Programme de colle 20

Chap 14 Polynômes à une indéterminée.

I Généralités

- **Définition d'un polynôme comme une suite presque nulle (nulle à partir d'un certain rang).**

Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang.

- **Soit P et $Q, P_1, P_2, \dots, P_s$ des polynômes à coefficients dans $K, \lambda \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.**
  - ✓ **Définition de $\lambda P, P+Q, PQ$.**
  - ✓ **Définition de P^m, d'une combinaison linéaire de P et Q.**

$P^0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P^m = P^{m-1}P = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_{m\ fois}$

Une combinaison linéaire de P et Q est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $aP + bQ$ où a et b éléments de K.

Une combinaison linéaire de $P_1, P_2, \dots, P_s$ est tout polynôme qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{s} a_k P_k$ où $a_1, \dots, a_s$ éléments de K.

- **Définition du polynôme X. Calcul de X^k.**

$X=(0, \underbrace{1}_{rang\ 1}, 0, 0, \dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

$\forall k \in \mathbb{N}, X^k=(\underbrace{0}_{rang\ 0}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{rang\ k}, 0 \dots\dots)$ est appelée l'indéterminée

- **Nouvelle définition (écriture sous forme développée) d'un polynôme :**

Un polynôme à coefficient dans K s'écrit de manière unique sous la forme $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k}_{\substack{combinaison\ linéaire \\ de\ 1, X, X^2, \dots, X^n}}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ éléments de K sont les coefficients de P.

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K.

Deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.

Un polynôme constant est un polynôme de forme aX^0 tq $a \in K$ et est noté tout simplement a.

- **Nouvelle expression $\lambda P, P+Q, PQ, P^m$. Définition de $P \circ Q$. Combinaison linéaire de polynômes.**

Soit P et Q éléments de $K[X]$, $\lambda \in K$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$.

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$.

$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$

- **Propriétés des opérations (règles de calcul) : élément neutre, opposé, associativité, commutativité, distributivité, calcul de $X^k X^p$ et $(X^k)^p$.**
- **Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant et terme dominant lorsqu'ils existent.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$.

Si $P = 0$ alors d°P $= \deg(P) = -\infty$ et P n'a pas de coefficient dominant ni de terme dominant.

Si $P \neq 0$ alors d°P $= \deg(P) = \{k / a_k \neq 0\}$ et $codom(P) = a_{\deg(P)}$ et terme domominant de $P = a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$

- **Formules des degrés de $P+Q, PQ, \beta P$ et $P \circ Q$ et formule sur les coefficients dominants lorsqu'ils existent. Généralisation à un produit ou une combinaison linéaire de m polynômes, à une puissance de polynôme.**

Soit P et Q, $P_1, P_2, \dots, P_s$ éléments de $K[X]$, $\lambda \in K$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P)\ si\ \lambda \neq 0 \\ -\infty\ si\ \lambda = 0 \end{cases}$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}(\lambda P) = \lambda \mathrm{codom}(P)$.

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}(PQ) = \mathrm{codom}(P)\ \mathrm{codom}(Q)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P^k) = k\deg(P)$

$\deg\left(\prod_{j=1}^{s} P_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \deg(P_j)$. Et le cas échéant, $\mathrm{codom}\left(\prod_{j=1}^{s} P_j\right) = \prod_{j=1}^{s} codom(P_j)$.

$\deg\left(\sum_{j=1}^{s} P_j\right) \leq \max(\deg(P_1), \deg(P_2), \dots, \deg(P_s))$. Et si l'un des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_s$ a un degré strictement supérieur à tous les autres alors $\deg\left(\sum_{j=1}^{s} P_j\right)$ est égal au degré de ce polynôme et $\mathrm{codom}\left(\sum_{j=1}^{s} P_j\right)$ est égal au coefficient dominant de ce polynôme.

$$\deg(P \circ Q) = \begin{cases} -\infty\ si\ P\ nul\ ou\ (Q = \lambda\ constant\ et\ P(\lambda) = 0) \\ 0\ si\ Q = \lambda\ constant\ et\ P(\lambda) \neq 0 \\ \deg(Q) \times \deg(P)\ si\ P\ non\ nul\ et\ Q\ non\ constant \end{cases}$$

- **Intégrité du produit polynomial**

Soit P et Q éléments de $K[X]$. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.

- **Ensemble note $K_n[X]$**

Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré <u>inférieur ou égal</u> à n.

Un polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ i.e. comme combinaison linéaire des X^k tq $k \in [\![0, n]\!]$

II Polynômes dérivés

- **Définition des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\ \text{si}\ \deg(P) \geq 1. \\ 0\ \ si\ \deg(P) \leq 0.\ (i.e.\ P\ est\ constant) \end{cases}$. $P^{(0)} = P$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*, P^{(j)} = \left(P^{(j-1)}\right)'$ est le polynôme dérivé $j^{ème}$ de P.

- **Opération sur les polynômes dérivés (dérivés d'une somme, produit, composée)**

Leibniz $(PQ)^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P^{(j)} Q^{(N-j)}$

Composée particulière $(P \circ (X+a))^{(N)} = P^{(j)}(X+a)$

Dérivée première d'un produit fini de polynômes $\left(\prod_{k=1}^{S} P_k\right)' = \sum_{j=0}^{S} P_j' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{S} P_k$

- **Expression et degré des polynômes dérivés successifs.**

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. $\forall j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)}=\begin{cases} \sum_{k=j}^{p} \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j} \text{ si } \deg(P) \geq j. \\ 0 \quad si \deg(P)<j. (\, i.e. P \, est \, constant) \end{cases}$ et $a_j=\frac{P^{(j)}(0)}{j!}$.

- **Formule de Taylor (existence et unicité du développement de Taylor en scalaire α).**

Si $P \in K_n[X]$ et $\alpha \in K$ alors P s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des $(X-\alpha)^k$ tq $k \in [\![0,n]\!]$ et $l'écritue$ est $P=\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(X-\alpha)^k$.

III Divisibilité

- **Définition de « B divise A » ou B est un diviseur de A.**

Soit A et B deux polynômes de $K[X]$. On dit que B divise A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A=BQ$.

- **Définition d'un polynôme associé, d'un polynôme irréductible. Exemple des polynômes de degré 1.**
- **Théorème de la division euclidienne.**

Soit A et B deux éléments $K[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A=BQ+R$ **et** $degR<degB$.

- **Caractérisation de « B divise A » par le reste de la division euclidienne de A par B.**

B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

- **Définition d'une racine. Théorème fondamental de caractérisation d'une racine(sans multiplicité) par factorisation.**

Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$.
α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha)=0$.
α est racine de P si et ssi $X-\alpha$ divise P.

- **Racines multiples : définition et caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.**

Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité (exactement)** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X)=(X-\alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.
α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X)=(X-\alpha)^m Q(X)$.
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0,..,m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha)=0$ et $\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$
α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0,..,m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha)=0$

- **Relation entre le degré et le nombre de racines : nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, caractérisation du polynôme nul par son nombre de racines.**

•Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inferieur ou égal à $\deg(P)$.
•Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

- **Obtention de la forme scindée d'un polynôme.**

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des scalaires tous distincts, $\beta \in K^*, m_1, .., m_s$ des entiers naturels non nuls et P un polynôme non nul. Alors ,

$$\underbrace{P=\beta(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \ldots (X-\alpha_s)^{m_s}}_{forme\ scindée\ de\ P} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_s \ sont\ des\ racines\ distinctes\ de\ P\ d'ordre\ de\ multiplicités\ respectives\ au\ moins\ m_1, .., m_s \\ et \quad deg(P)=\sum_{k=1}^{s} m_k \quad et\ \beta=codom(P) \end{cases}$$

Dans ce cas, P n'a pas d'autres racines et $m_1, .., m_s$ sont les multiplicités exactes de $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ $dans$ P.

- **Critère de divisibilité.**

Soit A et B deux polynômes tq B non nul et scindé sur $\mathbb{C}$.
B divise A **si et ssi** les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

- **Relation coefficients-Racines**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $n=\deg(P) \geq 1$ et $P=a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \ldots (X-\alpha_n)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Alors $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}_{\substack{somme\ des\ racines \\ de\ P\ pas\ forcément\ disctinctes}} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\underbrace{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}_{\substack{produit\ des\ racines \\ de\ P}} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Dans ℂ[X]

- **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Tout polynôme non constant de ℂ[X] admet au moins une racine complexe.

- **Polynômes irréductibles dans ℂ[X]**

Les polynômes irréductibles de ℂ[X] sont les polynômes de degré 1.

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans ℂ[X]**

Tout polynôme non constant de ℂ[X] est scindé dans ℂ[X], admet un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égale à son degré.

2. Dans ℝ[X]

- **Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. α est racine de P d'ordre de multiplicité m sietssi $\bar{\alpha}$ est racine de P d'ordre de multiplicité m.
Conséquences :
Un polynôme à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.
Tout polynôme de degré impair et à coefficients réels a au moins une racine réelle.

- **Polynômes irréductibles dans ℝ[X]**

Les polynômes irréductibles de ℝ[X] sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré deux à discriminant strictement négatif

- **Factorisation en produit de polynômes irréductibles dans ℝ[X]**

Tout polynôme non constant de ℝ[X] s'écrit de manière unique sous la forme

$P = codom(P)\left[\underbrace{\underbrace{\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}}_{facteurs\ avec\ les\ racines\ réelles\ de\ P}}_{n'existe\ pas\ si\ P\ n'a\ pas\ de\ racines\ réelles}\right]\left[\underbrace{\underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X^2+b_kX+c_k)^{p_k}}_{facteurs\ avec\ les\ racines\ complexes\ conjuguées\ de\ P}}_{n'existe\ pas\ si\ P\ n'a\ que\ de\ racines\ réelles}\right]$ avec $\forall k, \alpha_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, m_k \in \mathbb{N}^*, p_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}, {b_k}^2 - 4c_k < 0$

BILAN :
Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls
Le polynôme nul est le seul polynôme qui a strictement plus de racines que son degré.
Le polynôme nul est le seul polynôme qui a une infinité de racines.
Deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.
sietssi ils ont les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et le même coefficient dominant.
sietssi leur différence a strictement plus de racines que son degré.

Soit $A\ et\ B$ deux polynômes de $K[X]$ tq B non constant.
B divise A **si et ssi** il existe $Q \in K[X]$ tel que $A = BQ$
si et ssi le reste de la division euclidienne de $A\ par\ B$ est nul
si et ssi chaque racine de B est racine de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B.

V Décompositions en éléments simples d'une fonction rationnelle

Soit $F(t) = \frac{\tilde{A}(t)}{\tilde{B}(t)}$ telle que A et B polynômes à coefficients réels.

- **Représentant irréductible d'une fonction rationnelle**

$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$ est un représentant irréductible de F lorsque A et B n'ont aucune racine commune.

- **Partie entière d'une fonction rationnelle**

La partie entière de F est le quotient de la division euclidienne de $\tilde{A}\ par\ \tilde{B}$.

- **Décomposition en éléments simples**

Si $F = \frac{A}{B}$ est irréductible et la factorisation de B en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}$[X] est $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = codom(B)[\prod_{k=1}^{s}(x-\alpha_k)^{m_k}][\prod_{k=1}^{r}(x^2 + b_kx + c_k)^{p_k}]$ alors il existe $deg(B)$ réels uniques notés $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ tels que :
$\forall x \in D_F,\ F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\gamma_{lk}}{(x-\alpha_k)^l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p_k}\frac{\delta_{lk}X+\beta_{lk}}{(x^2+b_kx+c_k)^l}\right)$ où E est la partie entière de F.

- **Applications à des cas simples (pôles doubles réels et pôles simples complexes) :**
  - ✓ **Calcul intégral**
  - ✓ **Calcul de somme**
  - ✓ **Dérivées nièmes**

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.
Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :
Le « colleur » peut demander
OU BIEN un énoncé quelconque parmi ceux listés ci-dessus avec la nature des objets qui apparaissent dans cet énoncé et éventuellement un exemple* de votre création pour illustrer ce résultat (et donner du sens à ce résultat…)
OU BIEN un des énoncés ci-dessous avec sa démonstration :

QDC1: Formule de Taylor en 0 et en α pour les polynômes.
QDC2: Caractérisation d'une racine (sans multiplicité) par factorisation.
QDC3: Caractérisation d'une racine multiple par les polynômes dérivés.
QDC4: Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels.
QDC5: Relation coefficient-racine (somme et produit des racines d'un polynôme scindé).

***Exemples d' « exemple » :**
Relation coefficients-racines .
Prenons $P(X) = 3(X-1)^2(X+2) = 3X^3 - 9X + 6$. On a donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\ et\ \alpha_3 = -2, a_0 = 6, a_1 = -9, a_2 = 0\ et\ a_3 = 3$.
On a, comme l'indique le théorème : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 - 2 = 0 = -\frac{a_2}{a_3}$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 \times 1 \times (-2) = -2 = (-1)^3\frac{6}{3} = (-1)^3\frac{a_0}{a_3}$
Factorisation en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}$[X]
Soit $P(X) = 3X^{10} + X^2 + 1$. P n'ayant pas de racines réelles (car $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) > 0$), la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}$[X] est de la forme : $P(X) = 3(X^2 + bX + c)(X^2 + uX + v)(X^2 + eX + f)(X^2 + rX + s)(X^2 + aX + d)$ où $a, b, c, d, e, f, r, s, u, v$ sont des constantes réelles et les discriminants de chaque facteurs de degré sont strictement négatifs.
(…)