

Corrigé du TD 13 Dérivation-Rolle - Accroissements Finis - Taylor Lagrange.

I et J désignent des intervalles de \mathbb{R} .

Ex 0 Rappel : f est dérivable en a et $f'(a) = L$ si et seulement si f admet un développement limité $DL_1(a)$ suivant : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a((x-a))$.

f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$ si et seulement si f admet un développement limité $DL_1(a^+)$ suivant : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_{a^+}((x-a))$.

Applications : soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$.

1) Démontrer que si f et h sont dérivables respectivement en a et $f(a)$ alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a)h'(f(a))$.

2) On suppose $a \in I$. Montrer que si f est une application dérivable à droite et à gauche en a alors $\Delta_a: \left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} \right)$ est prolongeable par continuité en 0.

3) Règle de (monsieur) l'Hôpital « soft ». On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ et $f(a)=g(a) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

1. f et h sont dérivables en respectivement a et $f(a)$. Donc, f admet un $DL_1(a)$ et h admet un $DL_1(f(a))$. Il existe donc deux fonctions ε et θ telles que : $\forall x \in D, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

et $\forall y \in E, h(y) = h(f(a)) + h'(f(a))(y-f(a)) + (y-f(a))\theta(y)$ et $\lim_{y \rightarrow f(a)} \theta(y) = 0$.

Alors, $\forall x \in D, h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))(f(x)-f(a)) + (f(x)-f(a))\theta(u(x))$ et $\lim_{x \rightarrow a} \theta(u(x)) \stackrel{\text{par composition}}{=} 0$.

$$h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)) + (f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x))\theta(u(x))$$

$$h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a) \left(f'(a)\theta(u(x)) + \varepsilon(x)\theta(u(x)) + h'(f(a))\varepsilon(x) \right)$$

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$h \circ f(x) = h \circ f(a) + h'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a)\alpha(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Ainsi, $h \circ f$ admet un $DL_1(a)$. J'en déduis que $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = h'(f(a))f'(a)$.

2. On suppose $a \in I$. Je suppose que f est une application dérivable à droite et à gauche en a .

Alors $f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + o_{a^+}((x-a))$ et $f(x) = f(a) + f'_g(a)(x-a) + o_{a^-}((x-a))$.

Alors, pour h au voisinage de 0^+ , $f(a+h) = f(a) + f'_d(a)h + o_{0^+}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_g(a)(-h) + o_{0^+}(h)$.

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{(f(a)+f'_d(a)h+o_{0^+}(h)) - (f(a)+f'_g(a)(-h)+o_{0^+}(h))}{h} = f'_d(a) + f'_g(a) + o_{0^+}(1). \text{ Donc, } \lim_{h \rightarrow 0^+} \Delta_a(h) = f'_d(a) + f'_g(a).$$

De même, pour h au voisinage de 0^- , $f(a+h) = f(a) + f'_g(a)h + o_{0^-}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_d(a)(-h) + o_{0^-}(h)$.

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{(f(a)+f'_g(a)h+o_{0^-}(h)) - (f(a)+f'_d(a)(-h)+o_{0^-}(h))}{h} = f'_g(a) + f'_d(a) + o_{0^-}(1). \text{ Donc, } \lim_{h \rightarrow 0^-} \Delta_a(h) = f'_g(a) + f'_d(a).$$

J'en conclus que $\left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} \right)$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f'_g(a) + f'_d(a)$.

3. On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ et $f(a) = g(a) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\substack{\text{car } f(a)=g(a)=0 \text{ et} \\ f \text{ et } g \text{ dérivables en } a}}{=} \frac{f'(a)(x-a)+o_a(x-a)}{g'(a)(x-a)+o_a(x-a)} \stackrel{\substack{\text{pas de FI} \\ \text{car } g'(a) \neq 0}}{=} \frac{f'(a)+o_a(1)}{g'(a)+o_a(1)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Extrema et Rolle

Ex 1 Théorème de Rolle généralisé. Soit a un réel et f une fonction continue sur $]a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ et tq : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

1er cas f constante. Alors $\forall c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

2ème cas f non constante. Alors $\exists r \in]a, +\infty[$ tel que : $f(r) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(r) > f(a)$.

Sur $[a, r]$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\alpha \in]a, r[$ tel que $f(\alpha) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Sur $[r, +\infty[$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\beta \in]r, +\infty[$ tel que $f(\beta) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Travaillons sur $[\alpha, \beta]$. f est continue sur ce segment donc admet un maximum M ce segment. Il existe donc un réel $c \in]\alpha, \beta[$ tel que : $\forall x \in [\alpha, \beta], f(c) \geq f(x)$. Alors, $f(c) \geq f(r) > \frac{f(a)+f(r)}{2} = f(\alpha) = f(\beta)$. Donc, $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, +\infty[$. Par suite, f est dérivable en c et ainsi, le

théorème de condition nécessaire d'extremum assure que $f'(c) = 0$.

Ex 2 Rolle and Rolle and Rolle Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in D^n([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 = f(b)$. Montrer que $\exists c \in]a, b[$ / $f^{(n)}(c) = 0$

Application : Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $\exists c \in]-1, 1[$ / $f^{(n)}(c) = 0$

$f \in D^n([a, b], \mathbb{R})$ donc $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables donc continues sur $[a, b]$.

De plus $f(a) = f(b)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que : $f'(c_1) = 0$.

Alors, $f'(a) = f'(c_1)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que : $f''(c_2) = 0$.

Alors, $f''(a) = f''(c_2)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_3 \in]a, c_2[$ tel que : $f^{(3)}(c_3) = 0$.

Je peux ainsi construire les réels c_1, c_2, \dots, c_{n-1} tels que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^{(k)}(c_k) = 0$ et $a < c_{n-1} < c_{n-2} < \dots < c_2 < c_1 < b$.

Alors, $f^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(c_{n-1})$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, c_{n-1}[\subset]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$. f est polynomiale donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} . $f(1) = f(-1) = 0$.

1ère méthode : Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. $f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^{(p-k)}(x)v^{(k)}(x)$ où $u(x) = (x-1)^n$ et $v(x) = (x+1)^n$ et $v^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k}$.

Comme $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (k \in \llbracket 0, p \rrbracket \Rightarrow n-k > 0 \Rightarrow v^{(k)}(-1) = 0)$. Par conséquent, $\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^{(p)}(-1) = 0$

Alors, le résultat précédent s'applique à f , il existe donc $c \in]-1, 1[$ / $f^{(n)}(c) = 0$.

2ème méthode : de la factorisation $f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$, je peux dire que 1 et -1 les racines de f et sont de multiplicité n dans f . Alors les

cours sur les polynômes (caractérisation de la multiplicité par les polynômes dérivés) permet d'affirmer que $\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^{(p)}(-1) =$

$f^{(p)}(1) = 0$. Alors, le résultat précédent s'applique à f , il existe donc $c \in]-1, 1[$ / $f^{(n)}(c) = 0$.

Ex 3 Soit a et b deux réels tq $a < b$. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- 1) Montrer que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f est injective.
- 2) En déduire que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f' est de signe constant.
- 3) Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
 - 1) Soit x et y deux éléments distincts de $[a, b]$. On note S le segment d'extrémités x et y . Comme f est continue sur $[a, b]$ donc sur S et dérivable sur $]a, b[$ donc sur $\overset{\circ}{S}$, le théorème de Rolle assure que : $f(x) = f(y) \Rightarrow f'$ s'annule sur $\overset{\circ}{S} \Rightarrow f'$ s'annule sur $]a, b[$. Donc par contraposée, si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors $f(x) \neq f(y)$. Donc si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f est injective.
 - 2) **1^{ère} méthode** : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Alors d'après 1) f est injective. Comme de plus f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, f est strictement monotone sur $[a, b]$ (résultat de cours chap 5 bijection prop 39). Par conséquent, f' garde un signe strict constant sur $]a, b[$.
2^{ème} méthode : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Imaginons un instant que f' change de signe. Alors il existe c et $d \in]a, b[$ tel que : $f'(c) > 0$ et $f'(d) < 0$. Alors nécessairement $c \neq d$. Supposons par exemple $c < d$. Comme f est injective (d'après 1), $f(c) \neq f(d)$. Par exemple $f(c) < f(d)$. f est continue sur le segment $[c, d]$ donc admet un maximum M sur ce segment tel que $M = f(u)$ avec $u \in [c, d]$.
 $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) > 0$. Donc il existe $\alpha \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(c)}{\alpha-c} > 0$ et par conséquent, $f(\alpha) > f(c)$. Alors $M \geq f(\alpha) > f(c)$.
 $\lim_{x \rightarrow d^-} \frac{f(x)-f(d)}{x-d} = f'(d) < 0$. Donc il existe $\beta \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\beta)-f(d)}{\beta-d} < 0$ et par conséquent, $f(\beta) > f(d)$. Alors $M \geq f(\beta) > f(d)$.
 Ainsi, $u \in]c, d[$. Alors la condition nécessaire d'extremum permet d'affirmer que $f'(u) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse « f' ne s'annule pas ». J'en conclus que f' ne peut pas changer de signe.
 - 3) Soit c et d deux réels de $]a, b[$ tels que $f'(c) < f'(d)$. Soit m un réel compris entre $f'(c)$ et $f'(d)$. Posons $g(x) = f(x) - mx$. Alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - m$. Donc, $g'(c) < 0$ et $g'(d) > 0$. Comme g' change de signe sur $]a, b[$, g' s'annule sur $]a, b[$ par contraposée du résultat 2). Il existe donc un réel $u \in]a, b[$ tel que $g'(u) = 0$ et par conséquent, $f'(u) = m$. Ainsi, f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(c)$ et $f'(d)$.
 f' possède donc la propriété des valeurs intermédiaires.

Ex 4 Soit f dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$.

Démontrer qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ telle que : $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$. **Indication** : utiliser $\varphi: \left(x \rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in]a, b[\\ L & \text{à déterminer si } x = a \end{cases} \right)$.

Comment lire géométriquement ce résultat ?

Soit $\varphi: \left(x \rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \right)$.

Comme f est dérivable sur $[a, b]$, φ est dérivable donc continue sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, \varphi'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$. De plus,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 0$ donc φ est continue en a et finalement sur $[a, b]$. De plus, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ telle que $\varphi'(c) = 0$. Par conséquent, $f'(c)(c - a) - (f(c) - f(a)) = 0$ et ainsi, $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$. Cela s'écrit aussi $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ ce qui signifie que le coefficient directeur de la tangente T_c à Cf au point C est égale le coefficient directeur de la droite (AC) ; comme ces deux droites ont le point C en commun, cela signifie que ce sont une et une seule et même droite. Ainsi, il existe un point C de Cf telle que $T_c = (AC)$.

Ex 5 Soit f et g deux fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$ (ie f' et f'' continues sur $[a, b]$) telles que :

$f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$ et $\forall x \in [a, b], f''(x) \leq g''(x)$. Montrer que : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

Posons $\forall x \in [a, b], h(x) = g(x) - f(x)$. Alors h est de classe C^2 sur $[a, b]$.

$\forall x \in [a, b], h'(x) = g'(x) - f'(x)$ et $h''(x) = g''(x) - f''(x) \geq 0$. Donc h' est croissante.

1^{ère} méthode :

De plus, $h(a) = h(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure que h' s'annule sur $]a, b[$ en un réel c . Par conséquent, $\forall x \in [a, c], h'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [c, b], h'(x) \geq 0$. Donc h est décroissante sur $[a, c]$ et croissante sur $[c, b]$. De plus, $h(a) = h(b) = 0$. Donc nécessairement, h est positive. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

2^{ème} méthode :

Alors h est convexe. Donc la courbe de h se trouve en-dessous de toutes ses cordes. Or, la corde (AB) reliant $A(a, h(a))$ et $B(b, h(b))$ est la droite des abscisses puisque $h(a) = h(b) = 0$. Ainsi, la courbe de h se trouve en-dessous de l'axe des abscisses ce qui signifie que, h est négative. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

II Accroissements finis

Ex 6 Théorème de Accroissements finis généralisé : Soit a et b deux réels tq $a < b$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

a) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Indication : utiliser la fonction $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$ où K est une constante à bien choisir !

Ex 7 Règle de (monsieur) l'Hôpital

1. **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ et telles que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ et } g' \text{ ne s'annule pas sur }]a, b[\text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. En utilisant les fonctions $f: (x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x}))$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

DL7

3. **Une application pratique** : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{5x^2 + 6x^3}$ de deux manières .

4. **Une application plus théorique** : Soit $f \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On définit la fonction $g : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- Démontrer que g est de classe C^1 sur $[0,1[$.
- Exprimer pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x .
- En déduire que g est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et déterminer $g^{(n)}(0)$. On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

Ex 8 Encadrements et inégalités obtenus grâce aux accroissements finis.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. En déduire un encadrement de S_n tel que :

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n) . \text{ Conclure à la convergence de la suite } (S_n).$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x))$

3. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes : $\sqrt{10001} \approx 100$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in [x, x+1] / \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}'(c)(x+1-x) = \frac{1}{1+c^2} .$$

$$\text{Alors, } \frac{1}{1+(x+1)^2} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \text{ donc } \frac{x^2}{1+(x+1)^2} \leq x^2 [\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)] \leq \frac{x^2}{1+x^2} .$$

$$\text{Comme } \frac{x^2}{1+(x+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ et } \frac{x^2}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1 .$$

3. $\sqrt{10001} = \sqrt{10000 + 1}$. Soit $f(x) = \sqrt{10000 + x}$. f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], |f'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{10000+x}} \right| \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{10000}} \right| = \frac{1}{200}$. Alors, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre 0 et 1 assure que : $|\sqrt{10000+1} - 100| = |\sqrt{10000+1} - \sqrt{10000}| \leq \frac{1}{200} |1 - 0| = \frac{1}{200}$. Donc 100 est une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ à 0,005 près.

Ex 9 Soit a, b, c trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Posons $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Alors f est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Alors l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $f(1) - f(0) = f'(x)(1-0)$ i.e. $f'(x) = a + b + c$ i.e. $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Ex 10 Soit a et b deux réels tq $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^*$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

f continue sur l'intervalle $[a, b]$ et ne s'annule pas sur $[a, b]$ donc garde un signe strict constant sur $[a, b]$. Posons $g(x) = \ln|f(x)|$.

Alors f est continue sur $[a, b]$ donc g l'est aussi. f est dérivable et ne s'annule pas sur $]a, b[$ donc g est dérivable sur $]a, b[$ (puisque la valeur absolue est continue sur \mathbb{R} mais dérivable que sur \mathbb{R}^*) et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Alors l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ i.e. $\ln|f(b)| - \ln|f(a)| = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$.

Donc, $\ln \left| \frac{f(b)}{f(a)} \right| = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$ et par conséquent, $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$ i.e. $\left| \frac{f(b)}{f(a)} \right| = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$. Comme f conserve le même signe sur $[a, b]$, $\frac{f(b)}{f(a)} > 0$

et ainsi, $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$.

Ex 11 On suppose que f est une application deux fois dérivable sur $]0, 2[$. Soit deux réels u et v tels que $0 < u < v < 2$. En utilisant à

$\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à bien choisir, démontrer que :

$$\exists c \in]0, 2[/ f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4} .$$

Soit $\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à choisir de sorte que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

f est une application deux fois dérivable sur $]0, 2[$ donc sur $[u, v]$ donc φ l'est aussi. Et $\forall x \in [u, v], \varphi'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(x-v)$. De

plus, $\varphi(v) = 0$. Choisissons K tel que $\varphi(u) = 0$ i.e. $K = \frac{4[f(u) + 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v)]}{(v-u)^2}$. Alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et il existe

donc un réel $d \in]u, v[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{d+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. De plus, f' est dérivable donc continue sur $[u, v]$. Alors,

l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $c \in]u, d[$ tel que : $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v+d}{2} - d\right)$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right)$.

Alors $f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. Comme $d \neq v, \frac{v-d}{2} \neq 0$ et par conséquent, $f''(c) - K = 0$.

Ainsi, $\frac{4[f(u) + 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v)]}{(v-u)^2} = K = f''(c)$. J'en conclus que $f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4}$ où $c \in]u, d[\subset]u, v[$.

Ex 12 Justifier que si f est classe C^1 sur $[a, b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

Soit f classe C^1 sur $[a, b]$. Alors f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc γ est borné. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

L'inégalité des accroissements finis assure alors que f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

Ex 13 Soit f l'application définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- Déterminer les limites possibles de u .
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En déduire la convergence de u . On note α sa limite.
- Donner une valeur approchée de sa limite α à 10^{-2} près .

Ex 14 Soient $f : ([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ telle que f, f' et f'' sont définies et continues sur $[a, b]$ et f'' est dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

Indication : on introduira $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

Soit $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on va choisir de sorte que g vérifie les hypothèses de théorème de Rolle. g est de classe C^1 sur $[a, b]$ et deux-fois dérivable sur $]a, b[$.

Et, $\forall x \in [a, b], g'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(a)) - \frac{(x-a)}{2} f''(x) - 3A(x-a)^2$ et $\forall x \in]a, b[, g''(x) = \frac{(x-a)}{2} (f'''(x) - 12A)$. Donc, $g'(a) = g'(b) = 0$.

Choisissons A tel que $g(b) = 0$. Donc, prenons $A = \frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3}$. Alors, appliquons le théorème de Rolle à g : il existe donc un réel $d \in]a, b[$ tel que : $g'(d) = 0$ i.e. $g'(d) = \frac{1}{2}(f'(d) - f'(a)) - \frac{(d-a)}{2} f''(d) - 3A(d-a)^2 = 0$. Comme f' est continue sur $[a, d]$ et dérivable sur

$]a, d[$ et $g'(d) = g'(a) = 0$, il existe un réel $c \in]a, d[$ tel que : $g''(c) = 0$ et donc $\frac{(c-a)}{2} (f'''(c) - 12A) = 0$ et finalement, $A = \frac{f'''(c)}{12}$. Ainsi,

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3} = \frac{f'''(c)}{12} \text{ et j'en conclus que : } f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}.$$

Ex 15 Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.

Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a, b[$, à valeurs réelles et telles que :

- u et v sont continues sur $[a, b[$
- u et v sont dérivables sur $]a, b[$
- $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$.

DL7

Montrer en étudiant deux « bonnes » fonctions que : $\forall x \in [a, b[, |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

APPLICATION : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.

- a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.
- b. En déduire, en utilisant 1., que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.
- c. Justifier que : $\exists B \geq A / \forall x \geq B, |f(x)| \leq \varepsilon$.
- d. Qu'en déduit-on sur f ?

Ex 16 Soit $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $f:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$.

- 1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{**}$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall x > A, \left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
- 2) Montrer que $\forall x > 0, \left| \frac{f(x)}{x} - L \right| \leq \left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| \left| \frac{x-A}{x} \right| + \left| \frac{AL+f(A)}{x} \right|$
- 3) En déduire que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{**}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*, \exists A \in]a, +\infty[/ \forall x \geq A, |f'(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Soit $x > A$. $\frac{f(x)}{x} - L = \left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right) \frac{x-A}{x} + \frac{f(A)-AL}{x}$. Alors

$$\left| \frac{f(x)}{x} - L \right| = \left| \left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right) \frac{x-A}{x} + \frac{f(A)-AL}{x} \right| \stackrel{1^{\text{ère}} \text{ I.T}}{\leq} \left| \left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right) \frac{x-A}{x} \right| + \left| \frac{f(A)-AL}{x} \right|$$

$$\left| \frac{f(x)}{x} - L \right| \leq \left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| \left| \frac{x-A}{x} \right| + \left| \frac{f(A)-AL}{x} \right|.$$

Or, d'après l'EAF, il existe $c_{A,x} \in [A, x]$ tel que $\frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c_{x})$.

Alors, $c_x \geq A$ et par conséquent, $\left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| = |f'(c_x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-A}{x} = 1$. Donc, $\exists B > a / \forall x \geq B, \left| \frac{x-A}{x} \right| \leq 2$. Alors $x \geq \max(A, B) \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| * \left| \frac{x-A}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(A)-AL}{x} \right| = 0$. Donc, $\exists C > a / \forall x \geq C, \left| \frac{f(A)-AL}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $x \geq \max(A, B, C) \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L \right| \left| \frac{x-A}{x} \right| + \left| \frac{f(A)-AL}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Et par suite, $\forall x \geq \max(A, B, C), \left| \frac{f(x)}{x} - L \right| \leq \varepsilon$.

J'en déduis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$ et par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{Lx} = 1$ puisque L non nul. Et ainsi, je peux conclure que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

III Taylor-Lagrange

Ex 17 Soit f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} telle que : f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \sup|f|$ et $M_2 = \sup|f''|$.

- 1) Soit x et h deux réels. Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq M_2 \frac{|h|^2}{2}$.
- 2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{**}, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.
- 3) En déduire que f' est bornée sur \mathbb{R} . On note $M_1 = \sup|f'|$.
- 4) Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

1) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f avec $a = x$ et $b = x+h$. f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $|f''|$ est majorée par M_2 (donc f'' est bornée sur \mathbb{R}). Donc T.L assure que $|f(b) - [f(a) + (b-a)f'(a)]| \leq M_2 \frac{|b-a|^2}{2}$ i.e. $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq M_2 \frac{h^2}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{**}$.

$$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \stackrel{\text{car } t \leq |t|}{\leq} |hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \stackrel{2^{\text{ème}} \text{ I.T}}{\leq} |hf'(x) - (f(x+h) - f(x))| \stackrel{\text{car } |t| = |-t|}{\leq} |f(x+h) - f(x) - hf'(x)|.$$

Donc, $|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq M_2 \frac{|h|^2}{2}$. Et par conséquent, $|hf'(x)| = |hf'(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + M_2 \frac{h^2}{2}$.

De plus, $|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq 2M_0$. Il s'en suit que $|hf'(x)| \leq 2M_0 + M_2 \frac{h^2}{2}$ et ainsi, $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ (car $h > 0$).

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$. Comme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ est indépendant de x , tous les réels de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$ sont des majorants de $|f'|$. La fonction f' est donc bornée.

4) Cherchons le plus petit majorant de $|f'|$ qui soit de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$.

Posons $\varphi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$. φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} (car son expression ...). Et $\forall h > 0, \varphi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$.

Donc $\varphi'(h) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} > 0 \Leftrightarrow h^2 > 4\frac{M_0}{M_2} \Leftrightarrow h > 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. Donc φ est décroissante sur $]0, 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}[$ et croissante sur $]2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}, +\infty[$ et

admet donc un minimum en $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ qui vaut $\varphi\left(2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{M_2 \cdot 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}{2} = 2\sqrt{M_0 M_2}$. Comme tous les réels $\varphi(h)$ tels que $h > 0, 2\sqrt{M_0 M_2}$ est un majorant de $|f'|$. Donc $2\sqrt{M_0 M_2}$ est supérieur au plus petit majorant de $|f'|$. Ainsi, $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Ex 18 Soit f et g deux fonctions de classe C^3 impaires et telles que $g^{(3)}(0) \neq 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$.

D'après Taylor-Young, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$. De plus, comme f est impaire, $f(0) = f''(0) = 0$.

Donc, $f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors comme $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0, f(2x) = 2f'(0)x + 8\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et $f(3x) = 3f'(0)x + 9\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

De même, $g(x) = g'(0)x + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3), g(2x) = 2g'(0)x + 8\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et $g(3x) = 3g'(0)x + 9\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors, $\frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} = \frac{f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 2(2f'(0)x + 8\frac{f'''(0)}{6}x^3) + 3f'(0)x + 9\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)}{g'(0)x + \frac{g'''(0)}{6}x^3 - 2(2g'(0)x + 8\frac{g'''(0)}{6}x^3) + 3g'(0)x + 9\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)} = \frac{\frac{4f'''(0)}{3}x^3 + o_0(x^3)}{\frac{4g'''(0)}{3}x^3 + o_0(x^3)} = \frac{f'''(0) + o_0(1)}{g'''(0) + o_0(1)}$.

Alors, comme $g'''(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} \stackrel{\text{pas de FI}}{\stackrel{\text{car } g'''(0) \neq 0}}{\cong} \frac{f'''(0)}{g'''(0)}$.

Ex 19 1. Trouver une valeur approchée rationnelle de $\ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à 10^{-4} près. (Taylor Lagrange)

2. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, \pi], \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ (Taylor reste intégral).

$\ln\left(\frac{11}{10}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right)$.

$g: (t \mapsto \ln(1+t))$ est de classe C^∞ sur $[0, \frac{1}{10}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \frac{1}{10}], g^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $|g^{(n+1)}(t)| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$.

Donc, comme $0 \in [0, +\infty[$, l'inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, \frac{1}{10}], |g(t) - P_{n, \ln(1+t), 0}(t)| \leq n! \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t = \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \ln\left(\frac{11}{10}\right) - P_{n, \ln(1+t), 0}\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} \left|\frac{1}{10}\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^{n+1}}$.

Cherchons le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4}$.

$\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)} < 10^{-4+n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)} < 10^{n-3} \Leftrightarrow -\ln(n+1) < (n-3)\ln(10) \Leftrightarrow (n-3)\ln(10) + \ln(n+1) > 0$.

Posons $h(t) = (t-3)\ln(10) + \ln(t+1)$. h est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall t \geq 0, h'(t) = \ln(10) + \frac{1}{t+1} > 0$.

Donc h est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . De plus, $h(2) < 0 < h(3)$. Donc $n = 3$ est le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4}$.

Alors, $\left| \ln\left(\frac{11}{10}\right) - P_{3, \ln(1+t), 0}\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq \frac{1}{(4+1)10^{3+1}} < 10^{-4}$.

Donc $P_{3, \ln(1+t), 0}\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} = \frac{143}{1500}$ est une valeur approchée rationnelle de $\ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à 10^{-4} près.

Ex 20 Calculer la limite de S, T définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}, T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-3)^k}{(2k+1)!}$

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -P_{n, \ln(1+t), 0}(1)$.

$g: (t \mapsto \ln(1+t))$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, g^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $|g^{(n+1)}(t)| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$.

Donc, comme $0 \in [0, +\infty[$, l'inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, +\infty[, |g(t) - P_{n, \ln(1+t), 0}(t)| \leq n! \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, |g(1) - P_{n, \ln(1+t), 0}(1)| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\ln(2) - S_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, je peux conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(2)$.

2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-3)^k}{(2k+1)!} = P_{2n+1, sh, 0}(-3)$.

sh est de classe C^∞ sur $[-3, 3]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-3, 3], |sh^{(2n+2)}(t)| \leq ch(3)$.

Donc, comme $0 \in [-3, 3]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, +\infty[, |sh(t) - P_{2n+1, sh, 0}(t)| \leq ch(3) \frac{|t|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

En particulier pour $t = -3, \forall n \in \mathbb{N}^*, |sh(-3) - P_{n, sh, 0}(-3)| \leq ch(3) \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |-sh(3) - T_n| \leq ch(3) \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} \stackrel{CC}{\cong} 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$ (puisque $\left(\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $\left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$). Ainsi, je peux conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -sh(3)$.

Ex 21 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |x|$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n .

2) En déduire, en utilisant Taylor-Lagrange, que f est la fonction nulle.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(0)| \leq |0| = 0$ donc $f^{(n)}(0) = 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$. Ainsi, tous les polynômes de Taylor en 0 de f sont nuls.

2) Soit x un réel non nul et S le segment d'extrémités 0 et x . Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur S :

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in S, |f^{(n)}(t)| \leq |t| \leq |x|. \text{ Donc l'I.T.L assure que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in S, \left| f(t) - \underbrace{P_{n,f,0}(t)}_{=0} \right| \leq |x| \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ en particulier}$$

pour $t = x$, j'obtiens $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \stackrel{(**)}{\leq} |x| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or les croissances comparées pour les suites assurent que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{(n)!} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x)| = |f(x)|$. Alors en passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité(**), j'obtiens : $|f(x)| \leq 0$. Ainsi, je peux conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$. Cette égalité étant encore vraie pour $x = 0$, nous pouvons conclure que **f est la fonction nulle.**

Ex 22 Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ telle que : $f'(a) = f'(b) = 0$

1) Justifier que f'' s'annule sur $[a, b]$.

2) Justifier qu'il existe un réel M tel que : pour tout x dans $[a, b], |f''(x)| \leq M$.

3) Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$.

4) On suppose que $b = f(b) = 1$ et $a = f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que : $|f''(c)| \geq 4$.

1) On peut appliquer le théorème de Rolle à f' qui en vérifie toutes les hypothèses. Il existe donc un réel $c \in [a, b]$ tel que $f''(c) = 0$

2) f'' est continue sur le segment $[a, b]$ donc f'' est bornée autrement dit, $|f''|$ est majorée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que : pour tout x dans $[a, b], |f''(x)| \leq M$.

3) Appliquons Taylor-Lagrange entre $x = b$ et $y = \frac{a+b}{2}, \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) + \underbrace{f'(b)}_{=0} \left(\frac{a+b}{2} - b\right) \right| \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2}{2} M$ i.e. $\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$.

Appliquons aussi Taylor-Lagrange entre $x = a$ et $y = \frac{a+b}{2}, \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0} \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \right| \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2}{2} M$ i.e. $\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M$

Alors $|f(b) - f(a)| = \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \leq 2 \frac{(b-a)^2}{8} M = \frac{(b-a)^2}{4} M$.

4)

IV Convexité

Ex 23 Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Etudier la convexité et les points d'inflexion de f .

f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 4\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$. Donc, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors, f est concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et convexe ailleurs et f admet en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ deux points d'inflexion.

Ex 24 Soit $f: [0 + \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x \rightarrow +\infty$.

2. On suppose que L est finie. Montrer que $\psi: (x \mapsto f(x) - Lx)$ est décroissante et admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$.

1. $\varphi: (x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x})$ est croissante puisque f est convexe donc $\varphi(x)$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x \rightarrow +\infty$.

Or, $\forall x > 0, \frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{f(0)}{x}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L + 0 = L$.

Rq : Si L est réel et non nul alors $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

2. On suppose que L est finie. Soit $\psi: (x \mapsto f(x) - Lx)$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ tel que $x < y$.

Alors $\psi(y) - \psi(x) = f(y) - Ly - (f(x) - Lx) = f(y) - f(x) + L(x - y) = \left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - L\right](y - x)$

De plus, $(y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ est croissante puisque f est convexe. Et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(y)}{y} * \frac{y}{y-x} - \frac{f(x)}{y-x}$. Donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = L$. Par conséquent, la

fonction $(y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ tend en croissant vers L . Ainsi, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq L$. Et comme $(y - x) \geq 0, \psi(y) - \psi(x) \leq 0$. J'en déduis que ψ est décroissante. Et par conséquent, ψ a une limite en $+\infty$.

Ex 25 Soit I et J deux intervalles, $f: (I \rightarrow J)$ une fonction convexe et $g: (J \rightarrow \mathbb{R})$ une fonction. Montrer que :

- si g est convexe et croissante alors la composée $g \circ f$ est convexe
- si g est concave et décroissante alors la composée $g \circ f$ est concave.

Je suppose g est convexe et croissante. Soit x et y deux éléments de I et $\lambda \in [0, 1]$.

Comme f est convexe, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

De plus, toutes les images par f sont éléments de J donc $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in J$ et $f(x) \in J$ et $f(y) \in J$. Comme $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ est un réel compris entre $f(x)$ et $f(y)$, deux éléments de l'intervalle J , $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ est aussi dans l'intervalle J

Alors comme g est croissante sur $J, g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$.

Enfin, g étant convexe, $g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y))$.

Même preuve pour g concave et décroissante.

V Des équations fonctionnelles avec hypothèses de dérivabilité

Ex 26 Soit f dérivable sur \mathbb{R} et telle que : pour tous réels x et $y, f(x + y) = f(x^2) + f(y)$. Montrer que f est nulle.

Alors $f(0) = f(0 + 0) = f(0^2) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$.

- Les fonction $u: (x \mapsto f(x + y)), v: (x \mapsto f(x^2))$ et $w: (x \mapsto f(y))$ sont dérivables sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = v'(x) + w'(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+y) = 2xf'(x^2) + 0$. En particulier, pour $x = 0, f'(y) = 0$. Ainsi, $\forall y, f'(y) = 0$. Cela implique que f est constante sur l'intervalle \mathbb{R} et comme $f(0) = 0, f$ est la fonction nulle.

OU BIEN

- Par définition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+y)-f(y)}{x} = f'(y)$. De plus, $\forall x \neq 0, \frac{f(x+y)-f(y)}{x} = \frac{f(x^2)}{x} = \frac{f(x^2)-0}{x^2-0} x$.

Or, f est dérivable en 0 donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = f'(0) \in \mathbb{R}$. Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0} = f'(0) \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+y)-f(y)}{x} = f'(0) \times 0 = 0$. Ainsi, par unicité de la limite $f'(y) = 0$. Cela implique que f est constante sur l'intervalle \mathbb{R} et comme $f(0) = 0, f$ est la fonction nulle.

Ex 27 Montrer qu'il existe une unique fonction f définie, positive et dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0, f'(x) \leq f(x)$.

La fonction nulle est solution.

Soit une fonction f définie, positive et dérivable sur \mathbb{R}^+ et telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0, f'(x) \leq f(x)$.

Posons $g(x) = f(x)e^{-x}$. Alors g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \geq 0, g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} \leq 0$. Donc g est décroissante sur \mathbb{R}^+ et comme $g(0) = 0, g$ est négative sur \mathbb{R}^+ . Et par conséquent, f est négative sur \mathbb{R}^+ . Comme, de plus, f est positive sur \mathbb{R}^+, f est nulle sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi la fonction définie et nulle sur \mathbb{R}^+ est la seule fonction définie, positive et dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0, f'(x) \leq f(x)$.

Ex 28 Déterminer toutes les fonctions définies sur \mathbb{R}^{++} , dérivables, et vérifiant : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, f(xy) = f(x) + f(y)$.

La fonction nulle est solution.

Soit f une solution. Alors f est définie sur \mathbb{R}^{++} , dérivable et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ (**).

Alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$. Donc $f(1) = 0$.

Fixons $y \in \mathbb{R}^{++}$.

Par définition, $\lim_{t \rightarrow y} \frac{f(t)-f(y)}{t-y} = f'(y)$. Donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(xy)-f(y)}{xy-y} = f'(y).$$

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}, \frac{f(xy)-f(y)}{xy-y} \stackrel{\text{par (**)}}{=} \frac{f(x)}{(x-1)y} \stackrel{\text{car } f(1)=0}{=} \frac{1}{y} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(xy)-f(y)}{xy-y} = \frac{1}{y} f'(1).$$

Alors, par unicité de la limite, $f'(y) = \frac{1}{y} f'(1) = \frac{a}{y}$ où $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, il

existe une constante réelle a telle que : $\forall y > 0, f'(y) = \frac{a}{y}$.

J'en déduis qu'il existe a et b deux constantes réelles telles que : $\forall y > 0, f(y) = a \ln(y) + b$. Mais comme $f(1) = 0$, nécessairement $b = 0$. J'en conclus que : $f(y) = a \ln(y)$.

Donc les solutions de notre problème sont nécessairement de la forme $(x \mapsto a \ln(x))$ où a constante réelle.

Réciproquement : toutes ces fonctions de la forme $(x \mapsto a \ln(x))$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur \mathbb{R}^{++} . De plus, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, a \ln(xy) = a(\ln(x) + \ln(y)) = a \ln(x) + a \ln(y)$.

Donc toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto a \ln(x))$ où a constante réelle sont solutions. J'en conclus que ce sont exactement les solutions.

Ex 29 Déterminer toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)f(t)dt$.

Ex 30 Déterminer toutes les fonctions dérivables en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$.

L'exponentielle et les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont solutions.

Soit f une solution. Alors f est dérivable donc continue en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$.

Alors $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$. Donc, $u : (x \mapsto f(x+y))$ et $v : (x \mapsto f(x)f(y))$ sont dérivables sur \mathbb{R} et $\forall x, u'(x) = v'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(x)f(y)$. En particulier pour $x = 0, f'(y) = f'(0)f(y)$. Ainsi, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall y, f'(y) = af(y)$.

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène : $z' - az = 0$

Alors il existe une constante k réelle telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{ax}$. Comme $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1, k = 0$ ou $k = 1$.

Ainsi, les solutions de notre pble sont nécessairement de la forme $(x \mapsto 0)$ ou $(x \mapsto e^{ax})$ tq $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement : la fonction nulle est solution mais toutes ces fonctions de la forme $(x \mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur \mathbb{R} . De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay}$

Donc toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont solutions. J'en conclus que la fonction nulle et les fonctions de la forme $(x \mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont exactement les solutions.

Ex 31 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0$. En déduire que $f = \cos$.

