Suites réelles et suites complexes

L'axe réel est orienté et gradué, la plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormé direct.

I. Des définitions de base

- Une suite réelle (resp. complexe) u est une relation qui associe un réel (resp. complexe) u_nà chaque entier naturel $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}\ fixé$. C'est donc une application de $A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Comme A est totalement discret, une suite ne peut pas être continue ou dérivable, n'a pas de limite en un réel mais pourra avoir une limite en $+\infty$.
  u est encore notée $(u_n)_{n \geq n_0}$. Parfois il est assez visuel de la noter $u = (u_0, u_1, u_2, \dots \dots \dots)$.
  On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(resp. \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'ensemble des suites réelles (resp. complexes)
- Une suite u est bien définie à partir de n_0 lorsque $\forall n \geq n_0, u_n$ existe.
- Une suite réelle est représentée sur l'axe réel par le « nuage » rectiligne formé des points d'abscisse u_n tels que $n \geq n_0$.
- Une suite complexe est représentée dans le plan complexe par les points de coordonnées $(Re(u_n), Im(u_n))$ tels que $n \geq n_0$.
- **Deux suites u et v sont égales lorsque : u et v sont définies à partir du même rang n_0 et $\forall n \geq n_0, u_n = v_n$.
- **A partir des suites u et v, on définit les suites : $\alpha u = (\alpha u_n)_{n \geq n_0}$ où α constante, $u + v = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}, et\ uv = (u_n v_n)_{n \geq n_0}$
- **La suite u complexe ou réelle est bornée lorsqu'il existe M réel $/\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$.
- La suite réelle u est majorée lorsque :$\exists m \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \leq m$. On dit que m est un majorant de u. m ne dépend pas de n.
- La suite réelle u est minorée lorsque :$\exists m' \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \geq m'$ On dit que m' est un minorant de u. m' ne dépend pas de n.
- La suite réelle est croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n < u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n+1}$.
- **La suite réelle u est constante lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$ ie. lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
- **u vérifie une propriété P à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1, u_n$ vérifie P.
- **La suite réelle u est stationnaire lorsque u est constante à partir d'un certain rang.

Indépendant de n

Exemple : Montrer que la suite u définie par : : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n + \frac{3n+6}{2n+2}$ est stationnaire.

Prop : Une suite réelle bornée est une suite majorée et minorée.
** Une suite est bornée (resp. minorée ou majorée) à partir d'un certain rang est bornée (resp. minorée ou majorée).
**Un produit fini et une combinaison linéaire de suites bornées est bornée.

Démo

II. Les définitions des limites finies ou infinies.

****Def :** La suite réelle (resp complexe) (u_n) tend vers le réel (resp. complexe) L quand $n \to +\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi proches que je le veux de L dès que n est suffisamment grand. Dans le cas d'une suite réelle , on peut remplacer $|u_n - L| \leq \varepsilon$ par $u_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$

Def : La suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A\ )$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi grands que je le souhaite à condition de prendre n suffisamment grand . Attention u n'est par forcément croissante.

Def : La suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq B\ )$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

****Def :** • Une suite convergente est une suite ayant une limite finie.
- Une suite divergente est une suite non convergente i.e. une suite de limite infinie ou sans limite .

NB : Trois cas possibles pour une suite réelle u : u a une limite finie ou bien u a une limite infinie ou bien u n'a pas de limite.
Deux cas possibles pour une suite complexe u : u a une limite finie ou bien u n'a pas de limite.

Application soit $a \in]1, +\infty[\ et\ b \in \mathbb{C}/\ |b| < 1$. Montrer grâce aux définitions que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty\ et\ \lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Exercices : 1) Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \geq N, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$

3) Montrons que : une suite de nombres entiers est convergente **sietssi** elle est stationnaire.

III. Application aux bornes sup/inf.

Rappel : Définition d'un maximum et d'un minimum d'une partie. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. m est appelé le **plus petit élément** ou **minimum** de A lorsque m minore A et m est élément de A . m' est appelé le **plus grand élément** ou **maximum** de A lorsque m' majore A et m' est élément de A . On note, le cas échéant, $m = \min(A)$ et $m' = \max(A)$.

Si A est un ensemble de réels minoré (resp. majoré) alors A n'a pas forcément de minimum (resp. de maximum). ex : $A =]1, +\infty[$ est minoré par -3 mais aucun minorant de A n'appartient à A . Donc A n'a pas de minimum. Par contre, on constate que parmi tous les minorants de A, l'un d'entre eux est plus près de A que les autres : il s'agit de 1. 1 est le plus grand minorant de A . 1 est appelé la borne inférieure de A .

Théorème(admis)-Définition :

1) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et majorée alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément appelé la borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.
2) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et minorée alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément appelé la borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.

Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors $\sup(A)$ est le plus petit réel qui majore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, on dira que $\sup(A) = +\infty$.
Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors $\inf(A)$ est le plus grand réel qui minore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée, on dira que $\inf(A) = -\infty$.

Prop : 1. Si A a un plus grand élément alors A a une borne supérieure finie et $\sup(A) = max\,(A)$.
2. Si A admet une borne supérieure finie et $\sup(A) \notin A$ alors A n' admet pas de maximum.
1. Si A a un plus petit élément alors A a une borne inférieure finie et $\inf(A) = min\,(A)$.
2. Si A admet une borne inférieure finie et $inf \notin A$ alors A n' admet pas de minimum.

↪**Démo**

Théorème de caractérisation de la borne supérieure avec des epsilon :

Soit M un réel et A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $M = supA$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A \,/\, M - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$

Soit m un réel et A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. $m = inf A$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A \,/\, m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$

↪**Démo**

<u>Théorème :</u> Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$..

Soit $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $M = \sup(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} M \text{ majore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } M. \end{cases}$

Soit $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. $m = \inf(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} m \text{ minore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } m. \end{cases}$

Exercices :

1) Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup(A)$ *et* $\inf(A)$. 1) idem avec $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{p+n} / (p,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.

2) Soit $A = \left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / (x,y) \in [0,1]^2\right\}$. Déterminer $\sup(A)$ *et* $\inf(A)$.

3) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée et λ un réel non nul. On définit $\lambda A = \{\lambda a / a \in A\}$. Justifier que A et λA admettent des bornes supérieures et inférieures finies et trouver une relation entre ces bornes.

IV. Les propriétés essentielles.

1. ****CARACTERE BORNEE :** Toute suite convergente est bornée.

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle de limite finie L.Soit $a \in \mathbb{R}$. si $a < L$ alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, u_n \geq a$. Si $a > L$ alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, u_n \leq a$. Par conséquent, toute suite réelle de limite strictement positive (resp. négative) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang .
Toute suite de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. minorée) ,mais est minorée (resp. majorée).

2. ****UNICITE DE LA LIMITE** : La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

3. ****LIMITE FINIE :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ où L <u>finie</u> ***sietssi*** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - L = 0$ ***sietssi*** $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$
sietssi il existe une suite réelle (ε_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $\forall n, |u_n - L| \leq \varepsilon_n$.

4. ****OPERATION SUR LES LIMITES** :

- Le produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée est une suite de limite nulle.
- Soit u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$. Alors,

- ✓ $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = |L|$.
- ✓ pour tout scalaire **λ** non nul , $\lim_{n\to+\infty}\lambda u_n = \lambda L$
- ✓ si $L + L'$ n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$.
- ✓ si LL' n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = LL'$.
- ✓ si L/L' n'est pas une FI et v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = L/L'$.
- ✓ si $L' = 0$ et $v_n > 0$ $(resp < 0)$ à partir d'un certain rang (v_n $réel$) alors $\lim_{n\to+\infty} 1/v_n = +\infty$ $(resp . -\infty)$

5. **COMPOSITION (admis) :** Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que à partir d'un certain rang, $f(u_n)$ $existe$.
- ✓ Si $\lim_{t\to L} f(t) = m$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = m$.
- ✓ Si $f(t) \sim_{t\to L} g(t)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$.
- ✓ Si $f(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k + o_0(t^p)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et alors$f(u_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (u_n)^k + (u_n)^p \underbrace{o_{+\infty}(1)}_{\text{une suite de limite nulle}}$.

6. **LIMITE D'UNE SUITE MONOTONE** : Toute suite réelle monotone a toujours une limite. Une suite réelle u croissante a une limite qui est $sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$, cette limite est finie si u est majorée et vaut $+\infty$ sinon. Une suite u décroissante a toujours une limite $inf\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ qui est finie si u minorée et vaut $-\infty$ sinon.
7. **LIMITE PAR ENCADREMENT (Théorème de gendarmes)** Toute suite réelle encadrée par deux suites de même limite finie tend aussi vers cette limite. Toute suite réelle inférieure à une suite de limite $+\infty$ tend vers $+\infty$. Toute suite réelle supérieure à une suite de limite $-\infty$ tend vers $-\infty$.
8. **PASSAGE A LA LIMITE DANS UNE INEGALITE** : Si deux suites (réelles) u et v ont chacune une limite notée respectivement L et L' et qu' à $partir\ d'un\ certain\ rang, u_n \le v_n$ alors $L \le L'$.

Démo

MISES EN GARDE :
1. il ne faut pas confondre les propriétés 7 et 8 . La propriété 7 permet de prouver (sous hypothèse) qu'une suite converge (et de déterminer cette limite). La propriété 8 permet de comparer des limites de suites dont on connait l'existence des limites.
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n| = |L|$. La réciproque est fausse sauf si $L = 0$. Par contre, $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n - L| = 0$.
3. $\forall n, {u_n}^{v_n} \overset{FI}{\triangleq} e^{v_n \ln(u_n)}$. Ces suites donnent les FI : $1^{+\infty}, 0^0, +\infty^0$ ... pour lever ces indéterminées, il faut d'abord étudier $h_n = v_n \ln(u_n)$.

NB : dès que vous savez que votre suite u une limite, donnez un nom à cette limite. Pour trouver sa valeur, il suffit souvent de passer à la limite dans la relation (implicite ou récurrente) vérifiée par u.

Exemples : 1) Soit u et v deux suites réelles telles que : $\forall n, 0 \le u_n \le a$ et $0 \le v_n \le b$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$. Montrer, par encadrement que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$.

2) Soient u et v deux suites réelles convergentes. On note $M_n = \max(u_n, v_n)$ et $m_n = \min(u_n, v_n)$. Justifier que : (M_n) et (m_n) sont convergentes et exprimer leur limite en fonction de celles de u et de v.

3)Soit u une suite définie par : $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n$. Montrer que u est monotone à partir d'un certain rang et qu'elle diverge.

4) Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$. Montrer par encadrement que : $u_n \sim_{+\infty} n!$.

5) Soit $a \in [0,1]$ et u la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$. Montrer que u tend vers 1 et $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

6) Théorème de Césaro (SAVOIR REFAIRE) : Soit u une suite réelle , L un réel et v la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

a. ** Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = L$. **Démo.**

b. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. **Démo.**

V. **Suites de nombres complexes ou suites complexes.

****Def :** La suite complexe (u_n) tend vers le nombre complexe L quand $n \to +\infty$ lorsque :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \ge n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \le \varepsilon)$.On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

NB : Une suite complexe n'a pas de limite infinie.

****Prop :** u_n tend vers le complexe L qd $n \to +\infty$ **sietssi** $\lim_{n\to+\infty} Re(u_n) = Re(L)$ et $\lim_{n\to+\infty} Im(u_n) = Im(L)$. **Démo.**

****Prop :** Toutes les définitions ou propriétés étoilées (**) sont valables pour des suites complexes. Toutes les propriétés nécessitant dla monotonie ou caractère majoré ou minorée d'une suite réelle ne sont pas valables pour les suites complexes.

****SAVOIR REFAIRE** Soit u une suite complexe, L un complexe et M un réel tel que $M \in [0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - L| \le M|u_n - L|$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$.

VI. Suites extraites

****Def :** (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) lorsqu' il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall n, v_n = u_{\varphi(n)}$

NB : Nécessairement $\varphi(n) \geq n$.
Exemples: les suites $(u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2})$ sont extraites de (u_n).

****Théo :** Si la suite (u_n) tend vers L alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers L.

Démo

****Théo:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \text{ si etssi } \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L$

Démo

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \text{ si etssi } \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = L$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+1} = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+2} = L$.

Exemples : 1) Montrer que si u est croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) Montrer que si $(u_{2n}), (u_{3n})$ et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.

VII. Suites adjacentes

Déf.: Deux suites réelles u et v sont adjacentes lorsque l'une est croissante , l'autre est décroissante et $u - v$ tend vers 0 .

Représentation :

Théorème : Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

Démo

Inégalités : Si u et v sont adjacentes de même limite L telle que u croissante et v décroissante alors :
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n - L \leq v_n - u_n$ et $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq L \leq \cdots v_{p+1} \leq v_p \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$.

Exemples

1. Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$ et $v_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor + 10^{-n}$.Montrer que u et v sont adjacentes de limite x .
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^\mu, u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$.
   a) Montrer que u et v sont adjacentes .
   b) Donner une valeur approchée de la limite commune à 10^{-1} près par défaut.
   c) Trouver un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. Soit $\forall n, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   a) Montrer par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. (on pourra montrer que$\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$)
   b) Montrer en utilisant les suites u et v qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   c) Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.
   d) Calculer la limite de $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)}$.

Théorème des segments emboîtés: Soit (I_n)une suite de segments telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$ et la longueur de I_n tend vers 0.
Alors il existe un unique point commun à tous les I_n.

Démo

VIII. Suites explicites

Def : Une suite u est dite explicite lorsqu'on connait le terme général u_n en fonction de n i.e. on connait une expression de u_n.

Exemples : $u_n = (-1)^n n!$ ou $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)$

Parmi ces suites, on trouve les suites de la forme $u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Prop : Soit L un réel ou un infini et u telle que : $\forall n, u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Si f est monotone alors u est monotone de même monotonie que f.
- Si f est bornée alors u est bornée.

NB : pour l'étude de ces suites $u_n = f(n)$, on pourra donc étudier f. Lorsque vous définissez f , indiquer clairement que sa variable est réelle en l'appelant x et non n , de façon à être autoriser à dériver f.

Exemple : Soit $A = \{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n / n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $supA$ et $infA$.

IX. Suites récurrentes

Def : Une suite u est dite récurrente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u vérifie une relation qui exprime u_{n+p} en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}$. Une telle suite est dite récurrente d'ordre p.
Dans ce cas, pour déterminer les valeurs de tous les termes u_n, il faut et il suffit de connaitre les valeurs de $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.

NB : Une suite est récurrente d'ordre p et entièrement définie par la relation de récurrence <u>et</u> les valeurs de ses p premiers termes

Ex : Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} - n^2 u_{n+1} + ln(n) u_n = \sqrt{n}$ et $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -1$. Calculons u_4 et u_5.
Déterminons une autre suite vérifiant la même relation de récurrence .

Parmi ces suites récurrentes, on retrouve les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, périodiques, récurrentes d'ordre 1 de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$… Cf ci-dessous !

X. Suites arithmétiques , géométriques – arithmético-géométriques (Rappel)

Def : (u_n) est une suite arithmétique lorsqu' il existe un réel ou complexe b tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{u_{n+1} = u_n + b}_{relation\ de\ récurrence}$. b est sa raison .

Prop : *Soit* (u_n) est une suite arithmétique de raison b . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{u_n = u_0 + nb}_{expression\ explicite}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} -\infty \ si\ b\ réel\ et\ b < 0 \\ u_0\ si\ b = 0 \\ +\infty\ si\ b\ réel\ et\ b > 0 \end{cases} \quad et\ \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} b$$

Def : (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe un réel ou complexe a tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n$. a est sa raison .

Prop : *Soit* (u_n) est une suite géométrique de raison a . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0\ si\ |a| < 1 \\ u_0\ si\ a = 1 \\ sgn(u_0)\infty\ si\ a\ réel\ et\ a > 1 et\ u_0 \neq 0 \\ n'existe\ pas\ si\ a\ réel\ et\ a \leq -1 \end{cases} \quad et\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u_0\ si\ a \neq 1 \\ (n+1)u_0 si\ a = 1 \end{cases}$$

Def : (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu' il existe deux réels ou cpxes a et b tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b$.

<u>**Méthode :**</u> On cherche alors LE réel L tel que : $L = aL + b$ (i.e. la suite constante qui vérifie la même relation de récurrence) puis on montre que la suite $(u_n - L)$ est géométrique de raison a. On peut alors écrire que : $u_n - L = a^n (u_0 - L)$.

XI. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théo (admis pour l'instant) :
On cherche toutes les $suites$ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ où a et b constantes.
Suite complexe : Soit a et b deux complexes fixés. Posons $(e.c)$: $r^2 + ar + c = 0$ $équation\ caractéristique$
Si $\Delta_{e.c} \neq 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes complexes.
Si $\Delta_{e.c} = 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a une solution complexe double r_0 alors $les\ suites$ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n) r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes complexes.

Suite réelle : Soit a et b deux réels fixés . Posons $(e.c)$: $r^2 + ar + c = 0$.
Si $\Delta_{e.c} > 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.
Si $\Delta_{e.c} = 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a une solution réelle double r_0 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n) r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.
Si $\Delta_{e.c} < 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α et β deux constantes réelles.

Rque : les constantes α et β se déterminent grâce aux valeurs des deux premiers termes de la suite : h_0 et h_1.

Def : (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants lorsqu' il existe deux réels a et b et une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = v_n$.

NB : Une telle suite est entièrement définie par la relation de récurrence et ses deux premiers termes .

Prop : *Soit* deux réels a et b et une suite v. On note E l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = v_n$. S'il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + a t_{n+1} + b t_n = v_n$ alors les suites éléments de E sont toutes les suites de la forme: $(t_n + h_n)$ où h est une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + a h_{n+1} + b h_n = 0$.

Démo

Méthode pour étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.

1. **Limite :** si $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $L' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et $L + aL + bL$ n'est pas une FI alors $L + aL + bL = L'$.
2. **Expression explicite de u :**
   a. Je cherche une suite t particulière vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$. Bien souvent t «ressemble» à v.
   b. J'applique le théorème précédent pour donner toutes les suites h vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$
   c. La suite u est alors de la forme : $u = h + t$. (Cf chapitre application linéaire § équations linéaires)

Exemples

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n .
2. Trouver toutes les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = e^n$ $+n$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall x > 0, f\big(f(x)\big) = 6x - f(x)$.

XII. Suites périodiques

Def : (u_n) est une suite périodique lorsqu' il existe un entier naturel p non nul tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$. p est une période de u.

NB : Une suite p −périodique est une suite de la forme $u = \big(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, \dots\big)$ i.e. $u = a_0u^{(0)} + a_1u^{(1)} + a_2u^{(2)} + .. + a_{p-1}u^{(p-1)}$ où $u^{(l)} = \big(u_n^{(l)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n^{(l)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv l[p] \\ 0 \text{ si } n \not\equiv l[p] \end{cases}$.

Ex : les suites 3-périodiques sont les suites de la forme $\forall n, u_n = \begin{cases} a \text{ si } n \equiv 0[3] \\ b \text{ si } n \equiv 1[3] \\ c \text{ si } n \equiv 2[3] \end{cases}$ i.e. de la forme :

$u = (a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, \dots \dots)$=$au^{(0)} + bu^{(1)} + bu^{(2)}$

où $\forall n$, $u_n^{(0)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0[3] \\ 0 \text{ si } n \equiv 1[3] \\ 0 \text{ si } n \equiv 2[3] \end{cases}, u_n^{(1)} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 0[3] \\ 1 \text{ si } n \equiv 1[3] \\ 0 \text{ si } n \equiv 2[3] \end{cases}, u_n^{(2)} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 0[3] \\ 0 \text{ si } n \equiv 1[3] \\ 1 \text{ si } n \equiv 2[3] \end{cases}$.

Propriétés : $Toute$ suite p −périodique prend au plus p valeurs distinctes, est bornée et ne tend jamais vers l'infini .
Une suite périodique est convergente sietssi elle est constante.

Démo

XIII. Suites récurrentes vérifiant une relation de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D . Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
On dit que u est une suite récurrente associée à f .
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ ie. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f \circ f$.

1) Définition de u : pour que u soit bien défini il faut et il suffit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$.

Prop : Si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$ et u est bien définie .

Désormais, $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ donc u est bien définie .
Conséquence : Si D est bornée ou f est bornée (resp. majorée, minorée) sur D alors **u est bornée** (resp. majorée, minorée).

2) Limites possibles de u :

Prop : Si $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $L' = \lim_{x\to L} f(x)$ alors $L = L'$.
En particulier , Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ réel et f est continue en L alors $L = f(L)$ i.e. L est un point fixe de f.

Démo

Conséquence : Si f est continue sur D et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$ alors les limites possibles de u sont les points fixes de f dans D et les bords de D qui n'appartiennent pas à D.

3) Monotonie de u :

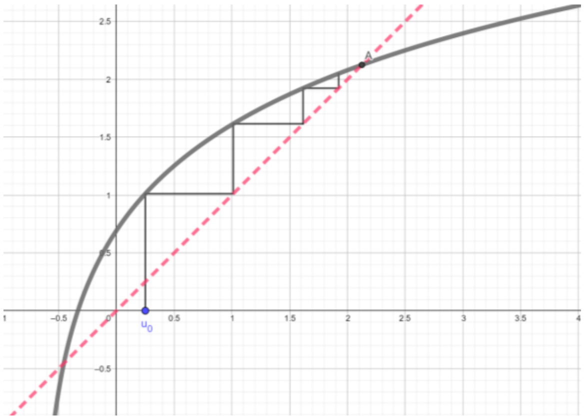
Prop : Si f est croissante alors u est monotone (croissante si $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$ et décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$ et lorsque u_0 n'est pas connu , on étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$ en fonction de x pour connaître le sens de monotonie suivant la valeur de u_0.

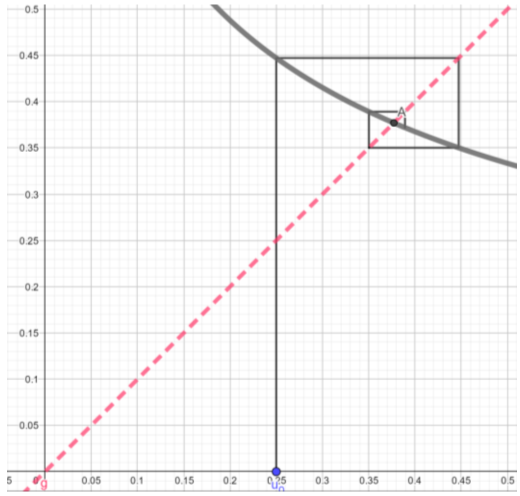
Démo

Prop : Si f est décroissante alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.
Lorsque la valeur de u_0 n'est pas connue, on doit étudier le signe de $h(x) = f \circ f(x) - x$ pour connaitre le sens de monotonie.

Démo

Illustration :





4) Cas où f est contractante i.e. lipschitzienne de rapport $M \in [0,1[$.

Etapes et preuve à connaitre :

Def : f est lipschitzienne sur D lorsqu'il un réel M tel que pour tous a et b de D , $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. M est le rapport de Lipchitz de f. f est contractante sur D lorsqu'il un réel $M \in [0,1[$ tel que pour tous a et b de D , $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$ i.e. lorsque f est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1. NB : toute fonction lipschitzienne sur D est continue sur D.

A savoir démontrer : si f est contractante sur D, de rapport M et L est un point fixe de f dans D alors L est l'unique point fixe de f sur D et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\forall n, |u_n - L| \leq M^n |u_0 - L|$. **Démo**

Exemples :

1) Soit u une suite définie par : u_0 réel et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{1+{u_n}^2}$. Etudiez la convergence de u et trouvez-en un équivalent simple.

2) Etudier la convergence de u telle que : $\forall n,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et $u_0 = \alpha$ réel . Illustrer ce résultat.

3)Soit u la suite définie par : $u_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que u converge vers 0 .

4) Etudier la convergence de u telle que $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ln(1+2u_n)$. Illustrer ce résultat.

5) Soit u la suite définie par :$u_0 \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} sin\frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que u est bien définie et que u n' a qu'une seule limite possible notée λ .
b) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1})sont monotones et convergentes.
c) Prouver la convergence de la suite u.
d) Montrer que $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
e) Ecrire un programme en python qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et qui retourne une valeur approchée de λ à ε près.

XIV. Suites implicites

Déf : Une suite implicite est une suite dont le terme de rang n , u_n , est la solution d'une équation $\varphi_n(x) = 0$ dans un intervalle I_n donné . u_n est alors entièrement défini par : $\begin{cases}\varphi_n(u_n) = 0 \\ u_n \in I_n\end{cases}$.

Exemples :

1. Soit $n \geq 2$ et $\varphi_n : (x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k - 1)$.

a. Justifier que : pour tout $n \geq 2$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une unique solution positive. On note λ_n cette solution.
b. Montrer que la suite (λ_n) est monotone et convergente.
c. Déterminer la limite de la suite (λ_n).

2. On définit la suite u par : pour tout entier naturel n, u_n est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

a. Justifier que $\forall n, u_n$ est bien défini. Représenter la suite u.

(ici , $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $\varphi(x) = \tan(x) - x$. u_n est défini par : $\begin{cases} tan(u_n) = u_n \\ u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[\end{cases}$) .

b. Etudier la monotonie et la limite de la suite u.
c. $u_n - n\pi \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$.
d. Déterminer des réels a, b et c tels que : $u_n = an + b + \frac{c}{n} + o_{+\infty}(1)$.

3. On définit la suite x par : pour tout entier naturel n , x_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation : $x + \ln(x) = n$.

a. Justifier que $\forall n, x_n$ est bien défini. Représenter la suite x.

b. Etudier la monotonie et la limite de la suite x.

c. Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Méthode : Etude d'une telle suite :

1) **Définition :** on fixe n arbitrairement, on écrit l'équation donnée sous la forme $\varphi_n(x) = 0$ et on vérifie que cette équation a bien une et une seule solution dans l'intervalle I_n : on étudie φ_n et on prouve que φ_ns'annule une et une seule fois sur I_n grâce au TVI et à la stricte monotonie … (TBCSM).
On justifie ainsi que la suite (u_n) est bien définie .

NB : φ_n est parfois bijective sur I_n alors $0 = \varphi_n(u_n)$ s'écrit $u_n = {\varphi_n}^{-1}(0)$. Il suffit alors d'étudier ${\varphi_n}^{-1}$ au voisinage de 0.

2) **Monotonie :** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement . Sinon.
b) on cherche le signe de $\varphi_n(u_{n+1})$ (en utilisant $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = 0$) et on utilise la monotonie de φ_n pour conclure .
Si par exemple $\varphi_n(u_{n+1}) > 0 = \varphi_n(u_n)$ et φ_n décroissante alors $u_n > u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante .

3) **Bornée :** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement . Sinon.
b) Par le TVI appliqué à φ_n entre deux valeurs bien choisies, on peut encadrer la suite .

4) **Convergence:** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement .
b)Si l'on sait que u a une limite (parce que u monotone par exemple), on passe à la limite dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$, il est parfois utile de la transformer et d' utiliser les propriétés de la suite (u_n) et notamment son caractère borné.

5) **Développement asymptotique :** le plus souvent on l'obtient en plusieurs étapes :
a) On obtient un équivalent α_n de u_n pour n au voisinage de +∞ en utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$. On pose alors :
$u_n = \alpha_n + \varepsilon_n$ tel que $\varepsilon_n = o_{+\infty}(\alpha_n)$.
b) On obtient un équivalent δ_n de ε_n pour n au voisinage de +∞ en réinjectant dans $\varphi_n(\alpha_n + \varepsilon_n) = 0$ utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$ On pose alors :
$\varepsilon_n = \delta_n + \mu_n$ tel que $\mu_n = o_{+\infty}(\varepsilon_n)$ …
c) Et on recommence !!!!
NB : D'autres méthodes sont parfois suggérées par l'énoncé. Laissez-vous guider.