

POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Dans tout le chapitre, n, p, q, m, r et s désignent des entiers naturels et r et s non nuls.

K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les éléments de K sont encore et encore appelés des scalaires.

Introduction : A LIRE EN AUTONOMIE ...

- Soit f une fonction polynomiale réelle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p$

où p entier naturel et a_0, \dots, a_p réels appelés coefficients de f (a_k étant le coefficient de rang k). Alors,

ou bien tous les a_k sont nuls et f est la fonction nulle et a pour degré $-\infty$.

ou bien l'un des a_k est non nul et le degré de f noté $\deg(f)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Deux fonctions polynomiales sont égales lorsqu'elles ont les mêmes coefficients. Une racine réelle (resp. complexe) de f est un réel (resp. complexe) α tel que $f(\alpha) = 0$. Lorsque α est racine de f , on peut factoriser $f(x)$ par $(x - \alpha)$.

- Soit f et g deux fonctions polynomiales telles que :

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p = \sum_{k=0}^p a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_q t^q = \sum_{k=0}^q b_k t^k$ où p et q entiers naturels et $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$ réels avec a_p et b_q non nuls. Donc $\deg(f) = p$ et $\deg(g) = q$.

Quitte à ajouter des termes nuls dans l'expression de f ou celle de g , on peut écrire :

$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ où $m = \max(p, q)$.

Alors,

$(f + g)(t) = f(t) + g(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_m + b_m)t^m = \sum_{k=0}^m (a_k + b_k)t^k$

$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + \dots + (a_p b_q)t^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} c_k t^k$

$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. De plus, $\deg(f + g) \leq m = \max(p, q)$ car je ne sais pas si $a_m + b_m = 0$ et $\deg(fg) = p + q$ car $a_p b_q \neq 0$.

On va ci-dessous définir un ensemble plus abstrait et plus large que l'ensemble des fonctions polynomiales vérifiant quasiment les mêmes propriétés qui va nous permettre de travailler avec des polynômes de matrices, d'endomorphismes...

Pour cela, on va définir un polynôme par la suite de ses coefficients.

I Généralités

1. Définitions et opérations

1 Def : Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang (dite presque nulle), c'est donc un objet de la forme $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ où $n \in \mathbb{N}$, a_0, a_1, \dots, a_n sont des éléments de K et sont appelés les coefficients de P .

2NB : D'après l'égalité de deux suites, **deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.**

On définit trois opérations sur les polynômes à coefficients dans K : une addition entre polynômes, une multiplication d'un polynôme par un scalaire et une multiplication entre polynômes.

3 Def : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans K . Soit $\alpha \in K$.

On pose $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, 0, 0, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n > p, a_n = 0$

et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_q, 0, 0, \dots) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n > q, b_n = 0$.

$P + Q = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m, 0, 0, \dots)$ où $m = \max(p, q)$.

$\lambda P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_p, 0, 0, \dots) = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$P \times Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.

Prop : $P + Q, \lambda P$ et $P \times Q$ ainsi définis sont des polynômes à coefficients dans K .

4 Def : Soit P un polynôme à coefficients dans K . Par convention, $P^0 = (1, 0, 0, \dots)$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, P^m = P^{m-1} \times P$.

4bisNB : cela revient à dire que $\forall m \in \mathbb{N}^*, P^m = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_{m \text{ fois}}$.

2. Nouvelle écriture d'un polynôme-Indéterminée.

5 Déf.: On note X la suite presque nulle $X = (0,1,0,0, \dots)$. X est appelée l'indéterminée.

X n'est pas un scalaire, c'est un polynôme i.e. une suite presque nulle. On ne doit pas écrire « $X = 2$ » (**HORREUR!**).

6 Théo.: $\forall k \in \mathbb{N}, X^k$ est la suite presque nulle : $X^k = \left(\underset{u_0}{0}, 0, \dots, 0, \underset{u_k}{1}, 0, 0, \dots \right) = (u_n)$ tq $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}$

7 Nouvelle définition d'un polynôme :

Tout polynôme à coefficients dans K s'écrit de manière unique (**) sous la forme :

$$P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k \text{ (forme développée de } P\text{).}$$

où $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de K , appelés coefficients de P et X est l'indéterminée.

P est aussi noté $P(X)$. On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée X et) à coefficients dans K .

7 bis NB :

1. (**) d'après l'égalité de deux polynômes, LES COEFFICIENTS a_k SONT UNIQUES. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^n a_kX^k = \sum_{k=0}^m b_kX^k \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, \max(n, m) \rrbracket, a_k = b_k \text{ (avec la convention : } \forall k \geq n+1, a_k = 0 \text{ et } \forall k \geq m+1, b_k = 0\text{)}.$$

2. $0 = 0X^0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{n-1} + 0X^n$ est le polynôme nul. Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

3. Tout polynôme non nul peut s'écrire sous la forme $P = \sum_{k=0}^p a_kX^k$ tq $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \neq 0$. On a $p = \max\{k/a_k \neq 0\}$.

8 Des Polynômes particuliers :

• Tout polynôme βX^0 (où $\beta \in K$) est noté β et appelé polynôme constant. De même, $a_0X^0 \stackrel{\text{noté}}{=} a_0$.

• Pour tout $\lambda \in K^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda X^k = 0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{k-1} + \lambda X^k + 0X^{k+1}$ est un monôme (polynôme avec un seul coefficient non nul).

9 Déf: A tout polynôme $P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$, on associe la fonction polynomiale \tilde{P} définie par : $\forall t \in K, \tilde{P}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n = \sum_{k=0}^n a_k t^k$.

\tilde{P} est une fonction de K dans K .

10 Attention : P et \tilde{P} sont deux objets de natures mathématiques distinctes : $P \neq \tilde{P}$ mais en pratique \tilde{P} est souvent notée P .

11 Notation : On note souvent E l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

3. Propriétés de l'addition et la multiplication polynomiales et de la multiplication (externe) par un scalaire- Composition.

12 Nouvelles écritures de $P + Q, PQ$ et λP - Combinaison linéaire.

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_kX^k$ deux éléments de $K[X]$ et λ un élément de K . Alors,

• $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k)X^k$

• $\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_kX^k$

• $P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_kX^k$ tel que $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l = \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} a_i b_j}_{\text{somme double}}$

• Pour tous scalaires α et β , $\alpha P + \beta Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (\alpha a_k + \beta b_k)X^k$ est appelé une combinaison linéaire de P et Q et est un élément de $K[X]$.

13 Règles de calcul Soit P, Q et R trois éléments de $K[X]$, μ et γ deux scalaires. Alors,

1. $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2, X^k X^l = X^{k+l}$ et $(X^k)^l = X^{kl}$ noté

2. $(P + Q) + R = P + (Q + R) \stackrel{\text{noté}}{=} P + Q + R$

3. $P + Q = Q + P$

4. $P + 0 = P = 0 + P$

5. $P + (-1)P = 0$

6. $\gamma(P + Q) = \gamma P + \gamma Q$

7. $(\gamma + \mu)P = \gamma P + \mu P$

8. $1P = P$

9. $(\mu\gamma)P = \mu(\gamma P) = \gamma(\mu P) \equiv \gamma\mu P$

10. $(PQ)R = P(QR) \equiv PQR$

11. $PQ = QP$

12. $(P + Q)R = PR + QR$ et $R(P + Q) = RP + RQ$

13. $\gamma(PQ) = P(\gamma Q) = (\gamma P)Q \equiv \gamma P Q$

14. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$ (le produit est intègre)

13 bis Exemple : Développons dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (2X^5 - 3X + 1)(4X^2 - X + 3) = 8X^7 - 2X^6 + 6X^5 - 8X^3 + 7X^2 - 10X + 3$

14 NB: ce sont quasiment les mêmes règles de calcul que dans K sauf que l'inverse d'un polynôme n'existe pas dans $K[X]$ donc on n'écrit pas $\frac{P}{Q}$. Par contre, on pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

15 Généralisation : Soit P_1, P_2, \dots, P_m des éléments de $K[X]$ et β_1, \dots, β_m des éléments de K .

$\prod_{k=1}^m P_k$ est un élément $K[X]$, c'est le produit des polynômes P_1, P_2, \dots, P_m .

$\sum_{k=1}^m \beta_k P_k$ est un élément $K[X]$, c'est une combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2, \dots, P_m .

16 Prop : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation

pour tous polynômes P et Q et tout entier naturel m ,

$$(P + Q)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} P^j Q^{m-j} \text{ et si } m \text{ non nul, } P^m - Q^m = (P - Q) \left(\sum_{j=0}^{m-1} P^j Q^{m-1-j} \right).$$

16bis Exemple : $X^n - 1 = X^n - 1^n = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

17 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et Q deux éléments de $K[X]$. Alors, $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^p a_k Q^k$ est un élément de $K[X]$ appelé composée de Q par P . En particulier, $X^p \circ X^k = (X^k)^p = X^{kp}$.

18 Attention : ne pas confondre $P(Q)$ et PQ .

19 Exemple : $P = X^9 + 4X^3 - 5 = T(X^3) = T \circ Q$ avec $T = X^3 + 4X - 5$ et $Q = X^3$.

20 Exercice : Polynômes pairs ou impairs Montrons que :

- Si $P(X) = P(-X)$ (on dit que P est pair) alors $P = \sum_{k=0}^p a_{2k} X^{2k} = T(X^2) = T \circ X^2$ tq $T = \sum_{k=0}^p a_{2k} X^k$.
- Si $P(X) = -P(-X)$ (P est impair) alors $P = \sum_{k=0}^p a_{2k+1} X^{2k+1} = X \times T(X^2) = X \times (T \circ X^2)$ tq $T = \sum_{k=0}^p a_{2k+1} X^k$.

4. Degré

21 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in K[X]$.

• Si $P = 0$ (i.e. tous les a_k sont nuls) alors par **convention**, le degré de P est $-\infty$. On note $\deg(0) = -\infty$.

• Si $P \neq 0$ (i.e. au moins l'un des a_k est non nul) alors par **définition**, le **degré de P** est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Autrement dit, $\deg(P)$ est l'entier qui vérifie : $a_{\deg(P)} \neq 0$ et $\forall k > \deg(P), a_k = 0$.

$$\text{Alors, } P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } n \geq \deg(P).$$

$a_{\deg(P)}$ est appelé le **coefficient dominant** de P .

$a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$ est appelé le **terme dominant** de P .

• Le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant, ni de terme dominant.

• Un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le coefficient dominant vaut 1.

Si $P \neq 0$ alors

$$\deg(P) = \max \{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$$

22 Rques : 1) Dans la suite du cours, on notera $\text{codom}(P)$ le coefficient dominant de P . Cette notation n'est pas officielle mais pratique ! Si vous souhaitez l'utiliser en devoir, vous devez donc la définir.

2) Quitte à ajouter des termes nuls, tout polynôme P s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq \deg(P)$.

23 Exercice : Soit $P_n = \frac{1}{2i} [(X - i)^n - (X + i)^n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons son degré et son coefficient dominant et vérifions que P_n est à coefficients réels.

24 Théo : Soit P et Q deux éléments de $K[X]$ et β un scalaire.

1. $\deg(\beta P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \beta \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$ et si P et β sont non nuls alors $\text{codom}(\beta P) = \beta \text{codom}(P)$.

2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et si P et Q sont non nuls alors $\text{codom}(PQ) = \text{codom}(P) \text{codom}(Q)$.

3. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. De plus,

Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P + Q) = \text{codom}(Q)$.

Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P) + \text{codom}(Q) \neq 0$ alors $\deg(P + Q) = \deg(Q) = \deg(P)$

$$\text{et } \text{codom}(P + Q) = \text{codom}(P) + \text{codom}(Q).$$

Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{codom}(P) + \text{codom}(Q) = 0$ alors $\deg(P + Q) < \deg(P) = \deg(Q)$.

24 bis Conséquence essentielle : $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$ (le produit est **intègre**).

Autrement dit, le produit de deux polynômes non nuls n'est jamais nul.

25 Généralisation : Soit P_1, P_2, \dots, P_m des éléments de $K[X]$ et β_1, \dots, β_m des éléments de K .

• $\deg(\prod_{k=1}^m P_k) = \sum_{k=1}^m \deg(P_k)$ et si P_1, P_2, \dots, P_m sont tous non nuls, alors $\text{codom}(\prod_{k=1}^m P_k) = \prod_{k=1}^m \text{codom}(P_k)$.

• En particulier, $\forall P \in K[X], \forall m \in \mathbb{N}, \deg(P^m) = m \deg(P)$ et si $P \neq 0$ alors $\text{codom}(P^m) = (\text{codom}(P))^m$.

- $\deg(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_m))$ et si pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\deg P_m > \deg P_k$ et $\beta_m \neq 0$ alors $\deg(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) = \deg P_m$ et $\text{codom}(\sum_{k=1}^m \beta_k P_k) = \beta_m \text{codom}(P_m)$.

26 Exemples importants:

- 1) Les polynômes constants sont les polynômes de degré 0 ou $-\infty$. Un polynôme constant non nul est de degré 0.
- 2) Si $\mu \in K$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\deg((X - \mu)^n) = n$ et si $\beta \in K^*$ alors $\deg(\beta(X - \mu_1)^{n_1}(X - \mu_2)^{n_2} \dots (X - \mu_r)^{n_r}) = \sum_{k=1}^r n_k$. De plus, $\text{codom}((X - \mu)^n) = 1$ et si $\beta \in K^*$ alors $\text{codom}(\beta(X - \mu_1)^{n_1}(X - \mu_2)^{n_2} \dots (X - \mu_r)^{n_r}) = \beta$.

26 Théo Soit P et Q deux polynômes. Alors,

$$\deg(P \circ Q) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P = 0 \text{ ou } (Q = \lambda \text{ constant et } \tilde{P}(\lambda) = 0) \\ 0 & \text{si } Q = \lambda \text{ constant et } \tilde{P}(\lambda) \neq 0 \\ \deg(P) \times \deg(Q) & \text{si } P \text{ non nul et } Q \text{ non constant} \end{cases}$$

Et si P est non nul et Q non constant alors $\text{codom}(P \circ Q) = \text{codom}(P)(\text{codom}(Q))^{\deg(P)}$

27 Exercice : Soit $P \in K[X]$ et $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. Déterminons $\deg(Q)$ en fonction de $\deg(P)$ et le cas échéant $\text{codom}(Q)$.

28 Déf Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindé (sur K) lorsqu'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $K[X]$ de degré 1.

29 Trois écritures sous forme scindée d'un même polynôme : $P = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2) \dots (a_sX + b_s)$

$$\xleftarrow[\substack{\text{en mettant} \\ a_k (\neq 0) \text{ en facteur} \\ \text{dans chaque} \\ \text{parenthèse}}]{P = \beta(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_s)} \xleftarrow[\substack{\text{en regroupant} \\ \text{les facteurs} \\ \text{contenant} \\ \text{le même } \alpha}]{P = \beta(X - \mu_1)^{n_1}(X - \mu_2)^{n_2} \dots (X - \mu_r)^{n_r}}$$

5. l'ensemble $K_n[X]$.

30 Def Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré inférieur ou égal à n .

31 Exemples : $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants et $K_1[X] = \{aX + b / (a, b) \in K^2\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

32 NB : $\forall n, K_0[X] \subset K_n[X] \subset K_{n+1}[X] \subset K[X]$.

33 Théorème Tout polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.

On dira que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

34 Notation : On note souvent E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n . On a les mêmes définitions et les mêmes résultats sur les fonctions polynomiales associées.

II Polynômes dérivés

1. Définition, écriture et degré

35 Déf: Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. Le polynôme dérivé de P est : $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{p-1} (l+1) a_{l+1} X^l & \text{si } \deg P \geq 1 \\ 0 & \text{si } \deg P \leq 0. \text{ (i.e. } P \text{ est constant)} \end{cases}$

On définit alors les polynômes dérivés successifs : par convention, $P^{(0)} = P$ est le polynôme dérivé 0^{ème} de P

Et $\forall j \in \mathbb{N}^*, P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$ est le polynôme dérivé $j^{\text{ème}}$ de P .

36 Conséquence: on retrouve les formules de dérivation des fonctions polynomiales. Autrement dit, pour tout entier naturel j , $\tilde{P}^{(j)} = \tilde{P}^{(j)}$. On a aussi les mêmes règles de calcul :

37 Règles de calcul Soit j un entier naturel, α, β, γ des scalaires et P et Q des polynômes.

$$\begin{aligned} \blacksquare (\beta P + \gamma Q)^{(j)} &= \beta P^{(j)} + \gamma Q^{(j)} & \blacksquare (PQ)^{(j)} &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} P^{(l)} Q^{(j-l)} \quad (\text{Leibniz}) & \blacksquare (\prod_{j=1}^m P_j)' &= \sum_{i=1}^m P_i' \left(\prod_{j \neq i}^m P_j \right) \\ \blacksquare P' &= Q' \times (P' \circ Q) & \blacksquare (P \circ (X + \alpha))^{(j)} &= P^{(j)}(X + \alpha) \end{aligned}$$

38 Prop : Pour tous entiers naturels k et j , $(X^k)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$

39 Prop : Pour tout entier naturel j , si $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, alors $P^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > p \\ \sum_{k=j}^p a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq p \end{cases}$.

40 Prop : Pour tout entier naturel j et tout polynôme P , $\deg(P^{(j)}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } j > \deg(P) \\ \deg(P) - j & \text{si } j \leq \deg(P) \end{cases}$
 et si P est non nul alors et $j \leq \deg(P)$ alors $\text{codom}(P^{(j)}) = \frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!} \text{codom}(P)$ et $P^{(\deg(P))} = \text{cst} = \deg(P)! \text{codom}(P)$.
 (Si P est nul alors tous ses polynômes dérivés son nuls)

41 Théo : Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme. Alors, $\forall j \in \mathbb{N}$, $a_j = \frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}$ et $P = \sum_{k=0}^p \frac{\tilde{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k$

42 Exercice : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré n et $Q = (X^2 + 1)P'' - 6P$. Déterminons le degré de Q et le cas échéant son coefficient dominant. Pour quels polynômes P , a-t-on $Q = 0$?

2. Formule de Taylor pour les polynômes

43 Théo de formule de Taylor pour les polynômes : Soit P un élément de $K_n[X]$ et α un élément de K .

Alors, $P = \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ et cette écriture est l'unique manière d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n$.

On dira que la famille $(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n)$ est une base de $K_n[X]$.

44 Corollaire

- Si deux polynômes ont toutes leurs dérivées successives qui prennent les mêmes valeurs en un scalaire α alors ces polynômes sont égaux.
- Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes les dérivées successives s'annulent en α . Si $\deg(P) \leq n$ et il existe un réel α tq : $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}^{(1)}(\alpha) = \dots = \tilde{P}^{(n)}(\alpha) = 0$ alors P est le polynôme nul.

45 Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons tous les polynômes P de $K_n[X]$ vérifiant : $\tilde{P}'(2) = 2\tilde{P}^{(4)}(2)$.

III Divisibilité

1. Définition

46 Déf Soit A et B deux polynômes de $K[X]$.

On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu'il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A = BQ$.

47 Remarques : • Tout polynôme divise 0, 0 ne divise que 0.

- Les polynômes constants non nuls divisent tout polynôme. Tout polynôme P est divisible par tout polynôme βP tels que $\beta \in K^*$. Ces polynômes βP tels que $\beta \neq 0$ sont appelés les **polynômes associés** de P .
- Si B divise A non nul alors $\deg(B) \leq \deg(A)$.

48 Exemples

- 1) La formule de factorisation assure que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (A, B) \in K[X]^2, A - B$ divise $A^m - B^m$.
- 2) $X^2 + X + 1$ et $X - 1$ divisent $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (d'après la formule de factorisation 16) et $X - j, X - j^2, X - 1$ divisent $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. $X - i$ et $X + i$ divisent $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

49 Déf : Un polynôme P de $K[X]$, non constant, est irréductible lorsque ses seuls diviseurs dans $K[X]$ sont les polynômes constants non nuls et ses polynômes associés i.e. les polynômes de la forme λ ou λP tq $\lambda \in K^*$.

50 Théo : Tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.

51 Déf-prop : Un polynôme P est unitaire lorsque P non nul et $\text{codom}(P) = 1$. Tout polynôme non nul a un polynôme associé unitaire.

2. Théorème de la division euclidienne

52 Théorème de la division euclidienne : Soit A et B deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

53 En pratique. On peut poser la division euclidienne comme ci-dessous (valable quand le degré de A est chiffré)

$$\begin{array}{r}
 2X^5 - 3X^4 + X^2 - 4X + 1 \\
 - (X^5 - \frac{4}{3}X^4 - \frac{4}{3}X^3) \\
 \hline
 -\frac{5}{3}X^4 + \frac{4}{3}X^3 + X^2 - 4X + 1 \\
 - (-\frac{5}{3}X^4 + \frac{10}{9}X^3 + \frac{10}{9}X^2) \\
 \hline
 \frac{2}{9}X^3 - \frac{1}{9}X^2 - 4X + 1 \\
 - (\frac{2}{9}X^3 - \frac{4}{27}X^2 - \frac{4}{27}X) \\
 \hline
 \frac{1}{27}X^2 - \frac{104}{27}X + 1 \\
 - (\frac{1}{27}X^2 - \frac{2}{81}X - \frac{2}{81}) \\
 \hline
 -\frac{310}{81}X + \frac{83}{81}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{r}
 3X^2 - 2X - 2 \\
 \frac{2}{3}X^3 - \frac{5}{9}X^2 + \frac{2}{27}X + \frac{1}{81}
 \end{array}$$

Alors, on a :

$$2X^5 - 3X^4 + X^2 - 4X + 1 = (3X^2 - 2X - 2) \left(\frac{2}{3}X^3 - \frac{5}{9}X^2 + \frac{2}{27}X + \frac{1}{81} \right) + \left(-\frac{310}{81}X + \frac{83}{81} \right)$$

RQUE : Les « bidouilles » effectuées pour intégrer $\frac{P(t)}{Q(t)}$ où P et Q polynomiale et $\deg Q \leq 2$ correspondent en fait à une division euclidienne. Exemple :

$$\frac{t^2+t-1}{3t+2} = \frac{\frac{1}{3}t(3t+2) + \frac{1}{9}(3t+2) - \frac{11}{9}}{3t+2} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{11}{9} \frac{1}{3t+2}$$

$$\begin{array}{r}
 t^2 + t - 1 \quad | \quad 3t + 2 \\
 t^2 + \frac{2}{3}t \quad | \quad \frac{1}{3}t + \frac{1}{9} \\
 \hline
 \frac{1}{3}t - 1 \\
 \frac{1}{3}t + \frac{2}{9} \\
 \hline
 -\frac{11}{9}
 \end{array}$$

Dc, $t^2 + t - 1 = \frac{1}{3}t(3t + 2) + \frac{1}{9}(3t + 2) - \frac{11}{9}$

Alors, $\frac{t^2+t-1}{3t+2} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{11}{9} \frac{1}{3t+2}$.

54 Premier critère de divisibilité :

B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

1. Définition, caractérisation

55 Déf : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est une **racine** de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

56 Rques:

- le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines.
- $X^2 + 1$ n'a pas de racines dans \mathbb{R} mais a deux racines dans \mathbb{C} qui sont i et $-i$.
- Si B est scindé sur K i.e. $B = \beta(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_s)$ avec $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ éléments de K , alors les racines de B dans K sont les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. En effet,

$$\overline{B}(t) = \beta(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \dots (t - \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - \alpha_1 = 0 \\ \text{ou } t - \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \text{ou } t - \alpha_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}.$$

57 En pratique : Trouver les racines complexes de P , c'est résoudre l'équation $\tilde{P}(z) = 0$ avec z inconnue complexe. Les racines réelles de P sont les réels solutions de cette même équation.

ATTENTION : LORSQUE VOUS CHERCHEZ LES RACINES DE P , polynôme non nul, **IL EST INTERDIT D'ECRIRE $P(X) = 0$** car X n'est pas un scalaire et $P(X)$ n'est pas le polynôme nul **Vous devez résoudre $\tilde{P}(z) = 0$**

58 Théorème fondamental : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est racine de P si et ssi $X - \alpha$ divise P .

59 Généralisation : $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont des racines distinctes de P si et ssi il existe un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_s)Q(X)$$

(Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_s)$).

60 Exercice CLASSIQUE : Cherchons le reste R de la division euclidienne de X^n par $B = (X + 1)(X - 2)$.

2. Racines multiples

61 Déf: Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.

α est une racine de P **d'ordre de multiplicité (exactement) m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.

α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins m** lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$.

(Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^m$).

62 Vocabulaire : α n'est pas racine de P lorsque α est racine de P de multiplicité 0.

α est une racine simple (resp. double ou triple) de P lorsque α est une racine de P d'ordre de multiplicité 1 (resp. 2 ou 3).

Lorsque l'on compte les racines d'un polynôme, on peut compter ses racines distinctes ou bien compter ses racines avec leur multiplicité i.e. qu'une racine de P d'ordre de multiplicité m compte pour m racines.

63 Remarque : le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines mais sans ordre de multiplicité exacte.

64 Généralisation Soit $P \in K[X]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires distincts et m_1, \dots, m_s des entiers naturels.

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **exactement** m_1, \dots, m_s **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s} Q(X)$ et $\forall k \in \{1, \dots, s\}, \tilde{Q}(\alpha_k) \neq 0$.

2) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **au moins** m_1, \dots, m_s **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s} Q(X)$.

65 Théorème de caractérisation de la multiplicité d'une racine : Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement) m si et ssi** pour tout $k \in \{0, \dots, m - 1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$ et $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$

2. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins m si et ssi** pour tout $k \in \{0, \dots, m - 1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$.

66 Exercice CLASSIQUE: Déterminons le reste R de la division euclidienne de $P = X^n$ par $A = (X + 1)^2(X - 2)$.

67 Exercice CLASSIQUE: Déterminons tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = P'(0)$.

3. Relation entre le degré et le nombre de racines.

68 Théorème

- Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inférieur ou égal à $\deg(P)$.

- Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

- Seul le polynôme nul a une infinité de racines.

69 BILAN : Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls

Le polynôme nul est le seul polynôme qui a plus de racines que son degré.

Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes ses dérivées qui s'annulent en un scalaire.

70 METHODE : pour prouver que $P = Q$, il suffit de montrer que $T = P - Q$ est le polynôme nul i.e. que T a davantage de racines que son degré

4. Obtention de la forme scindée

71 Prop : Obtention de la forme scindée

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires tous distincts, m_1, \dots, m_s des entiers naturels et P un polynôme **non nul**. Alors,

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ sont des racines distinctes de } P \text{ d'ordre de multiplicités respectives au moins } m_1, \dots, m_s \\ \text{et } \deg(P) = \sum_{k=1}^s m_k \text{ et } \beta = \text{codom}(P) \end{array} \right.$

si et ssi

$$P = \beta (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_s)^{m_s} \text{ (forme scindée de } P)$$

Dans ce cas, P n'a pas d'autres racines et m_1, \dots, m_s sont les multiplicités exactes de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ dans P .

72 Méthode : pour déterminer la forme scindée de P , on cherche les ou des racines complexes de P , ainsi que leur multiplicité respective. On compte ces racines, on compare avec $\deg(P)$ pour les avoir toutes !!

73 Exercice de factorisation sous forme scindée sur \mathbb{C} : Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur \mathbb{C} .

73bis Exercice classique sur les polynômes de Tchebychev. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'il existe un unique polynôme P_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \tilde{P}_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. Puis montrer que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et trouver la forme scindée de P_n .

74 Deuxième critère de divisibilité Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ (ou de $\mathbb{R}[X]$) tel que B scindé sur \mathbb{C} .
 B divise A si et ssi les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

74 bis Exercice CLASSIQUE : Soit $n > 1$. Montrons que $B = (X - 1)^2$ divise $P_n = (n - 1) - nX + X^n$ et déterminons le quotient.

5. Relations coefficients / racines

75 Théorème de calcul de la somme et du produit des racines en fonction des coefficients .

Si P est un polynôme non nul de degré p et scindé tel que : $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k = \beta \underbrace{(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ pas forcément distincts}}$
 alors $\text{codom}(P) = a_p = \beta$ et $\prod_{k=1}^p \alpha_k = (-1)^p \frac{a_0}{a_p}$ et $\sum_{k=1}^p \alpha_k = -\frac{a_{p-1}}{a_p}$.

76 Exemple : les racines nièmes de l'unité sont les racines complexes de $X^n - 1$. On retrouve alors le résultat déjà démontrée suivant : la somme des racines nièmes de l'unité est égale à $-\frac{a_{p-1}}{a_p} = -\frac{0}{1} = 0$.

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Théorème de d'Alembert-Gauß

77 Théo de d'Alembert Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Démo hors programme

78 Exercice très classique : Trouver tous les P polynômes de $K[X]$ tels que $P(X + 1) = P(X)$.

2. Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

79 Théo : Seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

80 Théo : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé sur \mathbb{C} et sa forme scindée est unique.

Autrement dit, pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ non constant, il existe un unique entier naturel non nul s , une unique famille de s nombres complexes distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ et une unique famille de s entiers naturels non nuls m_1, \dots, m_s tels que :
 $P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}$.

81 Conséquence 1 Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égal à son degré.

82 Conséquence 2 Soit P et Q deux polynômes non nuls.

$P = Q$ si et ssi P et Q ont exactement les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et les mêmes coefficients dominants.

83 Deuxième critère de divisibilité Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ (ou de $\mathbb{R}[X]$).

B divise A si et ssi les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

83 bis Exercice CLASSIQUE : Soit $n > 1$. Montrons que $B = (X - 1)^2$ divise $P_n = (n - 1) - nX + X^n$ et déterminons le quotient.

3. Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

84 Théo: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$.

ω est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m si et ssi $\bar{\omega}$ est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m .

85 Exercice CLASSIQUE : Déterminons tous les entiers naturels n non nuls tq : $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $P = (1 + X)^n - X^n - 1$.

Rappel : $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{4i\pi/3} = \bar{j}$
 $1, j$ et j^2 sont les racines 3èmes de l'unité.
 j et j^2 sont les racines de $1 + X + X^2$
 $1 + j + j^2 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = j, j^{3k+2} = j^2$.

86 Conséquences : 1. Tout polynôme non nul à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.

2. Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

87 Théorème de factorisation en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant se factorise de manière unique en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Plus précisément, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ non constant, il existe deux uniques entiers naturels non tous nuls r et s , une unique famille de s nombres réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, une unique famille de r couples de réels $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$ et une unique famille de $s + r$ entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s, p_1, \dots, p_r$ tels que :

$$P = \text{codom}(P) \left[\underbrace{\prod_{k=1}^s (X - \alpha_k)^{m_k}}_{\text{facteurs avec les racines réelles}} \right] \left[\underbrace{\prod_{k=1}^r (X^2 + b_k X + c_k)^{p_k}}_{\text{facteurs avec les racines complexes conjuguées}} \right] \text{ et pour tout } k \in \{1, \dots, r\}, b_k^2 - 4c_k < 0$$

88 NB : $\deg(P) = \sum_{k=1}^s m_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k$.

89 En pratique : comment factoriser un polynôme en produit de facteurs irréductibles

89 bis Dans $\mathbb{C}[X]$: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors la forme scindée de P est l'écriture de P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Pour trouver la forme scindée de P , il suffit :

1) de trouver soit toutes les racines complexes de P en résolvant l'équation $\tilde{P}(z) = 0$ d'inconnue z complexe soit d'en trouver quelques-unes évidentes (mais alors je n'ai peut-être pas toutes les racines de P).

2) d'étudier leur multiplicité dans P :

Ou bien $\deg(P) = \text{nbre de racines distinctes trouvées}$. Alors toutes les racines sont simples et

$$P = \text{codom}(P) \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - \alpha_k).$$

Ou bien $\deg(P) > \text{nbre de racines distinctes trouvées}$. Je cherche alors à savoir quelles sont les racines multiples en calculant $\tilde{P}'(\alpha_k), \tilde{P}''(\alpha_k), \dots$. On compte, à nouveau, les racines mais cette fois avec leur multiplicité et on compare avec $\deg(P)$. Si $\deg(P)$ est égal à ce nombre alors je peux factoriser P sous forme scindée.

Dans le cas où je n'ai trouvé que quelques racines évidentes de P , il faut chercher leur multiplicité exacte dans P , factoriser par le facteur correspondant et chercher les racines de l'autre facteur.....

3) Ecrire la forme scindée sans oublier le coefficient dominant de P .

89 ter Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factorisons sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{X}{n}\right)^n$.

90 Dans $\mathbb{R}[X]$: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Donc $P \in \mathbb{C}[X]$ et P est scindé sur \mathbb{C} . Pour écrire P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il suffit :

1) D'écrire P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ avec la méthode précédente.

2) D'isoler les facteurs avec racines réelles (polynômes de degré 1 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$).

3) De regrouper 2 à 2 les facteurs avec racines complexes conjuguées, afin de faire apparaître les polynômes de degré 2 à

coefficients réels et irréductibles : $(X - \alpha)^p (X - \bar{\alpha})^p = ((X - \alpha)(X - \bar{\alpha}))^p = \underbrace{\left(X^2 - \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2\text{Re}(\alpha)} X + \frac{\alpha\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} \right)^p}_{\text{polynôme irréductible}}$.

Parfois on parvient à factoriser P sans chercher les racines ...comme l'éprouve ce premier exercice

91 Exercice : Factorisons $1 + X^2 + X^4$ dans $\mathbb{R}[X]$.

92 Exercice : Revenons à $P_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{X}{n}\right)^n$. Factorisons P_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

93 Exemple important : Factorisons $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. $X^n - 1$ admet les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité comme racine.

Comme $\deg(X^n - 1) = n$, ces racines sont toutes simples et

$$X^n - 1 = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \text{ factorisation sous forme scindée dans } \mathbb{C}[X].$$

Si n pair alors $X^n - 1$ a deux racines réelles qui sont : 1 (pour $k = 0$) et -1 ($k = \frac{n}{2}$) et

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{\text{de partie} \\ \text{imaginaire} \\ \text{positive}}} \right) \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{\text{de partie} \\ \text{imaginaire} \\ \text{négative}}} \right).$$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) (X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}).$$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \underbrace{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)}_{\varrho(X)}. \text{ Factorisation dans } \mathbb{R}[X] \dots$$

Si n impair alors $X^n - 1$ a une seule racine réelle et

$$X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = (X - 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}).$$

$$X^n - 1 = (X - 1) \underbrace{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)}_{\varrho(X)}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{(x^2+1)^2(x-1)^3(x^2-x+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{ux+v}{x^2+1} + \frac{sx+t}{(x^2+1)^2} + \frac{qx+r}{x^2+x+1}$$

élément simple de 1ère espèce
élément simple de 2ème espèce

99 Théorème (admis)

Si $F = \frac{A}{B}$ est irréductible tel que $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \text{codom}(B) [\prod_{k=1}^s (x - \alpha_k)^{m_k}] [\prod_{k=1}^r (x^2 + b_k x + c_k)^{p_k}]$ alors il existe $\text{deg}(B)$ réels uniques notés $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ tels que :

$\forall x \in D_F, F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\gamma_{lk}}{(x - \alpha_k)^l} \right) + \left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\delta_{lk}x + \beta_{lk}}{(x^2 + b_k x + c_k)^l} \right)$ où E est le quotient de la division euclidienne de A par B (i. e. E est la partie entière de F).

100 En pratique :

- 1) On détermine E et R en effectuant la division euclidienne de A par B ou en « bidouillant » (Cf. méthode pour le calcul intégral).
- 2) On factorise B dans $\mathbb{R}[X]$.
- 3) On cherche les racines communes de R et B et on simplifie $G = R/B$
- 4) On écrit la forme générale de la décomposition en éléments simples de G .
- 5) On détermine les valeurs des coefficients $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ par diverses méthodes :
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha_k} (x - \alpha_k)^{m_k} G(x)$ avec les deux expressions de G .
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x)$ avec les deux expressions de G .
 - c) Attribuer à x une valeur particulière autorisée dans $D_F = D_G$.
 - d) Mettre sur le même dénominateur dans les deux expressions et identifier les numérateurs donc leurs coefficients pour obtenir un système linéaire.

101 APPLICATIONS : calcul intégral, calcul de somme, calcul de dérivées nièmes.

102 Exercice

1. Calculons $I = \int_0^1 \frac{x^7+2}{x^4-1} dx$.
2. Montrer que la suite (S_N) tq $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)}$ converge et déterminer sa limite
3. Soit $f(x) = \frac{x^3}{x^4-2x^2+1}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x \in Df$.