représenter la courbe de $Argth$ sur le même dessin que la courbe de th.

c) Montrer que $\forall x \in]-1,1[, Argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

d) Justifier que $Argth$ est dérivable sur J et donner une expression de sa dérivée.

8a) th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc le TBSCM assure que $th(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} th(x), \lim\limits_{x \to +\infty} th(x)\right[=]-1,1[$ et th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.



c) Soit $y \in]-1,1[$. On note x l'unique antécédent de y par th i.e. $x = Argth(y)$.

Alors, $y = th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Donc $(e^{2x}+1)y = e^{2x} - 1$ et $e^{2x}(y-1) = -y-1$. Alors $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$. Donc $2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Ainsi, $Argth(y) = x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

d) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et th' ne s'annule pas . Donc le TDBR assure que $Argth$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall y \in]-1,1[$, $Argth'(y) = \frac{1}{th'(Argth(x))} = \frac{1}{1 - th^2(Argth(x))} = \frac{1}{1-x^2}$.

PARTIE 2. On pose $f(x) = Arcsin(x) - 2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

9. Compléter $\forall x \in \cdots, Arccos(x) + Arcsin(x) = \cdots \ldots.\ et\ Arccos(-x) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad et\ \forall x \in \cdots, Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \cdots$

10. Déterminer le domaine de définition de f.

$$f(x)\ existe \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ x \neq 1 \\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{tableau\ de\ signe} x \in [-1,1[.$$ Donc $Df = [-1,1[$.

A. Par dérivation :

11. Justifier que f est dérivable au moins sur $]-1,1[$.

12. Montrer que $\forall x \in]-1,1[, f'(x) = 0$.

13. En déduire $f(x)$ pour $x \in Df$.

10. Dans l'expression de f, deux fonctions, $Arcsin$ et racine carrée ($\sqrt{\ }$), ne sont pas dérivables partout sur leur propre domaine de définition. $Arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\sqrt{\ }$ n'est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or $\forall x \in]-1,1[, \frac{1+x}{1-x} \in \mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, f est dérivable au moins sur $]-1,1[$.

11. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $u(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2u'(x)}{1+u(x)^2}$ et $u'(x) = \frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$.

Donc, $\frac{2u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{2}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{2}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\frac{2}{1-x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Par conséquent, $f'(x) = 0$.

12. J'en déduis que f est constante sur l'intervalle $]-1,1[$. De plus, f est continue sur $[-1,1[$ donc en -1 (puisque son expression est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition). Par conséquent, f est constante sur $[-1,1[$.

Alors $\forall x \in [-1,1[, f(x) = f(0) = Arcsin(0) - 2\mathrm{Arccos}(1) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

B. Par changement de variable $x = \cos(\theta)$:

Soit $x \in Df$.

14. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in]0,\pi]$ tel que : $x = cos(\theta)$. Exprimer θ en fonction de x.

15. Soit $x \neq -1\ et\ \theta \in]0,\pi[$ tel que : $x = cos(\theta)$. Montrer que : $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

16. Retrouver alors l'expression simplifiée de $f(x)$.

13. cos est continue et strictement croissante sur $]0,\pi]$. Donc, le $TBSCM$ assure que $\cos(]0,\pi]) = [-1,1[$ et tout réel de $[-1,1[$ admet un unique antécédent par cos. Ainsi, il existe un unique $\theta \in]0,\pi]$ tel que : $x = cos(\theta)$. $\theta = Arccos(x)$ est alors l'unique réel recherché.

14. Soit $x \neq -1\ et\ \theta \in]0,\pi[$ tel que : $x = cos(\theta)$. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2} = \frac{1}{tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

14. Soit $x \neq -1\ et\ \theta = Arccos(x) \in]0,\pi[$. Alors, $\frac{\pi}{2} - \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ et\ \frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$$f(x) = Arcsin(\cos(\theta)) - 2Arctan\left(\sqrt{\frac{1}{tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\right) \underbrace{=}_{car\ \frac{1}{tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}>0} Arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) - 2Arctan\left(\frac{1}{tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$f(x) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \frac{\pi}{2}-\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\subset \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}} \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left[\frac{\pi}{2} - Arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right] \underbrace{=}_{car\ \frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[\subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

De plus, $f(-1) = Arcsin(-1) - 2Arctan(0) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x \in [-1,1[, f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

C. Par changement de variable $x = th(y)$:

17. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(2Arctan(e^y)) = -th(y)$.

18. Soit y un réel. En utilisant l'expression de $Argth$, déterminer un réel t, simple et dépendant de y, tel que : $\frac{1+th(y)}{1-th(y)} = e^t$.

19. Retrouver, grâce aux questions 17 et 18, l'expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in Df$.

16.Soit y un réel. $\cos(2Arctan(e^y)) = 2\cos^2(Arctan(e^y)) - 1 = 2\frac{1}{1+\tan^2(Arctan(e^y))} - 1 = \frac{2}{1+e^{2y}} - 1 = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} = -th(y)$.

17. Soit y un réel. $\frac{1+th(y)}{1-th(y)} = e^t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+th(y)}{1-th(y)}\right) = t \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ Argth(X)=x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right) \\ avce\ X=th(y)}} 2Argth(th(y)) = t \Leftrightarrow 2y = t$. Donc, $t = 2y$ convient.

18. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $y = Argth(x)$.

Donc $x = th(y)\ et\ f(x) = f(th(y)) = Arcsin(th(y)) - 2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+th(y)}{1-th(y)}}\right) = \frac{\pi}{2} - Arccos(th(y)) - 2Arctan(\sqrt{e^{2y}})$

$f(x) = \frac{\pi}{2} - Arccos(th(y)) - 2Arctan(e^y) = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - Arccos(-th(y))\right) - 2Arctan(e^y) = -\frac{\pi}{2} + Arccos(-th(y)) - 2Arctan(e^y)$.

Or, $\cos(2Arctan(e^y)) = -th(y)$. Donc, $Arccos[\cos(2Arctan(e^y))] = Arccos(-th(y))$. De plus, comme $e^y > 0, 2Arctan(e^y) \in [0,\pi[$. Et par suite, $2Arctan(e^y) = Arccos(-th(y))$. Ainsi, $f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

De plus, $f(-1) = Arcsin(-1) - 2Arctan(0) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall x \in [-1,1[, f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

D. A vous de jouer :

Les questions précédentes ont finalement permis de démontrer que : $\forall x \in [-1,1[, Arcsin(x) = 2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2}$.

20. Proposer et appliquer une autre méthode pour montrer cette égalité (sans dériver et sans changement de variable…).

Par composition :

Soit $x \in [-1,1[$.

D'une part , $\sin(Arcsin(x)) = x$.

D'autre part, $\sin\left(2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right) = -\left[2cos^2\left(Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right) - 1\right] = 1 - 2\left(\frac{1}{1+tan^2\left(Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right)}\right)$

$\sin\left(2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{1+\frac{1+x}{1-x}} = 1 - (1-x) = x$.

De plus, $Arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Et $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 0$ donc $Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \in [0,\pi[$ donc $2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2} \in$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Au bilan , $Arcsin(x)$ et $2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2}$ ont le même sinus sont dans un même intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. sur lequel sin est injective ; je peux conclure que $Arcsin(x) = 2Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \frac{\pi}{2}$.

FIN