Corrigé TD10
Dérivées nièmes.

Ex 1 Soit a, b, c et d constantes réelles et a non nulle. Justifier l'existence et calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des fonctions suivantes sur un domaine à préciser :

1) $f : \left(x \mapsto \frac{cx+d}{ax+b}\right)$.

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{b}{a}\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

$f(x) = \frac{cx+d}{ax+b} = \frac{\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a}}{ax+b} = \frac{c}{a} + \left[d - \frac{bc}{a}\right]\frac{1}{ax+b}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \left[d - \frac{bc}{a}\right] a^n \frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

2) $f : \left(x \mapsto \frac{1}{x^3+2x^2-x-2}\right)$.

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R}\backslash\{1, -1, -2\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

$\forall x \in Df, f(x) = \frac{1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{(x^2-1)x+2(x^2-1)} = \frac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$. Je décompose $f(x)$ en éléments simples. Il existe trois réels A,B et C tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1, -1, -2\}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$. Alors,

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1, -1, -2\}, (x-1)f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{C(x-1)}{x+2}$. Donc, $A = \lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}$. De même,

$B = \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2}$ et $C = \lim_{x\to -2}(x+2)f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\{1, -1, 2\}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}\underbrace{\frac{1}{(x-1)}}_{a(x)} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{(x+1)}}_{b(x)} + \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{(x+2)}}_{c(x)}$. Comme a, b et c sont de classe C^∞ sur $Df, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \frac{1}{6}a^{(n)}(x) - \frac{1}{2}b^{(n)}(x) + \frac{1}{3}c^{(n)}(x)$. Or, $a(x) = H(x-1)$, $b(x) = H(x+1)$ et $c(x) = H(x+2)$ $donc$, $a^{(n)}(x) = H^{(n)}(x-1)$, $b^{(n)}(x) = H^{(n)}(x+1)$ et $c^{(n)}(x) = H^{(n)}(x+2)$ avec $H^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \frac{1}{6}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

3) $f(x) = (3x^2 - x + 5)\sin(x\sqrt{3})e^x$

4) $f : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2-b^2}\right)$

5) $f : (x \mapsto \sin^3(x) + cos^3(x))$

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de On linéarise.

$\sin^3(x) + cos^3(x) = \frac{1}{-8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3 + \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3$

$\sin^3(x) + cos^3(x) = \frac{1}{-8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) + \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})$

$\sin^3(x) + cos^3(x) = \frac{1}{-8i}(2isin(3x) - 6isin(x)) + \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4}[\cos(3x) + 3\cos(x) - sin(3x) + 3sin(x)]$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left[3^n\cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) - 3^n\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

6) $f : (x \mapsto (4x^2 - 3x + 1)\sin^2(x))$ (expression sous la forme $H(x) + P(x)sin(2x) + Q(x)cos(2x)$ où H, P et Q polynomiales)

7) $f : \left(x \mapsto \underbrace{x^n}_{=a(x)}\ \underbrace{e^{3x}}_{=b(x)}\right)$ puis calculer $f^{(n)}(0)$.

8) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions.

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(k)}(x)b^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}3^{n-k}e^{3x} = \sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}^2 x^{n-k}3^{n-k}e^{3x}$

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}^2(3x)^{n-k}e^{3x}$. Donc, $f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}^2 0^{n-k}3^{n-k} = n!\binom{n}{n}^2 0^0 3^0 = n!$.

Remarque : $f(x) = x^n\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{(3x)^k}{k!} + o(x^p)\right) = \sum_{k=0}^{p}\frac{3^k}{k!}x^{k+n} + o(x^{p+n})$. Donc, comme TY s'applique à f à tout ordre en 0, le polynôme de Taylor de f en 0 de rang $n + p$ est $P_{n+p}(x) = \sum_{k=0}^{p}\frac{3^k}{k!}x^{k+n}$ et celui de rang n est $P_n(x) = \frac{3^0}{0!}x^n = x^n$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : (x \mapsto x^{2n})$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Ex 3 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0, g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Justifier que $g_n \in D^n(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et montrer ,par récurrence sur n , que : $\forall x > 0, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x \to x^{n-1}ln(x))$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0, g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0, \left(x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. De plus $(x \mapsto x^{n-1}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. Ainsi, $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

Posons H_n: " $\forall x>0,\ g_n^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ ".

Initialisation : $\forall x>0,\ g_1(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $g_1'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(-1)^1}{x^{1+1}}f^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc H_1 est vraie.

Propagation : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Je suppose que $H_n$est vraie. Alors : $\forall x>0,\ g_n^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n x^{-(n+1)}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or, $\forall x>0,\ g_{n+1}(x)=x^{(n+1)-1}f\left(\frac{1}{x}\right)=xg_n(x)$. Alors Leibniz assure que :

$g_{n+1}^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\underbrace{id^{(k)}(x)}_{=0\ pour\ k\geq 2}\ g_n^{(n+1-k)}(x)=xg_n^{(n+1)}(x)+(n+1)g_n^{(n)}(x)$

$=x\left[(-1)^n(-(n+1))x^{-(n+1)-1}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc *si* H_n est vraie alors H_{n+1}est vraie.

CCL : le théorème de récurrence assure que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n$est vraie.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de φ: $(x\to x^{n-1}ln(x))$ $\forall x>0,\ \varphi(x)=-x^{n-1}\ ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, d'après ce qui précède, comme ln est de classe C^∞sur $\mathbb{R}^{+*}$, φ l'est aussi et $\forall x>0,\ \ \varphi^{(n)}(x)=-\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}ln^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\frac{(n-1)!}{x}$.

Ex 4 Soit $f:\left(x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$, où P_n est une fonction polynomiale. Donner une relation entre $P_n{}'$, P_n *et* P_{n+1} ?

c) Déterminer et démontrer (conjecture puis récurrence) le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

Ex 5 Soit $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\end{pmatrix}$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$, où P_n est une fonction polynomiale. Donner une relation entre $P_n'(t), P_n(t) et\ P_{n+1}(t)$.

c) Déterminer , par conjecture puis récurrence , le degré et le coefficient dominant de P_n .

d) Montrer que f est solution de : $(1-x)^2y'=(2-x)y$.

e) En déduire que :$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R}^*$, $P_{n+1}(t)=[(2n+1)t+t^2]P_n(t)-n^2t^2P_{n-1}(t)$.

a) f est de classe C^∞ sur $Df=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

b) $H(n)$: " *il existe* P_n fonction polynomiale telle que $\forall x\in Df, f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}\underbrace{=}_{u(x)=\frac{1}{1-x}}P_n(u(x))e^{u(x)}\underbrace{=}_{t=\frac{1}{1-x}}P_n(t)e^t$".

Initialisation : $\forall x\in Df, f(x)=\frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\underbrace{=}_{u(x)=\frac{1}{1-x}}u(x)e^{u(x)}=P_0(u(x))e^{u(x)}\underbrace{=}_{t=\frac{1}{1-x}}P_0(t)e^t$ avec $P_0(t)=t,\ P_0$ polynomiale.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose $H(n)$ vraie.

Alors *il existe* P_n fonction polynomiale telle que $\forall x\in Df, f^{(n)}(x)\underbrace{=}_{u(x)=u=\frac{1}{1-x}}P_n(u(x))e^{u(x)}$.

Donc $f^{(n+1)}(x)=\frac{df^{(n)}}{dx}(x)=u'(x)P_n'(u(x))e^{u(x)}+P_n(u(x))u'(x)e^{u(x)}=\frac{1}{(1-x)^2}\left[P_n{}'\left(\frac{1}{1-x}\right)+P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]e^{\frac{1}{1-x}}$

$f^{(n+1)}(x)=u(x)^2[P_n'(u(x))+P_n(u(x))]e^{u(x)}$. Posons $P_{n+1}(t)=t^2[P_n'(t)+P_n(t)]$.

Alors P_{n+1} est polynomiale comme somme et produit de fonctions polynomiales et $\forall x\in Df, f^{(n+1)}(x)=\left[P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]e^{\frac{1}{1-x}}$.

Ainsi, $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie.

CCL : $\forall n\in\mathbb{N}, H(n)$ vraie par le théorème de récurrence simple.

c) $\forall t\in\mathbb{R}, P_0(t)=t$ *et* $\forall n, P_{n+1}(t)=t^2[P_n'(t)+P_n(t)]$. Donc $P_1(t)=t^2(1+t)=t^3+t^2$, $P_2(t)=t^2(3t^2+2t+t^3+t^2)=t^5+4t^4+2t^3$.

Conjecture : "$P_n(t)=t^{2n+1}+Q_n(t)$ *avec* $\deg(Q_n(t))\leq 2n$" : $H(n)$.

Initialisation : $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose $H(n)$ vraie

Alors, $P_n(t)=t^{2n+1}+Q_n(t)$ *avec* $\deg(Q_n(t))\leq 2n$.

Donc, $P_{n+1}(t)=t^2[(2n+1)t^{2n}+Q_n{}'(t)+t^{2n+1}+Q_n(t)]=t^{2n+3}+\underbrace{[(2n+1)t^{2n+2}+t^2Q_n{}'(t)+t^2Q_n(t)]}_{=Q_{n+1}(t)}$

$P_{n+1}(t) = t^{2n+3} + Q_{n+1}(t)$ et deg $(t^2Q_n'(t) + t^2Q_n(t)) \leq$ deg $(t^2Q_n(t)) \leq 2+2n$ donc deg $(Q_{n+1}(t)) \leq 2n+2$.
Ainsi, $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie.
CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ vraie par le théorème de récurrence simple.
RQUE : $P_{n+1}(t) = t^2[P_n'(t) + P_n(t)]$. Comme $P_n \neq 0$ car f n'est pas polynomiale, $\deg(P_n') < \deg(P_n)$ et par conséquent, $deg(P_n'(t) + P_n(t)) = deg\,(P_n(t))$ donc $deg(P_{n+1}(t)) = deg\left(t^2P_n(t)\right) = 2 + deg\,(P_n(t))$.
Posons $d_n = deg\,(P_n(t))$. Alors $d_{n+1} = 2 + d_n$ donc la suite (d_n) est arithmétique. Donc $\forall n, d_n = d_0 + 2n = 1 + 2n$.
d) $\forall x \in Df, \underbrace{(1-x)^2}_{a(x)} f'(x) = (1-x)^2\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}\right]e^{\frac{1}{1-x}} = \left[1 + \frac{1}{(1-x)}\right]e^{\frac{1}{1-x}} = \left[\frac{2-x}{(1-x)}\right]e^{\frac{1}{1-x}} = \underbrace{(2-x)}_{b(x)} f(x)$.
e) a et b étant aussi de classe C^∞ sur Df, Leibniz assure que $\forall x \in Df, \forall x \in \mathbb{N}$,
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(k)}(x)f'^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)$. Alors comme $\forall k \geq 3, a^{(k)}(x) = 0$ et $\forall k \geq 2, b^{(k)}(x) = 0$.
$\binom{n}{0}a^{(0)}(x)f'^{(n)}(x) + \binom{n}{1}a^{(1)}(x)f'^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}a^{(2)}(x)f'^{(n-2)}(x) = \binom{n}{0}b^{(0)}(x)f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}b^{(1)}(x)f^{(n-1)}(x)$
$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$
$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) + (2n(x-1) + x - 2)f^{(n)}(x) + n^2f^{(n-1)}(x) = 0$.
Alors, $(1-x)^2P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} + (2n(x-1) + x - 2)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} + n^2P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = 0$.
Donc, $(1-x)^2P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) + (2n(x-1) + (x-1) - 1)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n^2P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$.
Alors, en posant $t = \frac{1}{1-x}$, $1 - x = \frac{1}{t}$ et $t \in \mathbb{R}^*$ et $\left(\frac{1}{t}\right)^2 P_{n+1}(t) + \left(2n\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} - 1\right)P_n(t) + n^2P_{n-1}(t) = 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*, P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2]P_n(t) - n^2t^2P_{n-1}(t)$.

Ex 6 Soit $(E): x^2y'' + 4xy' + 2y = \sin(x)$ Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞.
1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2g^{(n+2)}(x) + (2n+4)xg^{(n+1)}(x) + (n^2+3n+2)g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2) En déduire le polynôme de Taylor de g en 0 de rang n tq $n \in \mathbb{N}$.
3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $\theta(x) = x^2y(x)$. Faites de même sur $\mathbb{R}^{-*}$.
4) En déduire g et retrouver la valeur de $g'(0)$.

Ex 7 Trouver une relation entre $Arctan^{(n+2)}, Arctan^{(n+1)}$ et $Arctan^{(n)}$.

Ex 8 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.
1. Calculer le plus efficacement possible $f^{(n)}(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$.

1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + o_0(x^{2n})] = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$. *Comme* f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$, TY s'applique à f en 0 et $P_{2n+1}(x)x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1}$ est le polynôme de Taylor en 0 de rang $2n+1$ de la fonction f. J'en déduis que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases}1 \text{ si } n \text{ est impair}\\ 0 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$.
Ainsi, $f^{(n)}(0) = \begin{cases}n! \text{ si } n \text{ est impair}\\ 0 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$.
2. Décomposons $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ en élément simples. $\forall x \in Df, f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}\right]$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in Df$, $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

Ex 9
A) Montrer que la fonction : $f: \left(x \mapsto \begin{cases}1 - \frac{x^2}{2} & si\ x < 0\\ \frac{2+x^2}{2(1+x^2)} & si\ x \geq 0\end{cases}\right)$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de 4 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
B) Soit n un entier naturel non nul. Soit $f: \left(x \mapsto \begin{cases}x^n\ln(x) & si\ x > 0\\ 0 & si\ x = 0\end{cases}\right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n-fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(0) = 0$. Que peut-on en conclure sur les ensembles D^n ($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) et C^{n-1}($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) ?
C) Soit n un entier naturel. Montrer que la fonction : $f: \left(x \mapsto \begin{cases}0 & si\ x < 0\\ x^{n+1} & si\ x \geq 0\end{cases}\right)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ mais que $f^{(n+1)}(0)$ n'existe pas.

A) Posons $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ et $h(x) = \frac{2+x^2}{2(1+x^2)}$ et $f: \left(x \mapsto \begin{cases}g(x)\ si\ x < 0\\ 1\ si\ x = 0\\ h(x)\ si\ x > 0\end{cases}\right)$.
Adaptons le critère de classe C^3 à f.
- g et h sont de classe C^∞ sur respectivement $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, f est de classe C^∞ sur respectivement $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$. Et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ et $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = h^{(n)}(x)$.

En particulier,
$\forall x < 0, f'(x) = g'(x) = -x, f''(x) = g''(x) = -1$ et $f'''(x) = g'''(x) = 0 = g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ pour $n \geq 3$. Et,

$\forall x>0, f'(x)=h'(x)=\frac{-x}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=h''(x)=\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$, $f'''(x)=h'''(x)=\frac{-12x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$ $et\ f^{(4)}(x)=g^{(4)}(x)=\frac{12(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} h'(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g''(x)=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} h''(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g'''(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} h'''(x)$

Le critère de classe C^3 assure que f est de classe C^3 $sur\ \mathbb{R}$ et $f''':\left(x\mapsto\begin{cases}0\ si\ x<0\\ 0\ si\ x=0\\ \frac{-12x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}\ si\ x>0\end{cases}\right)$.

Montrons que f''' n'est pas dérivable en 0 :

$\forall x<0, \tau(x)=\frac{f'''(x)-f'''(0)}{x-0}=0\ et\ \forall x>0, \tau(x)=\frac{f'''(x)-f'''(0)}{x-0}=\frac{-12(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\tau(x)=0\ et\ \lim\limits_{x\to 0^+}\tau(x)=12$.

J'en déduis que f''' n'est pas dérivable en 0 et par conséquent, f n'est pas de 4 fois de dérivable sur $\mathbb{R}$.

B) Soit n un entier naturel non nul . Soit $f:\left(x\mapsto\begin{cases}x^n\ln(x)\ si\ x>0\\ 0\ si\ x=0\end{cases}\right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n-fois ;

Posons $g(x)=\underbrace{x^n}_{u(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$. g est de classe C^∞ $sur\ \mathbb{R}^{+*}$ car constituée de fonctions de classe C^∞ sur Leur propre domaine de définition et d'après Leibniz, $g^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u^{(k)}(x)v^{(p-k)}(x)$

$g^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u^{(k)}(x)v^{(p-k)}(x)+u^{(p)}(x)v^{(0)}(x)$

$g^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{(-1)^{p-k-1}(p-k-1)!}{x^{p-k}}+\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\ln(x)$

$g^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}(-1)^{p-k-1}(p-k-1)x^{n-p}+\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\ln(x)$

$g^{(p)}(x)=\left[\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p!}{(p-k)!k!}(-1)^{p-k-1}\frac{n!(p-k-1)!}{(n-k)!}+\frac{n!}{(n-p)!}\ln(x)\right]x^{n-p}$

$g^{(p)}(x)=\left[p!(-1)^{p-k-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{(p-k)}+\frac{n!}{(n-p)!}\ln(x)\right]x^{n-p}=\left[A_p+B_p\ln(x)\right]x^{n-p}$ où A_p et B_p sont réels.

$g^{(p)}(x)=A_p\,x^{n-p}+B_px^{n-p}\ln(x)$ où A_p et B_p sont réels.

Si $0\le p<n$ alors $\lim\limits_{x\to 0}x^{n-p}\ln(x)=0$ et donc, $\lim\limits_{x\to 0}g^{(p)}(x)=0$. Alors le critère de classe C^{n-1}assure que f est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f^{(p)}:\left(x\mapsto\begin{cases}A_p\,x^{n-p}+B_px^{n-p}\ln(x)\ si\ x>0\\ 0\ si\ x=0\end{cases}\right)$.

Par contre, $g^{(n)}(x)=A_n+B_n\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}g^{(n)}(x)=+\infty$. Alors le critère de dérivabilité assure que $f^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0 et $Cf^{(n-1)}$ a une tangente verticale en 0.

C) Appliquons le critère de classe C^n : f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ dès que $\begin{cases}f \text{ est continue en } 0\\ f \text{ est de classe } C^n \text{ au moins sur } \mathbb{R}\backslash\{0\}\\ \forall k\in[\![1,n]\!], \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(k)}(x) \text{ existe et est finie}\end{cases}$.

Posons $g:(x\mapsto x^{n+1})\ et\ \omega:(x\mapsto 0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\omega(x)$. Donc, f est continue en 0.
- g et ω sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^nsur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\forall x>0, \forall k\in\mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}g^{(k)}(x)si\ x>0\\ \omega^{(k)}(x)\ si\ x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k}si\ x>0\\ 0\ si\ x<0\end{cases}.$$

- $\forall k\in[\![1,n]\!], \lim\limits_{x\to 0}g^{(k)}(x)\underbrace{=}_{car\ n+1-k>0}0=\lim\limits_{x\to 0}\omega^{(k)}(x)$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f^{(k)}(x)$ existe , est finie car nulle.

J'en conclus que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. En particulier $f^{(n)}$ $est\ contiue\ sur\ \mathbb{R}$. De plus, $f^{(n)}$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, f^{(n+1)}(x)=\begin{cases}(n+1)!\ si\ x>0\\ 0\ si\ x<0\end{cases}$.Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f^{(n+1)}(x)=(n+1)!\neq 0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f^{(n+1)}(x)$. Le critère de dérivabilité assure alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=(n+1)!\neq 0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}$. Donc $f^{(n)}$n'est pas dérivable en 0. Autrement dit, $f^{(n+1)}(0)$ n'existe pas.