Annexe chapitre 10 bis

Comparaison des suites

Comparer au sens (négligeable , dominée ou équivalent) deux suites , tout comme chercher la limite d'une suite, n'a de sens que pour $n \to +\infty$. On ne précise donc pas toujours que $n \to +\infty$.

1. Définitions

Définition Soit u et v deux suites réelles.
1. On dit que u est négligeable devant v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite ε telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times \varepsilon_n$.
On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$ ou $u_n \ll_{+\infty} v_n$
2. On dit que u est équivalente à v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite φ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$ et à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times \varphi_n$.
On note alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.
3. On dit que u est dominée par v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite b telle que : à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times b_n$ et b est bornée , c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n, |u_n| \leq M|v_n|$.
On note $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ ou $u = O(v)$

Exemple : $u_n = ln(n^2 - n + sin(n)) = 2ln(n)\left(1 + \frac{1}{2ln(n)} ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{sin(n)}{n^2}\right)\right) \sim_{+\infty} 2ln(n)$.

Caractérisation : si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :
1. $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
2. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. ***ATTENTION*** : $u_n \sim v_n \not\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
3. $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est bornée.*

Exemples :

1) Soit u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$. Montrer que : $u_n \sim_{+\infty} n!$

$\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$. Or $\forall k \in [\![0, n-2]\!], 0 \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$; donc, $0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$.Cet encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$. J'en conclus que $u_n \sim_{+\infty} n!$.

2) Soit u la suite définie par $\forall n, u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \, si\ n\ pair \\ -\frac{2}{n^2} \, si\ n\ impair \end{cases}$. Montrons que u_{n+1} et u_n ne sont pas équivalentes.

Posons $t_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{-2n}{(n+1)^2} \, si\ n\ pair \\ \frac{-n^2}{2(n+1)} \, si\ n\ impair \end{cases}$. Alors, $t_{2n} = \frac{-4n}{(2n+1)^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$ et $t_{2n+1} = \frac{-(2n+1)^2}{2(2n+2)} \sim_{+\infty} -n$. Donc,
$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n} = 0$,
Comme (t_{2n}) et (t_{2n+1}) ont des limites différentes, la suite (t_n) n'a pas de limite. Ainsi, les suites (u_{n+1}) et (u_n) ne sont pas équivalentes.
Par contre, $\forall n, u_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Et par conséquent, toute suite extraite de u tend aussi vers 0 . Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemples de référence et autres écritures.
1. $u_n = o(0) \Leftrightarrow u_n = O(0) \Leftrightarrow u_n \sim 0 \Leftrightarrow$ *à partir d'uncertain rang*, $u_n = 0$.
CELA N'ARRIVE QUASIMENT JAMAIS …. Donc ***vous ne devez jamais écrire à $u_n \sim 0$.***
2. $o(1)$ désigne une suite de limite nulle *et* $O(1)$ désigne une suite bornée .
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ et on dit que u et v sont équivalentes.
4. $o(u_n) = u_n o(1)$
5. $v_n \sim u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + o(u_n)$ Donc, $u_n + o(u_n) \sim u_n$

2. Comparaison de suites de référence

Prop : Soit u une suite réelle, strictement positive et telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$

Montrer que si $L\in]0,1[$ alors $u_n=O\left(\left(\frac{L+1}{2}\right)^n\right)$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

Montrer que si $L\in]1,+\infty[$ alors $\left(\frac{L+1}{2}\right)^n=O(u_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exercice : redémontrer la propriété précédente en remplaçant la condition $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$ par $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$.

Théorème: Pour tout $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ et tout $a\in]1,+\infty[$,

$$(\ln(n))^\beta \ll_{+\infty} (n^\alpha)) \ll_{+\infty} n^\alpha \ll_{+\infty} \underbrace{a^n}_{\substack{=e^{\ln(a)n}\\ =e^{\gamma n}\\ avec\ \gamma>0}} \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$$

❤️❤️❤️

3. Propriétés

Autre écriture d'une fonction négligeable : $o(u_n)=u_n o(1)$

Autre écriture d'un équivalent : $u_n\sim v_n \Leftrightarrow u_n=v_n+o(v_n)=v_n(1+o(1))$

Théorème : équivalent et limite /signe

1. Si $u_n\sim v_n$ alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe strict.
2. Si $u_n\sim v_n$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$ (L *finie ou infinie*) alors $\lim_{n\to+\infty}v_n=L$
3. Si $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$ tel que <u>L réel non nul</u> alors $u_n\sim L$.

Théorème DE COMPARAISON ET D'OPERATIONS
Remplacer , dans la version « fonction », f par u_n , g par v_n, h par w_n et a par $+\infty$ (sauf pour la composition à droite !!! car on ne compose pas les suites).
Soit u , v, w, A et B des suites.

1) $u_n\sim v_n$ ou $u_n=o(v_n)\Longrightarrow$ ....
2) $u_n=o(v_n)$ et $v_n=O(w_n)\Longrightarrow$ .... *En particulier,* $u_n=o(v_n)$ et ($v_n\sim w_n$ ou $v_n=o(w_n)$) $\Longrightarrow$ ....
3) $u_n=O(v_n)$ et $v_n=o(w_n)\Longrightarrow$ .... *En particulier,* ($u_n\sim v_n$ ou $u_n=o(v_n)$) et $v_n=o(w_n)\Longrightarrow$ ....
4) $u_n\sim v_n$ et $v_n\sim w_n$ $\Longrightarrow$ ....
5) $u_n\sim v_n$ et $A_n\sim B_n$ $\Longrightarrow$ ....
6) $u_n\sim v_n$ et $A_n\sim B_n$ *et à partir d'un certain rang,* $A_n\neq 0\Longrightarrow$ ....
7) $u_n\sim v_n$ *et à partir d'un certain rang,* $(u_n)^\alpha$existe $\Longrightarrow$ ....
8) Si $f(x)\sim_a g(x)$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=a$ alors $f(u_n)\sim_{+\infty}g(u_n)$.
9) Si f admet le $DL_p(0)$ suivant : $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots++a_px^p+o_{x\to0}(x^p)$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ alors $\forall n$ *assez grand*, $f(u_n)=a_0+a_1u_n+a_2{u_n}^2+\cdots++a_p{u_n}^p+o_{n\to+\infty}({u_n}^p)$. (c'est un développement asymptotique de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$).

Dans la recherche d'équivalent : Produit , quotient , puissance indépendante de n , composition à droite **sont autorisés**

Dans la recherche d'équivalent : il est **interdit** de sommer
$u_n\sim v_n \not\Rightarrow u_n+w_n\sim v_n+w_n$
ni de mettre à une puissance qui « bouge »
$u_n\sim v_n \not\Rightarrow {u_n}^{w_n}\sim {v_n}^{w_n}$

<u>Exemples</u> :

1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$; donc, $e^{\frac{\sin(n)}{n}}-1\sim\frac{\sin(n)}{n}$.
2) $\lim_{n\to+\infty}cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$. Donc, $\ln\left(cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1$. Et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; Donc, $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\sim-\frac{1}{2n^2}$. Ainsi, $\ln\left(cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim-\frac{1}{2n^2}$.

<u>Exercices</u> :

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$
2) Déterminons un équivalent simple de $u_n=tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)-1$.