Dérivée $n$ième de $f(x)=\frac{x^2+1}{1-5x}$.

$Df = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5}\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

1. Division euclidienne : je fais la division euclidienne de x^2+1 par $1-5x$.
   $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1=(1-5x)\left(-\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\right)+\frac{26}{25}$.
2. Réécriture de $f(x)$: $\forall x\in Df, f(x)=\frac{x^2+1}{1-5x}=\frac{(1-5x)\left(-\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\right)+\frac{26}{25}}{1-5x}=\underbrace{-\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}}_{P(x)}+\frac{26}{25}\underbrace{\left(\frac{1}{1-5x}\right)}_{Q(x)}$.
3. P et Q sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ $et\ \forall n\in\mathbb{N},\forall x\in Df, f^{(n)}(x)=P^{(n)}(x)+\frac{26}{25}Q^{(n)}(x)$.

Or, $P'(x)=-\frac{1}{5}$ et $\forall n\geq 2, P^{(n)}(x)+\frac{26}{25}$

Et, $Q(x)=u(1-5x)\ avec\ u(t)=\frac{1}{t}\ donc\ \ Q^{(n)}(x)=(-5)^n u^{(n)}(1-5x)\underbrace{=}_{\substack{le\ cours\\ assure\ que\\ u^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}}}\frac{(-5)^n(-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$.

$\forall x\in Df, f'(x)=-\frac{1}{5}+\frac{26}{25}\frac{5}{(1-5x)^2}$ et $\forall n\geq 2, f^{(n)}(x)=\frac{26}{25}\frac{(-5)^n(-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$

Dérivée $n$ième de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-3x}}$

$Df=]-\infty,\frac{5}{3}[$. Dans l'expression de f, seule la racine carrée n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x\in Df, 5-3x\in\mathbb{R}^{+*}$. Donc, f est de classe C^∞ sur Df.

$\forall x\in Df, f(x)=u(5-3x)\ avec\ u(t)=t^{-\frac{1}{2}}\ donc\ \forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}(x)=(-3)^n u^{(n)}(5-3x)$. Or,

$u(t)=t^{-\frac{1}{2}}\xrightarrow{dérive}u'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\xrightarrow{dérive}u''(t)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)t^{-\frac{5}{2}}\xrightarrow{dérive}u'''(t)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)t^{-\frac{7}{2}}\xrightarrow{dérive}u^{(4)}(t)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)t^{-\frac{9}{2}}$.

$u^{(n)}(t)\overset{(**)}{\triangleq}(-1)^n\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n}t^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}=(-1)^n\frac{1\times2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n-1)\times2n}{2^n2\times4\times..\times2n}t^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n2^n(1\times2\times..\times n)}t^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}=(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n n!}t^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}$.

Donc, $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in Df,\ f(x)\underbrace{=}_{car\ (**)}(-3)^n(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n n!}(5-3x)^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(5-3x)^n\sqrt{5-3x}}$.