DS 4

CALCULATRICE **NON** AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.
Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).
Les différents exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
- Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et vous assurer que :

•Vous n'avez pas affirmé , dès le début de votre raisonnement, que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ?

•Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.

•Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute ou une question sur l'énoncé, n'hésitez pas à m'en faire part.

EXERCICE Suite d'intégrales

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e t^2(ln(t))^n dt.$

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n$ existe.
2. Calculer I_0, I_1 et I_2.
3. Justifier que la suite (I_n) converge.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n e^{3x} dx.$
5. En déduire, grâce à un bon encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} (vous contrôlerez votre relation pour $n = 0$ puis $n = 1$) .
7. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. Donner alors un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

PROBLEME 1 Autour d'une fonction

On rappelle (Cf DS 3) et admet que $\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} \in]-1,1[$ et $th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.

Soit $f: \left(x \mapsto xsh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

A. ÉTUDE DE f

1. Donner le domaine de définition Df de f et étudier sa parité .
2. Déterminer des réels a, b et c tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
3. En déduire que Cf admet une asymptote horizontale en $+\infty$. On expliquera la position de Cf par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que $f(x) \sim_0 \frac{|x|}{2} e^{\frac{1}{|x|}}$. En déduire la limite de f en 0 .
5. Justifier que f est dérivable sur Df et $\forall x \in Df, f'(x) = \left[th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] ch\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. Montrer que : $\forall t > 0, th(t) < t$.
7. En déduire les variations de f et représenter f.

B. Bijection réciproque

9. Justifier que f induit une bijection h de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle J à déterminer . h est la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ et h^{-1} est sa bijection réciproque.

10. Montrer que $h^{-1}(t) \sim_{1^+} \frac{1}{\sqrt{6(t-1)}}$.

C. Une autre fonction .

11. Soit g: $\left(t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. Montrer que g est prolongeable par continutié en 0 et que son prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et déterminer la position de $C_{\tilde{g}}$ par rapport à sa tangente en 0 .

D. Une équation différentielle .

On considère l' équation différentielle (E) : $xy' + y = ch(x)$.

12. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
13. En déduire , sans calcul, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
14. Démontrer que $\tilde{g}$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

E. Une fonction dont l'expression est intégrale.

On pose $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$.

15. Démontrer que $\forall X \in \mathbb{R}, sh(2X) = 2ch(X)sh(X)$.
16. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, J(x)$ existe.
17. Démontrer que J est impaire.
18. Montrer que J est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, J'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}ch\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
19. En déduire le signe de $J'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et exprimer les zéros (ou racines) de J' dans $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide de la fonction ln.
20. Montrer par encadrement, que $\lim_{x\to 0^+} J(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} J(x)$.

PROBLEME 2 Développements limités obtenus par résolution d'une équation différentielle

A. Deux équations différentielles linéaires liées

1. Soit l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation différentielle (E_1): $cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$.

   Résoudre (E_1) sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.

2. Soit $J =]-1,1[$ et (E_2): $(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.

Soit $y : J \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur J. On pose $\forall x \in J,\ t = Arcsin(x)$ et $z(t) = y(x)$.

2.1. Montrer que : y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow z$ est solution de (E_1) sur I.

2.2. En déduire toutes les solutions de (E_2) sur J.

B. Dans cette partie, on considère une solution quelconque f de (E_2) sur J.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur J .
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2 f^{(n)}(x) = 0$.
5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n .
6. Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction de respectivement $a_1 = f'(0)$ et $a_0 = f(0)$ et à l'aide de factorielles.

C. Application au DL.

7. En remarquant que h: $(x \to \frac{Arcsinx}{\sqrt{1-x^2}})$ est une solution de (E_2) , déterminer, grâce à Taylor Young et à ce qui précède, le développement limité de h à l'ordre $2n + 1$ au voisinage de 0 .
8. De même, déterminer le développement limité de g: $(x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ à l'ordre $2n$ au voisinage de 0 .
9. En déduire le développement limité de $Arcsin$ à l'ordre $2n + 1$ au voisinage de 0 .

FIN