CORRIGE TD 15 Polynômes

I Opérations, unicité des coefficients, degré, les polynômes dérivés.

Ex 1 Produit de deux fonctions polynomiales. Montrer que : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_kx^k+o_0(x^n)$ où $a_k=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$.

Le cours assure que $ln(1+x)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k}_{P(x)}+o_0(x^n)$ et $\frac{1}{(1+x)}=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k}_{Q(x)}+o_0(x^n)$ et

$f(x)=somme\ des\ termes\ de\ degré\ inf\ à\ n\ de\ P(x)Q(x)+o_0(x^n)$.

Or, $P(x)Q(x)=\sum_{k=0}^{2n}c_kx^k$ où $c_k=\sum_{j=0}^{k}u_jv_{k-j}$ et $u_j=\begin{cases}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\ si\ j\geq 1\\ 0\ si\ j=0\end{cases}$ et $v_j=(-1)^j$

Donc, $c_0=u_0v_0=0$ et $\forall k\in[\![1,n]\!], c_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(-1)^{k-j}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{j}=(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$.

Ainsi, $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_kx^k+o_0(x^n)$ où $a_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$

Ex 2 Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$ par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on cherchera d'abord le degré d'un tel polynôme.

Le polynôme nul est solution.
Analyse : Supposons qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul tel que : $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.
Posons $d=\deg(P)$.
Alors, $deg\big(P(X^2)\big)=deg\big((X^2+1)P(X)\big)$. Or, $degP\times deg(X^2)=2d$ et $deg\big((X^2+1)P(X)\big)=deg\big((X^2+1)\big)+\deg(P)=2+d$.
Donc, $2d=d+2$ donc $d=2$.
Ainsi les solutions non nulles de notre problème sont nécessairement de la forme $P(X)=aX^2+bX+c$ tels que a, b et c $réels$ et $a=0$.
Ces polynômes sont-ils tous solution ? Prenons $P(X)=aX^2+bX+c$ tels que a, b et c $réels$ et $a=0$. Alors,
$P(X^2)=(X^2+1)P(X) \Leftrightarrow aX^4+bX^2+c=(X^2+1)(aX^2+bX+c) \Leftrightarrow -bX^3+(b-c-a)X^2+bX=0 \Leftrightarrow \begin{cases}b-c-a=0\\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}c=-a\\ b=0\end{cases}$.
Ainsi, les solutions de notre problème sont tous les polynômes de la forme $a(X^2-1)tq\ a\in\mathbb{R}$ (pour $a=0$, on retrouve le polynôme nul).

Ex 2 bis Solutions polynomiales d'une équa. diff.
1. Chercher toutes les fonctions polynomiales solutions de l'équation différentielle (E): $(x^2+1)y''-2y=-x$.
2. Déterminer une solution polynomiale φ non nulle de (EH).
3. En déduire toutes les solutions de (E) en les cherchant sous la forme $y(x)=k(x)\varphi(x)$ (c'est ce qu'on appelle la méthode de variation de la constante pour les équa.diff. d'ordre 2 à coefficients non constants)

1. Soit P une fonction polynomiale réelle.

1er cas $P=0$. Alors P n'est pas solution de (E).
2ème cas $P\neq 0$. Posons $d=\deg(P)$. Alors $\deg(x^2+1)\,P''(x)=\deg(x^2+1)+\deg\big(P''(x)\big)=\begin{cases}2+d-2=d\ si\ d\geq 2\\ -\infty\ si\ d<2\end{cases}$.
Et le cas échéant, $\mathrm{codom}(x^2+1)\,P''(x)=codom(x^2+1)codom(P'')=d(d-1)codom(P)$.
1er ss-cas si $d<2$. Alors $\deg\big((x^2+1)P''(x)-2P(x)\big)=\deg\big(P(x)\big)=d$. Donc pour que P soit solution de (E) il faut que $\mathrm{d}=\deg\big((x^2+1)P''(x)-2P(x)\big)=\deg(-x)=1$. Posons $P(x)=ax+b$.
Alors $\forall x,(x^2+1)P''(x)-2P(x)=-x \Leftrightarrow \forall x,-2(ax+b)=-x \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}et\ b=0$. Donc P: $\left(x\mapsto\frac{1}{2}x\right)$ est la seule solution polynomiale de degré inf à 1.
2er ss-cas si $d\geq 2$. Alors $d(d-1)codom(P)-2codom(P)=(d^2-d-2)codom(P)=(d-2)(d+1)codom(P)$.
Donc si $d=2$ alors $\deg\big((x^2+1)P''(x)-2P(x)\big)<d=2$. Posons $P(x)=ax^2+bx+c$.
Alors $\forall x,(x^2+1)P''(x)-2P(x)=-x \Leftrightarrow \forall x,(x^2+1)(2a)-2(ax^2+bx+c)=-x \Leftrightarrow 2a-2c=0 et-2b=-1$.
$\Leftrightarrow a=c\ et\ b=\frac{1}{2}$. Donc P: $\left(x\mapsto a(x^2+1)+\frac{1}{2}x\right)$ $tq\ a\neq 0$ sont les solutions polynomiales de degré 2 .
Donc si $d>2$ alors $\deg\big((x^2+1)P''(x)\big)=\deg\big(-2P(x)\big)$ $mais$ $\mathrm{codom}\big((x^2+1)P''(x)\big)\neq\mathrm{codom}\big(2P(x)\big)$ .Donc, $\deg\big((x^2+1)P''(x)-2P(x)\big)=\deg(P)>2$. Par conséquent, $\forall x,(x^2+1)P''(x)-2P(x)\neq -x$. Donc, (E) n'a pas de solution polynomiale de degré supérieur à 3.
Ainsi, les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions $\left(x\mapsto a(x^2+1)+\frac{1}{2}x\right)$ $tq\ a\in\mathbb{R}$.

2. $\varphi:(x\mapsto x^2+1)$ est une solution polynomiale non nulle de (EH) .

En effet, $\forall x, x^2+1=\left(\underbrace{x^2+1+\frac{x}{2}}_{=f_1(x)}\right)-\underbrace{\frac{x}{2}}_{=f_2(x)}$ donc φ est la différence de deux solutions f_1 et f_2 de (E). Or la différence de deux solutions d'une équa. linéaire est une toujours une solution de l'équation homogène associée.

3. Comme $\left(x\mapsto\frac{x}{2}\right)$ est une solution particulière de (E). Il reste à déterminer toutes les solutions de (EH).

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et k: $\left(x\mapsto\frac{f(x)}{x^2+1}\right)$. Alors k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=k(x)(x^2+1), f'(x)=k'(x)(x^2+1)+2xk(x), f''(x)=k''(x)(x^2+1)+2xk'(x)+2k(x)$. Donc,
f solution de $(EH) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},(x^2+1)[\,k''(x)(x^2+1)+2xk'(x)+2k(x)]-2\,k(x)(x^2+1)=0$
$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},(x^2+1)[\,k''(x)(x^2+1)+2xk'(x)]=-x \Leftrightarrow k'est\ solution\ de\ l'edl1\ (EH1):(x^2+1)y'+2xy=0$.
■Résolution de $(EH1)$:
Posons $a(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. Alors $A:(x\mapsto\ln(x^2+1))$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$ et $e^{-A(x)}=e^{-\ln(x^2+1)}=e^{\ln\frac{1}{(x^2+1)}}=\frac{1}{(x^2+1)}$.

Donc les solutions de $(EH1)$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{c}{1+x^2}\right)$ où c constante réelle.

■Retour à (EH):
f solution de $(EH) \Leftrightarrow$ *il existe une constante* c telle que $\forall x, k'(x) = \frac{c}{1+x^2}$
$\Leftrightarrow$ *il existe deux constantes réelles* c *et* d telle que $\forall x, k(x) = cArctan(x) + d$.
$\Leftrightarrow$ *il existe deux constantes réelles* c *et* d telle que $\forall x, f(x) = cArctan(x)(1+x^2) + d(1+x^2)$.
Ainsi, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto cArctan(x)(1+x^2) + d(1+x^2) + \frac{x}{2}\right)$ tq c et d constantes réelles.

Ex 3 Degré et unicité des coefficients
Soit $f(P) = (X^2+X)P''(X) + (2X+1)P'(X)$.
1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ *et* tel qu'il existe λ un réel vérifiant $f(P) = \lambda P$.
On note $d = \deg(P)$ *et* $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ tq $a_d \neq 0$.
a) Démontrer que : $\lambda = d(d+1)$ *et* $\forall k \in \{0,1,\dots,d-1\}, a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k$.
b) En déduire que : $\forall k \in \{0,1,\dots,d\}, , a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$.
c) Démontrer qu'il existe un seul polynôme Q_d unitaire, (i.e. codom$(Q_d) = 1$) tel que $f(Q_d) = d(d+1)Q_d$.

1)Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors il est évident que $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. De plus,
$\deg\left((X^2+X)P''(X)\right) = 2 + degP'' \leq 2 + \deg(P) - 2 = \deg(P)$ *et* $\deg\left((2X+1)P'(X)\right) = 1 + \deg(P') \leq 1 + \deg(P - 1 = \deg(P)$
Donc, $\deg(f(P)) \leq \max(\deg((X^2+X)P''(X), \deg((2X+1)P'(X)) \leq \deg(P)$. Donc, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2) $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \neq 0$ tel que $d = \deg(P)$ donc $a_d \neq 0$.
a) Alors, $P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{d} a_k k X^{k-1} \; si\; d \geq 1 \\ 0 \; si \; d = 0 \end{cases}$ et $P'' = \begin{cases} \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1) X^{k-2} si\; d \geq 2 \\ 0 \; si\; d \leq 1 \end{cases}$.
1er cas : $d = 0$. Alors, $f(P) = 0 = 0P$. Donc $\lambda = 0$.
2ème cas : $d = 1$. Alors, $f(P) = (2X+1)a_d$ *et* $\lambda P = a_d X + a_{d-1}$.
Comme $f(P) = \lambda P$, $(2X+1)a_1 = \lambda a_1 X + \lambda a_0$. Donc $\lambda = 2 = d(d+1)$ *et* $a_1 = \lambda a_0 = d(d+1)a_0$. OK !!
3ème cas : $d \geq 2$. Alors,

$$f(P) = (X^2+X)\left[\sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1)X^{k-2}\right] + (2X+1)\left[\sum_{k=1}^{d} a_k k X^{k-1}\right]$$
$$= \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1)X^k + \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1)X^{k-1} + \sum_{k=1}^{d} 2a_k k X^k + \sum_{k=1}^{d} a_k k X^{k-1}$$
$$= \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1)X^k + \sum_{k=1}^{d-1} a_{k+1} k(k+1)X^k + \sum_{k=1}^{d} 2a_k k X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}(k+1)X^k$$
$$= \sum_{k=2}^{d-1} [a_k k(k-1) + a_{k+1}k(k+1) + 2a_k k + a_{k+1}(k+1)]\, X^k + a_d d(d-1)X^d + 2a_2 X + 2a_1 X + 2d a_d X^d + a_1 + 2a_2 X$$
$$= \sum_{k=2}^{d-1} [a_k k(k+1) + a_{k+1}(k+1)^2]\, X^k + a_d d(d+1)X^d + a_1 + 2(a_1 + 2a_2)X$$

Alors, $f(P) = \lambda P \Leftrightarrow a_1 + 2(a_1+2a_2)X + \sum_{k=2}^{d-1}[a_k k(k+1) + a_{k+1}(k+1)^2]\, X^k + a_d d(d+1)X^d = \sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k$ et les coefficients d'un

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda a_0 \\ 2(a_1 + 2a_2) = \lambda a_1 \\ \forall k \in [\![2,n]\!], a_k k(k+1) + a_{k+1}(k+1)^2 = \lambda a_k \\ a_d d(d+1) = \lambda a_d \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = d(d+1) \; car \; a_d \neq 0, \\ a_1 = d(d+1)a_0 = \frac{(d-0)(d+0+1)}{1^2} a_0 \\ a_2 = \frac{d(d+1)-2}{4} a_1 = \frac{d^2+d-2}{4} a_1 = \frac{(d+2)(d-1)}{2^2} a_1 \\ \forall k \in [\![2,n]\!], \quad a_{k+1} = \frac{(d(d+1)-k(k+1))}{(k+1)^2} a_k = \frac{(d^2-k^2+d-k)}{(k+1)^2} a_k = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \lambda = d(d+1)$ *et* $\forall k \in \{0,1,\dots,d-1\}, a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k$.
Ainsi, $\lambda = d(d+1)$ *et* $\forall k \in \{0,1,\dots,d-1\}, a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k$.

b) $\forall k \in \{0,1,\dots,d\}, \left[a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0\right]_{=H(k)}$.
Initialisation: $a_0 = \frac{(d)!}{(d)!(0!)^2} a_0$. Donc $H(0)$ est vraie.
Propagation: *Soit* $k \in \{0,1,\dots,d-1\}$,.*Je suppose que* $a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$.
Alors, $a_{k+1} = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} a_k = \frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2} \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0 = \frac{(d-k)(d+k+1)(d+k)!}{(d-k-1)!(d-k)(k!)^2(k+1)^2} a_0 = \frac{(d+k+1)!}{(d-k-1)!((k+1)!)^2} a_0$.
Donc $H(k+1)$ est vraie.
CCL : Le théorème de récurrence finie assure que $\forall k \in \{0,1,\dots,d\}, a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$.

c) En raisonnant par équivalence dans la question 2a. , on a, d'une part, montré que les polynômes $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$tel que: $a_0 \in \mathbb{R}^* \;\; \forall k \in \{0,1,\dots,d\}, a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$ sont les polynômes non nuls vérifiant $f(P)=d(d+1)P$. En prenant $a_d = \frac{(2d)!}{(d!)^2} a_0 = 1$ i.e. $a_0 = \frac{1}{\binom{2d}{d}}$, le polynôme $Q_d = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$tq $a_0 = \frac{1}{\binom{2d}{d}}$ et $\forall k \in \{0,1,\dots,d\}, a_k = \frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2} a_0$ est l'unique polynôme unitaire vérifiant $f(Q_d) = d(d+1)Q_d$.

II Taylor-Divisibilité-Racines : nombre de racines, relation coeff-racines.

Ex 4 Formules de Taylor pour les polynômes

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(-1)=1, P'(-1)=-2 \text{ et } P''(-1)=3$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(3)=P'(3)+P''(3)$.

Ex 5

1. Déterminer un polynôme U de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $1+\sqrt{2}$ comme racine.
2. Soit $P=2X^5-4X^4-2X^3+3X^2-5X-4$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par U.
3. En déduire $P\left(1+\sqrt{2}\right)$

Ex 6

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X+1)=P(X)$.
2. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+3)P(X)=XP(X+1)$.

1. Les polynômes P constants vérifient $P(X+1)=P(X)$.

Soit P un polynôme non constant. Imaginons un instant que $P(X+1)=P(X)$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \tilde{P}(z+1)=\tilde{P}(z)$.
P étant non constant , le théorème de d'Alembert Gauss, P admet au moins une racine complexe α. Alors $\tilde{P}(\alpha)=0$. Alors $\tilde{P}(\alpha+1)=\tilde{P}(\alpha)=0$. Donc, $\alpha+1$ est racine de P . Alors $\tilde{P}(\alpha+2)=\tilde{P}(\alpha+1)=0$. Donc, $\alpha+2$ est racine de P . On montrer alors facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha+k$ est racine de P. Ainsi, P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul ce qui contredit le fait que P n'est pas constant. Ainsi, il n'existe pas de polynôme non constant vérifiant $P(X+1)=P(X)$ et les polynômes constants sont les solutions de notre problème.

2. Le polynôme nul est solution et c'est le seul polynôme constant solution car si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(X+3)\lambda = X\lambda \Leftrightarrow 3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.

Analyse : Soit P un polynôme non constant.
Supposons que $XP(X+1)=(X+3)P(X)$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}, z\tilde{P}(z+1)=(z+3)\tilde{P}(z)$.
En particulier pour $z=0$, $0\underbrace{\tilde{P}(1)}_{=0}=(3)\tilde{P}(0) \; et \; ainsi, \tilde{P}(0)=0$.
En particulier pour $z=-1$, $(-1)\underbrace{\tilde{P}(0)}_{=0}=(2)\tilde{P}(-1) \; et \; ainsi, \tilde{P}(-1)=0$.
En particulier pour $z=-2$, $(-2)\underbrace{\tilde{P}(-1)}_{=0}=\tilde{P}(-2) \; et \; ainsi, \tilde{P}(-2)=0$.
Donc 0,-1 et -2 sont racines de P . Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X)=X(X+1)(X+2)Q(X)$.
Alors $XP(X+1)=(X+3)P(X)$ s'écrit $X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X+1) = (X+3)X(X+1)(X+2)Q(X)$. Donc, $X(X+1)(X+2)(X+3)[Q(X+1)-Q(X)]=0$. Comme le polynôme $X(X+1)(X+2)(X+3)$ n'est pas le polynôme nul (puisque 'il est de degré 4) et que la multiplication interne de $\mathbb{R}[X]$ est intègre, je peux affirmer que $Q(X+1)-Q(X)=0 \; i.e. \; Q(X+1)=Q(X)$. Alors d'après ce qui précède, Q est un polynôme constant. Ainsi, $P(X)=\lambda X(X+1)(X+2) \;\; tel\; que \; \lambda \in \mathbb{R}^*$ ($car\; P\; non\; sconstant$)
Donc, les solutions de notre problème sont de la forme $\lambda X(X+1)(X+2) \;\; tel\; que \; \lambda \in \mathbb{R}$ ($en\; ajoutant\; le\; polynôme\; nul$).
Synthèse : Soit $P=\lambda X(X+1)(X+2) \;\; tel\; que\; \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $XP(X+1)=X\lambda(X+1)(X+2)(X+3)=(X+3)P(X)$. Donc P est bien solution.
Ainsi, les solutions de notre problème sont tous les polynôme de la forme $\lambda X(X+1)(X+2) \;\; tq\; \lambda \in \mathbb{R}$.

Ex 7 Déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P de $K[X]$ quelconque par $B=X^2-(a+b)X+ab$ avec $a \; et \; b$ deux scalaires.

Le théorème de la division euclidienne assure qu'il existe deux uniques polynômes R et Q tels que : $P=BQ+R \; et \; \deg(R)<\deg(B)=2$.
Donc $\deg(R)\leq 1$ i.e. il existe deux scalaires u et v tels que $R=uX+v$.
De plus, $B=(X-a)(X-b)$. Donc, $P=\underbrace{(X-a)(X-b)Q}_{T}+uX+v$.

1er cas : $\boldsymbol{a \neq b}$.

Alors, comme a et b sont racines de T, $\begin{cases} P(a)=T(a)+ua+v=ua+v \\ P(b)=T(b)+ub+v=0+ub+v \end{cases}$. Alors, $\begin{cases} P(a)-P(b)=ua-ub & (L_1 \leftarrow L_1-L_2) \\ bP(a)-aP(b)=bv-av & (L_2 \leftarrow bL_1-aL_2) \end{cases}$. Ainsi,

, $\begin{cases} u=\frac{P(a)-P(b)}{a-b} \\ v=\frac{bP(a)-aP(b)}{b-a} \end{cases}$ et $R=\frac{P(a)-P(b)}{a-b}X+\frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

2ème cas : $\boldsymbol{a = b}$.

Alors, a est racine au moins double de T. $\begin{cases} P(a)=T(a)+ua+v=ua+v \\ P'(a)=T'(a)+u=u \end{cases}$. Alors, $\begin{cases} v=P(a)-P'(a)a \\ u=P'(a) \end{cases}$.

Ainsi, $R=P'(a)X+P(a)-P'(a)a$.

Ex 7 bis Soit $n \in \mathbb{N} \; et \; \theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P=(\cos(\theta)X+\sin(\theta))^n$ par $B=X^2+1$.

Ex 8 Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine de $\boldsymbol{P=X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1}$ et déterminer son ordre de multiplicité. Factoriser $\boldsymbol{P}$ par $\boldsymbol{(X-1)^2}$.

Ex 9 Montrer que $\boldsymbol{P = X^4+2X^2+4X-1}$ n'a que des racines simples.

$P = X^4+2X^2+4X-1$ donc $P' = 4X^3+4X+4 = 4(X^3+X+1)$. 0 n'est pas racine de P.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

α est une racine multiple de $P \Leftrightarrow \begin{cases} P(\alpha)=0 \\ P'(\alpha)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^4+2\alpha^2+4\alpha-1\ =0 \\ 4(\alpha^3+\alpha+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^4+2\alpha^2+4\alpha-1\ =0 \\ \alpha^3=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha\times\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-1\ =0 \\ \alpha^3=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2-\alpha+2\alpha^2+4\alpha-1\ =0 \\ \alpha^3=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+3\alpha-1\ =0 \\ \alpha\times\alpha^2=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+3\alpha-1\ =0 \\ \alpha(1-3\alpha)=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha^2+3\alpha-1\ =0 \\ \alpha-3\alpha^2=-\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+3\alpha-1\ =0 \\ 3\alpha^2-2\alpha-1=0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_2\leftarrow L_2-3L_1} \begin{cases} \alpha^2+3\alpha-1\ =0 \\ -11\alpha+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \alpha\ =\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\ ou\ \alpha\ =\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ et\ \alpha=\frac{2}{11} \end{cases}}_{Impossible}.$

Ainsi, P n'a que des racines simples.

Ex 10 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que : $(X-1)^2$divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ et on déterminera alors le quotient.

2. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que X^2+aX+1 divise X^4-X+b.

Ex 10 bis Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X-2)(X-3)$ divise $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-1$
2. Déterminer le quotient. (indication : on écrira $(X-2)=(X-3)+1$ puis $(X-3)=(X-2)-1$).

1. Notons $P=(X-3)^{2n}+(X-2)^n-1$. Alors, $\tilde{P}(2)=(-1)^{2n}+\underbrace{0^n}_{=0\ car\ n\geq1}-1=0\ et\ \tilde{P}(3)=\underbrace{0^n}_{=0\ car\ n\geq1}+(1)^n-1=0$. Donc 2 et 3 sont racines de P . Le cours assure alors que $(X-2)(X-3)$ divise $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-1$.
2. $P=(X-3)^{2n}+\left((X-3)+1\right)^n-1=(X-3)^{2n}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(X-3)^k-1=(X-3)^{2n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(X-3)^k$

$$=(X-3)\left[(X-3)^{2n-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(X-3)^{k-1}\right]=(X-3)\left[(X-3)^{2n-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(X-3)^k\right]$$

$$=(X-3)\left[\left((X-2)-1\right)^{2n-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(X-3)^k\right]$$

$$=(X-3)\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}(X-2)^k(-1)^{2n-1-k}+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\left((X-2)-1\right)^k\right)\right]$$

$$=(X-3)\left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(X-2)^k(-1)^{2n-1-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(X-2)^j(-1)^{k-j}\right)\right)\right]$$

$$=(X-3)\left[\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(X-2)^j(-1)^{2n-1-j}\right)+\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(X-2)^j(-1)^{k-j}\right)\right)\right]$$

$$=(X-3)\left[\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(X-2)^j(-1)^{2n-1-j}\right)+\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^j\right)\right]$$

$$=(X-3)\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\binom{2n-1}{j}(-1)^{2n-1-j}+\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^j\right)+\left(\sum_{j=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(X-2)^j(-1)^{2n-1-j}\right)\right]$$

Or, $\binom{2n-1}{0}(-1)^{2n-1-0}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{0}(-1)^{k-0}=-1-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=-1-\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k-1\right)=-1-((1-1)^n-1)=0.$

Donc,

$$P=(X-3)\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{2n-1}{j}(-1)^{2n-1-j}+\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^j\right)+\left(\sum_{j=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(-1)^{2n-1-j}(X-2)^j\right)\right]$$

$$P=(X-3)(X-2)\left[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{2n-1}{j}(-1)^{2n-1-j}+\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k+1}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)(X-2)^{j-1}\right)+\left(\sum_{j=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{j}(-1)^{2n-1-j}(X-2)^{j-1}\right)}_{le\ quotient\ recherché\ !}\right]$$

Ex 10 Ter *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *et* $a\in\mathbb{R}$. Montrer que $X^2-2Xcosa+1$ divise $X^n sina-Xsin(na)+sin(n-1)a$.

Ex 10 Quater Montrer que X^2+X+1 divise $X^{311}+X^{82}+X^{15}$.

Ex 10 **Quinquies (exercice de cours)** Pour quelles valeurs de n, $B = (X^2+X+1)^2$ divise-t-il $P = (1+X)^n - X^n - 1$

$B = (X^2+X+1)^2 = (X-j)^2(X-j^2)^2$ .Donc,

$B\ divise\ P \iff les\ racines\ de\ B\ sont\ racines\ de\ P\ avec\ une\ multplicité\ dans\ P\ au\ moins\ égale\ à\ celle\ dans\ B$

$\iff j\ et\ j^2(=\bar{j})\ sont\ racines\ de\ P\ de\ multplicité\ au\ moins\ 2$.

$\underbrace{\iff}_{car\ P\ est\ à\ coef\ réels\ (théo\ 84)}$ $j\ \ est\ racine\ de\ P\ de\ multplicité\ au\ moins\ 2$.

$$\iff \tilde{P}(j) = \tilde{P}'(j) = 0 \iff \begin{cases} (1+j)^n - j^n - 1 = 0 \\ n(1+j)^{n-1} - nj^{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (-j^2)^n - j^n - 1 = 0\ (1) \\ (-j^2)^{n-1} - j^{n-1} = 0\ (2) \end{cases}.$$

> *RAPPEL :*
> $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}} = \bar{j}$
> $1, j\ et\ j^2 sont\ les\ racines\ 3èmes\ de\ l'unité.$
> j et j^2 sont les racines de $1+X+X^2$
> $1+j+j^2 = 0$
> $\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = j, j^{3k+2} = j^2,$

Or, $équation(2) \iff (-j^2)^{n-1} - j^{n-1} = 0 \iff (-1)^{n-1}j^{2(n-1)} \quad - j^{n-1} = 0 \iff$
$(-1)^{n-1}j^{(n-1)} - 1 = 0 \iff j^{(n-1)} = (-1)^{n-1}$

$$\iff j^{(n-1)} = \begin{cases} 1\ si\ n\ impair \\ \underbrace{-1\ si\ n\ pair}_{impossible.} \end{cases} \iff n\ impair\ et\ j^{(n-1)} = 1$$

$\iff n\ impair\ et\ n-1\ est\ un\ multiple\ de\ 3$

$\iff il\ existe\ k\ et\ p\ entiers\ naturels\ tq{:}\ n = 2k+1\ et\ n = 3p+1$.

$\iff \exists p \in \mathbb{N} /\ n = 6p+1$.

Soit $p \in \mathbb{N}\ et\ n = 6p+1$. Regardons si l'autre équation (1) est vérifiée:

$(-j^2)^n - j^n - 1 = (-j^2)^{6p+1} - j^{6p+1} - 1 = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^{12p}j^2 - j^{6p}j - 1 \underbrace{=}_{\forall k\in\mathbb{N}, j^{3k}=1} -j^2 - j - 1 = 0.$ OK !

Donc les solutions de notre problème sont tous les entiers de la forme $6p+1\ tels\ que\ p \in \mathbb{N}$.

Ex 11 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}$.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n et justifier votre réponse . Et Calculer $\widetilde{P_n}(1)$.
4. Vérifier que f est solution d'une équa.diff. En déduire que : $P_{n+1}(X) = n(X-1)P_{n-1}(X) + \big((n+2)-X\big)P_n(X)$.
5. En déduire que : pour tout entier $n \geq 1$, $P_n'(X) = -nP_{n-1}(X)$.
6. Démontrer, par l'absurde, que pour tout entier $n \geq 1$, P_n n'a que des racines simples .
7. Soit n et k entiers tels que : $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}\ et\ P_{n-k}$ et en déduire la valeur de $P_n^{(k)}(1)$.
8. En déduire que : $P_n(X) = n!\left(1 + (1-X) + \frac{(1-X)^2}{2!} + \cdots + \frac{(1-X)^n}{n!}\right) = n!\left(\sum_{k=0}^n \frac{(1-X)^k}{k!}\right)$.

1. $Df = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et f est de classe C^∞sur Df puisque son expression n'est constituée que de fonctions de classe C^∞sur leur propre de domaine de définition.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $H(n)$: « il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}$ ».

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x) = f^{(0)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^1} \underbrace{=}_{P_0(X)=1} \frac{e^x\widetilde{P_0}(x)}{(1-x)^{0+1}}$. Donc , $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $H(n)$ vraie. Alors il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}} = e^x\widetilde{P_n}(x)(1-x)^{-n-1}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n+1)}(x) = e^x\big(\widetilde{P_n}(x) + \widetilde{P_n}'(x)\big)(1-x)^{-n-1} + (n+1)e^x\widetilde{P_n}(x)(1-x)^{-n-2}$.

$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x[\left(\widetilde{P_n}(x)+\widetilde{P_n}'(x)\right)(1-x)+(n+1)\widetilde{P_n}(x)]}{(1-x)^{n+2}}$.

Posons $P_{n+1}(X) = \big(P_n(X) + P_n{}'(X)\big)(1-X) + (n+1)P_n(X) = (1-X)P_n{}'(X) + (n+2-X)P_n(X)$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1-x)^{n+2}}$ et P_{n+1} est un polynôme à coefficients réels (puisque produit et somme de polynômes à coeff. réels).

Donc $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

CCL : Le théorème de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie.

3. $\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ P_{n+1}(X) = (1-X)P_n{}'(X) + (n+2-X)P_n(X). \end{cases}$.

- Déterminons le degré et le coefficient dominant de P_n par conjecture et preuve par récurrence.

$P_1(X) = (1-X)P_1{}'(X) + (0+2-X)P_0(X) = 2-X$
$P_2(X) = (1-X)P_1{}'(X) + (1+2-X)P_1(X) = (1-X)(-1) + (3-X)(2-X) = X^2 + 6X + 5$
$P_3(X) = (1-X)P_2{}'(X) + (2+2-X)P_2(X) = (1-X)(2X+6) + (4-X)(X^2+6X+5) = -X^3 + \cdots$.
Donc $\deg(P_0) = 0\ et\ \ \mathrm{codom}(P_0) = 1$
$\deg(P_1) = 1\ et\ \ \mathrm{codom}(P_3) = -1$
$\deg(P_2) = 2\ et\ \ \mathrm{codom}(P_3) = 1$
$\deg(P_3) = 3\ et\ \ \mathrm{codom}(P_3) = -1$

Conjecture : $\underbrace{\deg(P_n) = n\ et\ \ \mathrm{codom}(P_n) = (-1)^n}_{H(n)}$. Montrons par récurrence cette conjecture.

Initialisation : $H(0)$ est vraie

Propagation : Soit n un entier naturel tel que $H(n)$ vraie i.e. $\deg(P_n) = n\ et\ \ \mathrm{codom}(P_n) = (-1)^n$. Montrons $H(n+1)$:

On sait que $P_{n+1}(X) = (1-X)P_n{}'(X) + (n+2-X)P_n(X)$

Or, $deg\big((n+2-X)P_n(X)\big) = deg(n+2-X) + \deg(P_n) = 1+n$

$Et\ deg\big((1-X){P_n}'(X)\big) = deg(1-X) + \deg({P_n}') = 1 + (n-1) = n < deg\big((n+2-X)P_n(X)\big)$.

$Donc$ $\deg\left(P_{n+1}(X) = \deg\big((1-X){P_n}'(X) + (n+2-X)P_n(X)\big) = deg\big((n+2-X)P_n(X)\big) = n+1\right.$

Et deg $codom(P_{n+1}(X)) = \text{codom}((n+2-X)P_n(X)) = \text{codom}(n+2-X)\text{codom}(P_n(X)) = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n\ et\ \text{codom}(P_n) = (-1)^n$.

- Posons $a_n = \widetilde{P_n}(1)$. Alors $a_0 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \widetilde{P_{n+1}}(1) = (1-1)\widetilde{P_n}'(1) + (n+2-1)\widetilde{P_n}(1) = (n+1)\widetilde{P_n}(1) = (n+1)a_n$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\ et\ a_n = \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=0}^{n-1}(k+1) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \widetilde{P_n}(1) = n!$.

4. $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)}{x-1}f(x)$.

Donc f est solution de l'équation différentielle linéaire homogène : $(x-1)y' - (x-2)y = 0$

$\forall x \in Df, \underbrace{\overbrace{(x-1)}^{u(x)}f'(x)}_{\varphi(x)} = \underbrace{\overbrace{(x-2)}^{v(x)}f(x)}_{\omega(x)}$. D'une part, $\varphi\ et\ \theta$ étant C^∞ sur Df et égales, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)} = \theta^{(n)}$. D'autre part,

la formule de Leibniz assure que : $\forall x \in Df, \forall n \in \mathbb{N}$,

$\varphi^{(n)}(x) = \binom{n}{0}u(x)\theta^{(n)}(x) + \binom{n}{1}u'(x)\theta^{(n-1)}(x) + \underbrace{\binom{n}{2}u''(x)\theta^{(n-2)}(x) + \ldots + \binom{n}{n}u^{(n)}(x)\theta^{(0)}(x)}_{=0\ car\ \forall k\geq 2, u^{(k)}=0}$.

$\varphi^{(n)}(x) = (x-1)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$. De même, $\theta^{(n)}(x) = (x-2)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, (x-1)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) = (x-2)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, (x-1)f^{(n+1)}(x) + (n-x+2)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0$.

Donc, $(x-1)\frac{e^x\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1-x)^{n+2}} + (n-x+2)\frac{e^x\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}} - n\frac{e^x\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1-x)^n} = 0$.

Donc, $-\frac{\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1-x)^{n+1}} + (n-x+2)\frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}} - n(1-x)\frac{\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1-x)^{n+1}} = 0$.

Donc, $-\widetilde{P_{n+1}}(x) + (n-x+2)\widetilde{P_n}(x) - n(1-x)\widetilde{P_{n-1}}(x) = 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, -\widetilde{P_{n+1}}(x) + (n-x+2)\widetilde{P_n}(x) - n(1-x)\widetilde{P_{n-1}}(x) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $H(X) = -P_{n+1}(X) + (n-X+2)P_n(X) - n(1-X)P_{n-1}(X)$. D'après ce qui précède, , $\forall x \in Df, \widetilde{H}(x) = 0$. Donc H admet une infinité de racines. J'en déduis que H est le polynôme nul .

J'en conclus que : $P_{n+1}(X) = (n-X+2)P_n(X) - n(1-X)P_{n-1}(X)$.

5. Soit $n \geq 1$.

Je sais que : $P_{n+1}(X) = (1-X){P_n}'(X) + (n+2-X)P_n(X)$ et $P_{n+1}(X) = (n-X+2)P_n(X) - n(1-X)P_{n-1}(X)$.

Alors, $(1-X){P_n}'(X) + (n+2-X)P_n(X) = (n-X+2)P_n(X) - n(1-X)P_{n-1}(X)$.

Donc, $(1-X)[{P_n}'(X) + nP_{n-1}(X)] = 0$.

Comme $(1-X)$ n'est pas le polynôme nul et que le produit polynomial est intègre, nécessairement, ${P_n}'(X) + nP_{n-1}(X) = 0$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n'(X) = -nP_{n-1}(X)$.

6. Soit $n \geq 1$. Supposons que α soit une racine au moins double de P_n. Comme $\widetilde{P_n}(1) \neq 0, \alpha \neq 1$.

Alors $\widetilde{P_n}(\alpha) = \widetilde{P_n}'(\alpha) = 0$. Donc, $\widetilde{P_{n-1}}(\alpha) = -\frac{1}{n}\widetilde{P_n}'(\alpha) = 0$. Donc α est racine de P_{n-1}.

De plus, $\widetilde{P_n}(\alpha) = (1-\alpha)\widetilde{P_{n-1}}'(\alpha) + (n+2-\alpha)\widetilde{P_{n-1}}(\alpha)$;donc, $\widetilde{P_{n-1}}'(\alpha) = \frac{(\widetilde{P_n}(\alpha) - (n+2-\alpha)\widetilde{P_{n-1}}(\alpha))}{(1-\alpha)} = 0$. Donc

α est racine au moins double de P_{n-1}.

Nous venons de prouver que : α est une racine au moins double de $P_n \Longrightarrow \alpha$ est une racine au moins double de P_{n-1}.

Alors, en appliquant cette propriété à P_n, à P_{n-1},..., P_1, on obtient successivement :

α est une racine au moins double de $P_n \Longrightarrow \alpha$ est une racine au moins double de P_{n-1}

$\Longrightarrow$ α est une racine au moins double de $P_{n-2} \Longrightarrow$ α est une racine au moins double de P_{n-3}

.... $\Longrightarrow$ α est une racine au moins double de P_0.

Mais P_0 n'a aucune racine donc P_n ne peut pas avoir de racine double.

7. Soit n et k entiers tels que : $0 \leq k \leq n$. $P_n'(X) = -nP_{n-1}(X)$ donc $P_n''(X) = -nP'_{n-1}(X) = n(n-1)P_{n-2}(X)$. Donc, $P_n'''(X) = n(n-1)P_{n-2}'(X) = -n(n-1)(n-2)P_{n-3}(X)$. Ainsi, par itération (ou récurrence finie sur k), on obtient :

$P_n^{(k)}(X) = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}P_{n-k}(X)$. Par conséquent, $\tilde{P}_n^{(k)}(1) = (-1)^k\tilde{P}_{n-k}(1) = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}(n-k)! = (-1)^k n!$.

8. Appliquons la formule de Taylor en 1 à P_n :

$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\widetilde{P_n^{(k)}}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!}(X-1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-X)^k = n!\left(1 + (1-X) + \frac{(1-X)^2}{2!} + \cdots + \frac{(1-X)^n}{n!}\right)$.

III Relation nombre de racine/degré - Forme scindée - Relations coefficients/racines.

Ex 12 Déterminer tous les polynômes de degré 3 multiple de $X-1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $(X-2)$, par $(X-3)$ et par $(X-4)$ sont égaux.

Analyse : Supposons qu'il existe un tel polynôme P de degré 3 multiple de $X-1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $(X-2)$, par $(X-3)$ et par $(X-4)$ sont égaux.

Alors $P(1) = 0$ *et* il existe Q_2, Q_3, Q_4 *et* R des polynômes tels que $\begin{cases} \deg(R) < \deg(X-2) = \deg(X-3) = \deg(X-4) = 1 \\ P = (X-2)Q_2(X) + R(X) \\ P = (X-3)Q_3(X) + R(X) \\ P = (X-4)Q_4(X) + R(X) \end{cases}$.

Alors, $\deg(R) \leq 0$ *i.e. R est un polynôme constant*. Posons $R = \alpha \in \mathbb{R}$.

Posons $T = P - R = P - \alpha$. Alors $\deg(T) = \deg(P) = 3$ puisque $\deg(P) > \deg(R)$.

De plus, $T = (X-2)Q_2(X) = (X-3)Q_3(X) = (X-4)Q_4(X)$. Donc $2, 3$ et 4 sont racines de T. Comme $deg(T) = 3$, ce sont les seules racines de T et sont simples dans T et T est scindé sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un réel λ non nul tel que : $T = \lambda(X-2)(X-3)(X-4)$ et $P = \lambda(X-2)(X-3)(X-4) + \alpha$.

Alors, $0 = P(1) = \lambda(1-2)(1-3)(1-4) + \alpha = -6\lambda + \alpha$. Donc, $6\lambda = \alpha$.

Ainsi, $P = \lambda(X-2)(X-3)(X-4) + 6\lambda = \lambda[(X-2)(X-3)(X-4) + 6]$.

Synthèse : Soit λ un réel non nul et $P = \lambda[(X-2)(X-3)(X-4) + 6]$.

Alors $deg(P) = 3$ *et* $P(1) = -6\lambda + 6\lambda = 0$ i.e. 1 est racine de P ; par conséquent, $X - 1$ divise P.

De plus, $P = (X-2)[\lambda(X-3)(X-4)] + 6\lambda = (X-3)[\lambda(X-2)(X-4)] + 6\lambda = (X-4)[\lambda(X-2)(X-3)] + 6\lambda$ et $\deg(6\lambda) = 0 < 1 = \deg(X-2) = \deg(X-3) = \deg(X-4)$. Donc 6λ est le reste commun des divisions euclidiennes de P par $(X-2)$, par $(X-3)$, par $(X-4)$.

Ainsi, P est solution.

CCL : Les solutions de notre problème sont tous les polynômes de la forme $\lambda[(X-2)(X-3)(X-4) + 6]$ tel que λ réel non nul .

Ex 12bis Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$ (indication : considérer P').

Analyse : Supposons qu'il existe un tel polynôme P.

Alors $deg(P) = 5$ et il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tq $P + 10 = (X+2)^3 A$ et $P - 10 = (X-2)^3 B$. Donc -2 est racine au moins triple de $P + 10$ et 2 est racine au moins triple de $P - 10$. Alors -2 est racine au moins double de $(P+10)' = P'$ et 2 est racine au moins double de $(P-10)' = P'$. J'ai donc trouvé 4 racines de P' comptées avec leur multiplicité. Comme $\deg(P') = 4$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tq* $P' = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda(X^2-4)^2 = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$ et par suite $P = \lambda\left(\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \beta$ *où* $\beta \in \mathbb{R}$.

De plus, $P(-2) + 10 = 0$ *et* $P(2) - 10 = 0$. Donc , $\begin{cases} \lambda\left(\frac{-32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) + \beta + 10 = 0 \ (L1) \\ \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + \beta - 10 = 0 \ (L2) \end{cases}$. Et par conséquent, $(L1) + (L2)$ donne : $\beta = 0$. Par suite $\lambda\left(\frac{-32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) = -10$ donc $\lambda = -\frac{75}{128}$.

Ainsi, $P = -\frac{75}{128}.\left(\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right)$ est la seule solution possible de notre problème.

Réciproquement : $P = -\frac{75}{128}.\left(\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right)$ est bien degré 5 et vérifie : $P + 10 = (X+2)^3[$

Ex 12Ter Soit P un polynôme de degré 2023 tel que $\tilde{P}(0) = 1$ *et* $\forall k \in [\![1,2023]\!], \tilde{P}(k) = k$. Calculer $\tilde{P}(-1)$.

Posons $T = P - X$.

Comme $degP > deg(X), deg(T) = 2023$. De plus, $\forall k \in [\![1,2023]\!], \tilde{T}(k) = \tilde{P}(k) - k = 0$. Donc, les entiers $1,2,3, \dots, 2022, 2023$ sont 2023 racines distinctes de T. Comme le nombre de racines est égal au degré de T, T est scindé à racines simples et il existe un réel λ non nul tel que : $T = \lambda(X-1)(X-2)\dots(X-2023) = \lambda\prod_{k=1}^{2023}(X-k)$. J'en déduis que : $P = \lambda\prod_{k=1}^{2023}(X-k) + X$. De plus, $1 = \tilde{P}(0)$. Donc,

$1 = \tilde{P}(0) = \lambda\prod_{k=1}^{2023}(-k) + 0 = \lambda(-1)^{2023}\prod_{k=1}^{2023}k = -\lambda(2023)!$. Ainsi, $\lambda = -\frac{1}{(2023)!}$ *et* $P = -\frac{1}{(2023)!}\prod_{k=1}^{2023}(X-k) + X$.

Par conséquent,

$\tilde{P}(-1) = -\frac{1}{(2023)!}\prod_{k=1}^{2023}(-1-k) - 1 = -\frac{(-1)^{2023}}{(2023)!}\prod_{k=1}^{2023}(k+1) - 1 = \frac{1}{(2023)!}\left(\prod_{k=2}^{2024}k\right) - 1 = \frac{1}{2023!}(2024!) - 1 = 2024 - 1 = 2023$.

Ex 13 Soit $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Justifier que P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On ne demande pas de les déterminer. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Calculer $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ *et* $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.
3. En déduire ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2$, ${\alpha_1}^3 + {\alpha_2}^3 + {\alpha_3}^3$, $\frac{{\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{{\alpha_1}^2 + {\alpha_3}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2}{{\alpha_3}^2}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^7 par $X^3 + X^2 + 1$. En déduire ${\alpha_1}^7 + {\alpha_2}^7 + {\alpha_3}^7$

1. Etudions $\tilde{P}$: $\left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3 + t^2 + 1 \end{array}\right)$. $\tilde{P}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{P}'(t) = 3t^2 + 2t = 3t\left(t + \frac{2}{3}\right)$. D'où les variations de $\tilde{P}$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$\tilde{P}\,'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$\tilde{P}\,(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\tilde{P}\,(0) = 1 > 0$, $\tilde{P}\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$. Grâce aux variations et valeurs, et limites de $\tilde{P}$ et la continuité de $\tilde{P}$, $\tilde{P}$ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel α_1 et $\alpha_1 \in]-\infty, -\frac{2}{3}[$.

Comme P est de degré 3, P a trois racines complexes comptées avec leur multiplicité et dont une seule réelle (d'après ce qui précède) . Les deux autres racines sont donc complexes non réelles. Et comme P est à coefficients réels, ces deux racines complexes sont conjuguées. Soit α_2 *et* $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$ ces deux racines complexes non réelles.

2. D'après le cours, en notant $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$ les coefficients de P, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -1$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-1)^3\frac{a_0}{a_3} = -1$.

De plus, $P = X^3 + X^2 + 1 = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) = X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)X + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Donc par unicité des coefficients, je peux identifier ces derniers et j'obtiens $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = 0$.

RQUE : $\alpha_1+\alpha_2+\overline{\alpha_2}=\alpha_1+2Re(\alpha_2)$ et $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_2}=\alpha_1|\alpha_2|^2 et$ $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\overline{\alpha_2}+\alpha_1\overline{\alpha_2}=2\alpha_1Re(\alpha_2)+|\alpha_2|^2$. Donc, $\begin{cases}\alpha_1+2Re(\alpha_2)=-1\\ \alpha_1|\alpha_2|^2=-1\\ 2\alpha_1Re(\alpha_2)+|\alpha_2|^2=0\end{cases}$.

3. Alors, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)=1$.

Puis, $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+{\alpha_1}^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_3^2)$

$$\begin{aligned}&=-1-(\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3))\\&=-1-(\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_3)+\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_2))\\&=-1-(\alpha_1\alpha_2(-1-\alpha_3)+\alpha_2\alpha_3(-1-\alpha_1)+\alpha_1\alpha_3(-1-\alpha_2))\\&=-1-(-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\\&=-1-(0+3)=-4.\end{aligned}$$

Enfin, $\frac{{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_1}^2}+\frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_3}^2}{{\alpha_2}^2}+\frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2}{{\alpha_3}^2}=\frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_1}^2}{{\alpha_1}^2}+\frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_2}^2}{{\alpha_2}^2}+\frac{{\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2-{\alpha_3}^2}{{\alpha_3}^2}$

$=\frac{1-{\alpha_1}^2}{{\alpha_1}^2}+\frac{1-{\alpha_2}^2}{{\alpha_2}^2}+\frac{1-{\alpha_3}^2}{{\alpha_3}^2}=\frac{1}{{\alpha_1}^2}+\frac{1}{{\alpha_2}^2}+\frac{1}{{\alpha_3}^2}-3=\frac{{\alpha_2}^2{\alpha_3}^2+{\alpha_1}^2{\alpha_3}^2+{\alpha_1}^2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^2{\alpha_2}^2{\alpha_3}^2}-3=\frac{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2{\alpha_3}^2+\alpha_1{\alpha_2}^2\alpha_3+{\alpha_1}^2\alpha_2\alpha_3)}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}-3$

$=\frac{-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{1}-3=\frac{-2(-1)(-1)}{1}-3=-5.$

4. Effectuons la division euclidienne :

X^7	X^3+X^2+1
$-(X^7+X^6+X^4)$	$X^4-X^3+X^2-2X+3$
$-X^6-X^4$	
$-(-X^6-X^5-X^3)$	
$X^5-X^4+X^3$	
$-(X^5+X^4+X^2)$	
$-2X^4+X^3-X^2$	
$-(-2X^4-2X^3-2X)$	
$3X^3-X^2+2X$	
$-(3X^3+3X^2+3)$	
$-4X^2+2X-3$	

Alors $-4X^2+2X-3$ est le reste de la division euclidienne de X^7 par X^3+X^2+1 et $Q=X^4-X^3+X^2-2X+3$ est le quotient.

On a $X^7=P(X)Q(X)-4X^2+2X-3$. Donc, pour chaque racine α de P, $\alpha^7=\underbrace{P(\alpha)}_{=0}Q(\alpha)-4\alpha^2+2\alpha-3=-4\alpha^2+2\alpha-3$.

Donc, ${\alpha_1}^7+{\alpha_2}^7+{\alpha_3}^7=-4({\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+{\alpha_3}^2)+2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3=-4-2-3=-5$.

Ex 14 Montrer que $\boldsymbol{P=1-\frac{X}{1!}+\frac{X(X-1)}{2!}-\frac{X(X-1)(X-2)}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{X(X-1)\dots.(X-n+1)}{n!}}$ est scindé dans $\mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$ et trouver sa forme scindée.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Le monôme $U_p(X)=(-1)^p\frac{X(X-1)\dots.(X-p+1)}{p!}=\frac{(-1)^p}{p!}\prod_{p=0}^{p-1}(X-j)$ Admet k comme racine dès que $p-1\geq k$ i.e. $p>k$. Donc,

$\tilde{P}(k)=1-\sum_{p=1}^{n}\tilde{U}_p(k)=1-\sum_{p=1}^{k}\tilde{U}_p(k)=1-\frac{k}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}-\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}+\dots+(-1)^k\frac{k(k-1)\dots.(k-k+1)}{k!}$

$\tilde{P}(k)=\frac{k!}{0!(k-k)!}-\frac{k!}{1!(k-1)!}+\frac{k!}{2!(k-2)!}-\frac{k!}{3!(k-3)!}+\dots+(-1)^k\frac{k!}{0!k!}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-1)^p1^{k-p}=(1-1)^k=0.$

Donc, les entiers $1,\dots,n$ sont n racines réelles distinctes de P. Or $\deg(P)=\deg(U_n)=n$ car $\forall p\in[\![0,n-1]\!],\deg(U_p)<\deg(U_n)$.

Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$ et $P=codom(P)\prod_{k=1}^{n}(X-k)$ avec $\mathrm{codom}(P)=\mathrm{codom}(U_n)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

Ex 14bis Factorisation et application Soit $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{P=1+X+X^2+\dots+X^{n-1}}$. Factoriser $\boldsymbol{P}$ sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire $\boldsymbol{\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)}$ puis $\boldsymbol{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}$.

Soit z un complexe. Comme $\tilde{P}(1)=n\neq0$, je suppose que $z\neq1$.

$$\tilde{P}(z)=0\Leftrightarrow1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ z\neq1}\frac{z^n-1}{z-1}=0\Leftrightarrow z^n-1=0\Leftrightarrow z\ est\ racine\ nième\ de\ l'unité\ et\ z\neq1$$

$\Leftrightarrow\exists k\in[\![1,n-1]\!]/z=e^{2ik\frac{\pi}{n}}$.

Donc les complexes $e^{2ik\frac{\pi}{n}}$ tq $k\in[\![1,n-1]\!]$ sont les racines de P. Ce sont $n-1$ racines distinctes de P. Comme $P\neq0$ et $\deg(P)=n-1$, ce sont les seules racines de P et sont toutes simples dans P. Ainsi, la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$ est $P=1\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{2ik\frac{\pi}{n}})=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{2ik\frac{\pi}{n}})$.

Alors, $\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(-1)\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=(-1)^{n-1}\tilde{P}(1)=(-1)^{n-1}n.$

De plus, $\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)=\prod_{k=1}^{n-1}2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}=(2i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)=\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)e^{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ik\pi}{n}}$

$=2^{n-1}e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k}=2^{n-1}e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{i\pi n(n-1)}{n\ 2}}=2^{n-1}e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}}=$

$2^{n-1}e^{i(n-1)\pi}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}(e^{i\pi})^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}(-1)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right).$

Par conséquent, $2^{n-1}(-1)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=(-1)^{n-1}n$. Ainsi, $\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Ex 14Ter Soit $P=3X^5-10X^4+15X^3-15X^2+10X-3$. Trouver la forme scindée de P sur $\mathbb{R}$.

Ex 15 Soit n un entier strictement positif et $P_n=\frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1}-(X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.

2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire la limite de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ quand $N \to +\infty$.

1. $P_n \underbrace{=}_{FBN} \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k X^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i^k-(-i)^k)X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(1-(-1)^k)i^k X^{2n+1-k}\right]$

$P_n = \frac{1}{2i}\left[\sum_{\substack{k=0\\ kimpair}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}2i^k X^{2n+1-k}\right] = \frac{1}{i}\left[\sum_{1\leq 2p+1\leq 2n+1}\binom{2n+1}{2p+1}i^{2p+1}X^{1n+1-2p-1}\right] = \frac{1}{i}\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p i X^{2n-2p}\right]$

$P_n = \left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)}\right] = \left[\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2n-2p}\right]$.

J'en déduis que P_n est à coefficients réels (et même entiers) et $deg\ P_n = 2n\ et\ codom(P_n) = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

2. Soit z un nombre complexe.

$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \frac{(z+i)^{2n+1}}{(z-i)^{2n+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}\ est\ racine\ (2n+1)^{ème}\ de\ l'unité$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n]\!], \frac{z+i}{z-i} = e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n]\!], z\left(1-e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = (-i)\left(1+e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ l'égalité\\ est\ impossible\\ pour\ k=0}} \exists k \in [\![1,2n]\!], z\left(1-e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = (-i)\left(1+e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!], z = \frac{(-i)\left(1+e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)}{\left(1-e^{2i\frac{k\pi}{2n+1}}\right)} = \frac{(-i)2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}}{(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}} = cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Or, $\forall k \in [\![1,2n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$. De plus, tan est injective sur $]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ (puisque strictement croissante et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante et négative sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$). Donc, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\ tq \in [\![1,2n]\!]$ sont tous distincts et sont donc $2n$ racines distinctes de P_n. Comme $\deg(P_n) = 2n$, ces racines sont toutes simples dans P_n et P_n est scindée sur $\mathbb{R}$: $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

3. $P_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p X^{2(n-p)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p (X^2)^{(n-p)} = Q_n(X^2)\ avec\ Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n}\underbrace{(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}}_{a_{n-p}}X^{(n-p)}$.

$z^2 racine\ de\ Q_n \Leftrightarrow Q_n(z^2) = 0 \Leftrightarrow P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!], z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,2n]\!]$ sont racines de Q_n. Ces racines ne peuvent pas être distinctes car $\deg(Q_n) = n$ donc Q_n a au plus n racines distinctes.

Mais $\frac{1}{\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{\tan\left(\pi+\frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{\tan\left(\frac{(-k)\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{(-\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right))^2} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$. Donc $u_1 = u_{2n}, u_2 = u_{2n-1}, \ldots, u_{n-1} = u_{2n-(n-1)}$. De plus, tan est strictement croissante et positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont distinctes. Ainsi les réels $u_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont n racines distinctes de Q_n. Comme $\deg(Q_n) = n$, les réels $\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ tels que $k \in [\![1,n]\!]$ sont les seules racines de Q_n et sont toutes simples dans Q_n. Enfin, $codom(Q_n) = codom(P_n) = 2n+1$. Ainsi, $Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = somme\ des\ racines\ de\ Q_n \underbrace{=}_{\substack{où\\ a_{n-p}=(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\\ coeff.\ de\ Q_n}} -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(-1)^1\binom{2n+1}{3}}{(-1)^0\binom{2n+1}{1}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!}}{2n+1} = \frac{\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{1}{tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right] = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

5. Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x} \Leftrightarrow sin^2(x) \leq x^2 \leq tan^2(x) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ \sin(x)\geq 0\\ et\ \tan(x)\geq 0}} \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

Or, sin est concave sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et tan est convexe sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (car $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, sin''(x) = -sin(x) < 0$ et $tan''(x) = 2(1+tan^2(x))\tan(x) > 0$). Donc sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, la courbe de sin est en-dessous de sa tangente en 0 et la courbe de tan est au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi, car $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ et finalement $\frac{cos^2(x)}{sin^2(x)} = cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, comme $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ i.e. $T_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq S_n$. Ainsi, $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$.

Or, , $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{2n^2\pi^2}{3(4n^2)} = \frac{\pi^2}{6}$. Donc, les deux suites qui encadrent $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ tendant vers la même limite $\frac{\pi^2}{6}$.J'en conclus que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 16 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Version simplifiée Soit a , b et c trois réels distincts. On pose $A(X) = \frac{(X-b)(X-c),}{(a-b)(a-c)}$, $B(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $C(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1. Montrer sans calcul que : $A + B + C = 1$
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$ et que cette écritrue de P comme combinaison linéaire de A, B et C est unique.

Version complète Soit $(a_k)_{k=0\dots n}$ $(n+1)$ réels distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n\,[X]$ tel que : $L_i(a_i) = 1 et\ \forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, L_i(a_k) = 0$. On donnera son expression sous forme factorisée (scindée).
2. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, \dots, L_n$.
4. **Application** : On pose $N(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_k)$.
   Soit a et b deux réels tels $a < \min\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$ et $b > \max\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$.
   Soit $f: ([a,b] \to \mathbb{R})$ une application .
   a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{P}(a_k) = f(a_k)$.
   b. On suppose de f est de classe $C^{(n+1)}$ sur $[a,b]$.
      i. Montrer que $\forall x \in [a,b], \exists c \in]a,b[, f(x) - \tilde{P}(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$. (indication : on utilisera la fonction $W(t) = \tilde{N}(x)\left(f(t) - \tilde{P}(t)\right) - \tilde{N}(t)\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right)$).
      ii. Justifier que $M = sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|$ existe.
      iii. En déduire que $\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|\tilde{N}(x)\right|$ et $sup_{[a,b]}|f - P| \le \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$.

Version complète

1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.

$$\begin{cases} L_i \in \mathbb{R}_n\,[X] \\ L_i(a_i) = 1 \\ \forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, L_i(a_k) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_i \in \mathbb{R}_n\,[X] \\ L_i(a_i) = 1 \\ \forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, a_k\ est\ racine\ de\ L_i \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\overset{\substack{un\ polynôme\ non\ nul \\ de\ degré\ inférieur\ à\ n \\ qui\ admet\ n\ racines\ distinctes \\ est\ scindé\ à\ racines\ simples}}{}} \begin{cases} a_0, a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, a_n \text{ sont les seules racines de } L_i, \\ elles\ sont\ simples\ et\ il\ existe\ un\ réel\ \lambda\ tq: \\ L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X - a_k) \\ et\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_i(X) = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X - a_k) \\ 1 = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(a_i - a_k) \end{cases} \Leftrightarrow L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(a_i - a_k)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X - a_k).$$

Ainsi, $L_i(X) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(a_i - a_k)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}(X - a_k)$ est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n\,[X]$ tel que : $L_i(a_i) = 1 et\ \forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, L_i(a_k) = 0$.

2. Soit $T = \left(\sum_{i=0}^{n} L_i\right) - 1$

deg $(T) \le \max(\deg(L_0), \deg(L_1), \dots, \deg(L_n), \deg(1)) = n$.

$\forall k \in [\![0,n]\!], T(a_k) = \left[\sum_{i=0}^{n} \underbrace{L_i(a_k)}_{=0\ si\ i\neq k}\right] - 1 = L_k(a_k) - 1 = 0$. Donc, $a_0, a_1, \dots a_i, a_n$ sont $n+1$ racines distinctes de T. Donc T a strictement plus de racines que son degré et est ainsi le polynôme nul. J'en conclus que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

P est combinaison linéaire des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n \Leftrightarrow \exists(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$

$\Leftrightarrow \exists(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$ et $\forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i\,(a_k) = \lambda_k L_k(a_k) = \lambda_k$

$\Leftrightarrow P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.

Donc si l'écriture de P comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ existe alors cette écriture est unique et $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.

Soit $T = P - \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.

deg $(T) \le \max(\deg(\tilde{P}), \deg(L_0), \deg(L_1), \dots, \deg(L_n)) = n$.

$\forall k \in [\![0,n]\!], T(a_k) = \tilde{P}(a_k) - \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) \underbrace{L_i(a_k)}_{=0\ si\ i\neq k} = \tilde{P}(a_k) - \tilde{P}(a_k) L_k(a_k) = 0$. Donc, $a_0, a_1, \dots a_i, a_n$ sont $n+1$ racines distinctes de T. Donc T a strictement plus de racines que son degré et est ainsi le polynôme nul. J'en conclus que $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$.

Ainsi, $P = \sum_{i=0}^{n} \tilde{P}(a_i) L_i$ est l'unique écriture de P comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$.

5. **Application** : On pose $N(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_k)$. Soit a et b deux réels tels $a < \min\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$ et $b > \max\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$.
   Soit $f: ([a,b] \to \mathbb{R})$ une application.
   c. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) L_i$. Alors $\deg(P) \le \max(\deg(L_0), \deg(L_1), \dots, \deg(L_n)) = n$ donc P de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Et $\forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{P}(a_k) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \tilde{L}_i\,(a_k) = f(a_k) \tilde{L}_k(a_k) = f(a_k)$. Donc P convient. Montrons que c'est le seul qui convienne :
   Soit Q un autre de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k, \tilde{Q}(a_k) = f(a_k)$. Posons $T = P - Q$. Alors $deg(T) \le \max(\deg(P), \deg(Q)) \le n$ et $\forall k, \tilde{T}(a_k) = \tilde{P}(a_k) - \tilde{Q}(a_k) = f(a_k) - f(a_k) = 0$. Donc, $a_0, a_1, \dots a_i, a_n$ sont $n+1$ racines distinctes de T. Donc T a strictement plus de racines que son degré et est ainsi le polynôme nul. J'en conclus que $P = Q$. J'en conclus que $P = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) L_i$ est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k, \tilde{P}(a_k) = f(a_k)$.
   d. On suppose de f est de classe $C^{(n+1)}$ sur $[a,b]$.
      iv. Soit $x \in [a,b]$.

$\underline{1^{er} \text{ cas } x \in \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \text{ Alors.}}$ $\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right) = 0$ et $\tilde{N}(x) = 0$ $donc$ $\forall c \in]a, b[, \frac{\tilde{N}(x)\left(f^{(n+1)}(c)\right)}{(n+1)!} = 0 = \left(f(x) - \tilde{P}(x)\right)$.

$\underline{2^{ème} \text{ cas : } x \notin \{a_0, a_1, \dots, a_n\}.}$ Alors ou bien $x < a_0$ ou $x > a_n$ ou il existe $k \in [\![0, n-1]\!] / a_k < x < a_{k+1}$.

Rangeons les réels $x, a_0, a_1, .., a_n$ par ordre croissant et nommons -les $b_0, b_1, .., b_{n+1}$ tels que $b_0 < b_1 < \cdots < b_{n+1}$ et $\{x, a_0, a_1, .., a_n\} = \{b_0, b_1, .., b_{n+1}\}$. Posons $\forall t \in [a, b], W(t) = \tilde{N}(x)\left(f(t) - \tilde{P}(t)\right) - \tilde{N}(t)\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right)$.

Alors W est de classe $C^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ car f et $\tilde{P}$ le sont. De plus, $W(b_0) = W(b_1) = .. = W(b_{n+1}) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure que W' s'annule en $c_{1,0} \in]b_0, b_1[$, en $c_{1,1} \in]b_1, b_2[, .., $ en $c_{1,n} \in]b_n, b_{n+1}[$. W'prend donc au moins $n+1$ la même valeur 0.

Alors, le théorème de Rolle assure que W'' s'annule en $c_{2,0} \in]c_{1,0}, c_{1,1}[$, en $c_{2,1} \in]c_{1,1}, c_{1,1}[, .., c_{2,n-1} \in]c_{1,n-1}, c_{1,n}[$. Donc, W''prend donc au moins n la même valeur 0.

On réapplique ainsi le théorème de Rolle à $W^{(3)} qui$ prend donc au moins $n-1$ la même valeur 0 et ensuite, $W^{(4)}$ prend donc au moins $n-2$ la même valeur 0....Donc, $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $W^{(k)}$prend donc au moins $n - (k+2)$ la même valeur 0.

En particulier, $W^{(n)} s'annule$ au moins 2 $fois$ sur $]a, b[$. Alors le théorème de Rolle assure que $W^{(n+1)} s'annule$ au moins 1 $fois$ sur $]a, b[$ en un réel c. Or, $\forall t \in [a, b], W^{(n+1)}(t) = \tilde{N}(x)\left(f^{(n+1)}(t) - \widetilde{P^{(n+1)}}(t)\right) - \widetilde{N^{(n+1)}}(t)\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right)$ avec $\widetilde{N^{(n+1)}}(t) = (n+1)!$ et $\widetilde{P^{(n+1)}}(t) = 0$ (car $deg(P) \leq n$ et $\deg(N) = n+1$ et $codom(N) = 1$) . Donc, $\tilde{N}(x)\left(f^{(n+1)}(c)\right) = (n+1)!\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right)$.

Ainsi, Or,$\left(f(x) - \tilde{P}(x)\right) = \frac{\tilde{N}(x)\left(f^{(n+1)}(c)\right)}{(n+1)!}$.

Ainsi, dans les deux cas, $\exists c \in]a, b[, f(x) - \tilde{P}(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$.

v. $f^{(n+1)}$est continue sur $[a, b]$ donc $\left|f^{(n+1)}\right|$ est continue sur le segment $[a, b]$. Ainsi, $\left|f^{(n+1)}\right|$est majorée sur $[a, b]$ Donc, $M = sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|$ existe et est finie.

vi. $\forall x \in [a, b], \exists c \in]a, b[, f(x) - \tilde{P}(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$ $donc$ $|f(x) - P(x)| = \left|\frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)\right| = \frac{|\tilde{N}(x)|}{(n+1)!}|f^{n+1}(c)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|\tilde{N}(x)\right|$. Or , $\left|\tilde{N}(x)\right| = |\prod_{k=0}^{n}(x - a_k)| = \prod_{k=0}^{n}|x - a_k| \leq \prod_{k=0}^{n}|b - a| = |b - a|^{n+1}$ .Donc, $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b - a|^{n+1}$. J'en déduis que $sup_{[a,b]}|f - P| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b - a|^{n+1}$.

Ex 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}, nième\ polynôme\ de\ Legendre.$

1. Donner une expression de L_n. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Justifier que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.
3. Montrer que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

1. $P = (X^2 - 1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ et $P = (X^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{2k}$.

$degP = 2n$ donc $deg(L_n) = 2n - n = n$ et $codom(P) = 1$ donc $codom(L_n) = \frac{(2n)!}{n!}$. et

De plus, d'après Leibniz, $L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}((X-1)^n)^{(k)}((X+1)^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(X+1)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$

Donc, comme $\sum_{k=0}^{n} codom\left(\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \neq 0$. $codom(L_n) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

J'en déduis, par unicité des coefficients et en particulier du coefficient dominant, $n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$. Donc, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}$.

RQUE: $L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^{2k})^{(n)} \underbrace{=}_{\substack{p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ si } n \text{ pair} \\ p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \text{ si } n \text{ impair}}} \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^{2k})^{(n)} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} X^{2k-n}$.

2. 1 et -1 sont les racines de P et sont de multiplicité n dans P . Donc, pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, 1 et -1 sont racines de $P^{(l)}$. Donc, pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.

3.Je sais que $\tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1)$. De plus, $\tilde{P}$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P'}$ s'annule sur $]-1,1[$ en un réel c_1. Alors, $\tilde{P}'^{(1)} = \tilde{P}'(c_1) = \tilde{P}(-1) = 0$. De plus, $\tilde{P}'$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P''}$ s'annule sur $]-1, c_1[$ et sur $]c_1, 1[$ en un réel $c_{2.1}$ et $c_{2.2}$.

Soit $l \in [\![0, n-2]\!]$ Supposons que, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes $c_{l.1}, c_{l.2}, \dots, c_{l.l}$ dans $]-1,1[$ tq $-1 < c_{l.1} < c_{l.2} < \cdots < c_{l.l} < 1$.

Comme je sais de plus que $P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1)$, j' ai donc : $P^{(l)}(-1) = P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1) = \cdots = P^{(l)}(-1)$. De plus, $\widetilde{P^{(l)}}$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P^{(l+1)}}$ s'annule sur $]-1,1[$ en $c_{l+1.1}, c_{l+1.2}, \dots, c_{l+1.l+1}$ tq $-1 < c_{l+1.1} < c_{l.1} < c_{l+1.2} < c_{l.2} < \cdots < c_{l+1.l} < c_{l.l} < c_{l+1.l+1} < 1$.

5. En appliquant le théorème de Rolle à $P^{(n-1)}$ qui s'annule (n-1) fois entre -1 et 1 et qui s'annule en 1 et -1, le théorème de Rolle assure que $\widetilde{L_n} = \widetilde{P^{(n)}}$ s'annule sur $]-1,1[$ en $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$. Donc, $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ sont distinctes n racines réelles distinctes de L_n .

Comme $\deg(L_n) = n$, les réels $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$sont les seules racines de $L_n$et elles sont toutes simples dans L_n et L_n est scindée sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

Ex 18 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et $\deg(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, .., \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, .., m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, .., \alpha_s$ étant réels , on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 < .. < \alpha_s$.

On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^{s}(X - \alpha_k)^{m_k}$.

1. Exprimer $\deg(P)$ en fonction de $m_1, .., m_s$.
2. Quelle est la multiplicité de $\alpha_1, .., \alpha_s$ en tant que racines de P'? (multiplicité nul " = " pas racine)
3. Ici, je suppose que $s \geq 2$ (i.e. P a au moins deux racines réelles distinctes). Justifier que pour tout $k \in [\![1, s-1]\!]$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ $tel\ que$ $\widetilde{P'}(c_k) = 0$.

4. Déduire de ce qui précède que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa forme scindée.

1. $\deg(P)=\sum_{k=1}^{s}\deg\left((X-\alpha_k)^{m_k}\right)=\sum_{k=1}^{s}m_k$.
2. α_k est racine de P d'ordre de multiplicité m_k i.e. $P(\alpha_k)=P'(\alpha_k)=P''(\alpha_k)=..=P^{(m_k-1)}(\alpha_k)=0$ et $P^{(m_k)}(\alpha_k)\neq 0$. Donc, $(P')'(\alpha_k)=..=(P')^{(m_k-2)}(\alpha_k)=0$ et $(P')^{(m_k-1)}(\alpha_k)\neq 0$. Donc, α_k est racine de P' d'ordre de multiplicité m_k-1, avec, par convention, si $m_k-1=0$ alors α_k n'est pas racine de P'.
3. Soit $k\in[\![1,s-1]\!]$. Le théorème de Rolle s' applique à $\widetilde{P}$ sur $[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$: $\widetilde{P}$ est continue sur $[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ et $\widetilde{P}(\alpha_k)=0=\widetilde{P}(\alpha_{k+1})$ donc il existe $c_k\in]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ tel que $\widetilde{P'}(c_k)=0$.
4. $c_1,c_2,\dots,c_{s-1}$ sont $(s-1)$ racines distinctes au moins simple de P'. Et α_1 est racine de P' d'ordre de multiplicité m_1-1 , α_2 est racine de P' d'ordre de multiplicité m_2-1, …, et α_s est racine de P' d'ordre de multiplicité m_s-1.

Nous avons donc déjà $s-1+\sum_{k=1}^{s}(m_k-1)$ racines de P'. Or, $s-1+\sum_{k=1}^{s}(m_k-1)=s-1+\left(\sum_{k=1}^{s}m_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{s}1\right)=s-1+\deg(P)-s=\deg(P)-1=\deg(P')$. Donc les racines déjà trouvées sont les seules racines de P' et P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et

$$P'=\lambda n\left[\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k-1}\right]\left[\prod_{k=1}^{s-1}(X-c_k)\right] \text{ où } n=\deg(P)=\sum_{k=1}^{s}m_k.$$

Ex 19 Soit $n\in\mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que : $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\widetilde{P_n}\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$.

1. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X)=2$ et $P_1(X)=X$ puis en développant $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n existe et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}(X)=X.P_{n+1}(X)-P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme dominant (avec preuve) .
5. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

IV Factorisation en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X].

EX 20 Soit $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$. Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$

1. $P=X^8+X^4+1$.
2. $P=(1-X^2)^3+8X^3$.
3. $P=X^6+1$
4. $P=X^n-R^n$ où R réel strictement positif
5. $P=X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1$ où $\theta\in[0,\pi]$.

1. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$P(z)=z^8+z^4+1=0\Leftrightarrow Z^2+Z+1=0\Leftrightarrow Z=j$ ou $Z=j^2\Leftrightarrow z^4=j$ ou $z^4=j^2$

$\Leftrightarrow z$ est une racine 4ième de $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou de $j^2=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow\exists k\in[\![0,3]\!]/\ z=e^{\frac{2i\pi}{12}}e^{\frac{2ki\pi}{4}}$ ou $z=e^{-\frac{2i\pi}{12}}e^{-\frac{2ki\pi}{4}}$.

Les complexes $e^{\frac{i\pi}{6}}e^{\frac{ki\pi}{2}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{6}}e^{-\frac{ki\pi}{2}}$ tq $k\in[\![0,3]\!]$ sont 8 racines distinctes de P. Comme $\deg(P)=8$, elles sont toutes simplexes dans P et la forme scindée de P dans $\mathbb{C}$ sont $P(X)=\prod_{k=0}^{3}\left(X-e^{\left(\frac{i\pi}{6}+\frac{ki\pi}{2}\right)}\right)\left(X-e^{-\left(\frac{i\pi}{6}+\frac{ki\pi}{2}\right)}\right)$

Donc $P(X)=\prod_{k=0}^{3}\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)X+1\right)$

$$P=\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)X+1\right)$$

$P=\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)(X^2+X+1)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)(X^2-X+1)$.

EX 21 Factoriser les polynômes réciproques suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$

1. $\boldsymbol{P=X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1}$.
2. $\boldsymbol{P=X^7-5X^6+8X^5-4X^4-4X^3+8X^2-5X+1}$.

EX 22 Sommes de Riemann. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$ (où x variable réelle)

1. Domaine de définition de f.
   a) Compléter la phrase : $f(x)$ existe dès que ………….
   b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g_x:(t\mapsto\ln(1-2x\cos(t)+x^2))$est continue sur $]0,\pi[$.
   c) Montrer que $g_x:(t\mapsto\ln(1-2x\cos(t)+x^2))$ est continue en 0 $si\ etssi$ $x\neq1$. Tourver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que g_x soit continue en π.
   d) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$.
2. Soit x réel tel que $|x|\neq1$ et n entier naturel non nul, on note $S_n(x)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)$.
   a) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n}\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)$.
   b) En déduire $S_n(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ selon que $|x|>1$ ou $|x|<1$.

1. a. Soit x un réel. Posons $g_x:(t\mapsto\ln(1-2x\cos(t)+x^2))$. $f(x)$ existe dès que g_x est continue sur $[0,\pi]$.

1.b. Soit $x\in\mathbb{R}$. $(t\mapsto1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur $]0,\pi[$.

De plus, $\Delta=4(\cos^2(t)-1)=-4\sin^2(t)<0$. Donc pour toute valeur de x, $1-2x\cos(t)+x^2>0$. Alors, comme ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $g_x:(t\mapsto\ln(1-2x\cos(t)+x^2))$est continue sur $]0,\pi[$.

1.c. Si $x=1, g_1:(t\mapsto \ln(2-2cos(t)))$ n' est pas définie en 0 et tend vers $-\infty$ en 0, donc n'est pas non plus prolongeable par continuité en 0.
Si $x\neq 1$, pour $t=0,\ 1-2xcos(t)+x^2=1-2x+x^2=(1-x)^2>0$. Donc $g_x:(t\mapsto \ln(1-2xcos(t)+x^2))$est continue en 0.
Ainsi, $g_x:(t\mapsto \ln(1-2xcos(t)+x^2))$ est continue en 0 $si\ etssi\ x\neq 1$.
De même , $g_x:(t\mapsto \ln(1-2xcos(t)+x^2))$ est continue en π $si\ etssi\ x\neq -1$.
1.d. Ainsi , si $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ alors g_x est continue sur $[0,\pi]$ donc $f(x)$ existe.
2.a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\prod_{k=1}^n\left(1-2xcos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\prod_{k=1}^n\left(x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)=\prod_{k=1}^n\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{2n}}\right)\prod_{k=1}^n\left(x-e^{-i\frac{2k\pi}{2n}}\right)$

$$=\frac{x+1}{x-1}\left[(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{2n}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{-i\frac{2k\pi}{2n}}\right)\right]=\frac{x+1}{x-1}(x^{2n}-1)=\left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)=\left(\frac{(x^n)^2-1}{x-1}\right)(x+1)$$

$=\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)(x^n+1)(x+1)$.
2b. Soit x réel tel que $|x|\neq 1$ et n entier naturel non nul .

$S_n(x)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n\ln\left(1-2xcos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{k=1}^n\left(1-2xcos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)\right]=\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)\right]$.

2.c. $S_n(x)$ est une somme de Riemann de g_x sur $[0,\pi]$. Comme g_x est continue sur $[0,\pi]$, $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\int_0^\pi g_x(t)dt=f(x)$.

1^er cas $|x|<1$. $Alors\ \lim_{n\to+\infty}x^{2n}=0\ donc\ \lim_{n\to+\infty}S_n(x)=0$.

2^ème cas $|x|>1$. $Alors\ x^2>1\ et\ 0<x^{-2}<1\ donc\ \lim_{n\to+\infty}(x^2)^n=0\ et\ \lim_{n\to+\infty}(x^{-2})^n=0$.

Alors, $S_n(x)=\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)\right]=\frac{\pi}{n}\ln\left[x^{2n}\left(\frac{1-x^{-2n}}{x-1}\right)(x+1)\right]=\frac{\pi}{n}\ln[x^{2n}]+\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(\frac{1-x^{-2n}}{x-1}\right)(x+1)\right]$

$S_n(x)=\frac{\pi}{n}2n\ln|x|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(\frac{1-x^{-2n}}{x-1}\right)(x+1)\right]=2\pi\ln|x|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\left(\frac{1-x^{-2n}}{x-1}\right)(x+1)\right]$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=2\pi\ln|x|$.

Ainsi, $f(x)=\begin{cases}0\ si\ |x|<1\\ 2\pi\ln|x|\ \ si\ |x|>1\end{cases}$.

Je remarque que f est prolongeable par continuité en 1 et en -1 par la valeur 0 puisque $\lim_{x\to\pm1}2\pi\ln|x|=0$.

V Décomposition en éléments simples

Ex 23 1) Calculer $I=\int_0^1\frac{t^5}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1}dt$ après avoir justifié son existence. Faites de même avec $J=\int_0^1\frac{t^3}{t^3+1}dt$.

3. Calculer $\lim_{N\to+\infty}S_N$ où $S_N=\sum_{n=1}^n\frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$.
4. Déterminer l'expression de la dérivée $n$ième de $f(x)=\frac{3-2x^4}{x^4-2x^2+1}$.

Ex 24 Soit l'équation différentielle (E) : $x(x+1)y''+(x-2)y'-y=0$. Vérifier que (E) admet une solution polynomiale φ puis résoudre (E) sur $]2;+\infty[$ en cherchant les solutions sous la forme $f(x)=k(x)\varphi(x)$.

EX 25 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et deg $(P)\geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1,..,\alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1,..,m_s$ où $s\in\mathbb{N}^*$. $\alpha_1,..,\alpha_s$ étant réels , on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1<\alpha_2<..<\alpha_s$. On a ainsi, $P=\lambda\prod_{k=1}^s(X-\alpha_k)^{m_k}$.

I. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$. On pose $F(t)=\frac{\widetilde{P'}(t)}{\tilde{P}(t)}$ pour tout $t\in D$.

1. Donner une expression de P' grâce à la forme scindée de P.(on utilisera la formule $(\prod_{k=1}^n P_k)'=\cdots$)
2. En déduire que $\forall t\in D_F, F(t)=\sum_{k=1}^s\frac{m_k}{t-\alpha_k}$. (c'est la décomposition en éléments simples de F !!)
3. Application : Déterminer $\int\frac{5t^4-16t^3+3t^2+20t-4}{t^5-4t^4+t^3+10t^2-4t-8}dt$ (on précisera sur quel intervalle on travaille).

Comme $P=\lambda\prod_{k=1}^s(X-\alpha_k)^{m_k}$, $P'=\lambda\sum_{k=1}^s((X-\alpha_k)^{m_k})'\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(X-\alpha_j)^{m_j}=\lambda\sum_{k=1}^s m_k(X-\alpha_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(X-\alpha_j)^{m_j}$.Donc,

$$\frac{\widetilde{P'}(t)}{\tilde{P}(t)}=\frac{\lambda\sum_{k=1}^s m_k(t-\alpha_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}{\lambda\prod_{j=1}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}=\sum_{k=1}^s\frac{m_k(t-\alpha_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}{\prod_{j=1}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}=\sum_{k=1}^s\frac{m_k(t-\alpha_k)^{m_k-1}}{(t-\alpha_k)^{m_k}}\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^s(t-\alpha_j)^{m_j}}=\sum_{k=1}^s\frac{m_k}{(t-\alpha_k)}$$

Application : $f(t)=\frac{5t^4-16t^3+3t^2+20t-4}{t^5-4t^4+t^3+10t^2-4t-8}=\frac{P'(t)}{P(t)}$ $avec\ P(t)=t^5-4t^4+t^3+10t^2-4t-8$. f est continue sur Df donc admet des primitives sur tout intervalle inclus dans Df. De plus, $P(t)=(t-2)^3(t+1)^2$.(our obtenir cette factorisation j'ai remarqué que -1 et 2 sont racines de P , j'ai cherché leur multiplicité dans P en regardant si ces valeurs étaient racines de P', P'',....et ensuite j'ai comparé nombre de racines trouvées avec $deg(P)$). Donc Df =$\mathbb{R}\backslash\{2,-1\}$. Et d'après ce qui précède, $\forall t\in Df, f(t)=\frac{3}{t-2}+\frac{2}{t-1}$. Donc F: $(t\mapsto 3ln|t-2|+2ln|t-1|+cste)$ est la forme générale d'une primitive de f sur tout intervalle inclus dans Df.

II. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

On suppose ici que $m_1=m_2=..=m_s=1$ i.e. toutes les racines de P sont réelles et simples . On pose $\forall t\in D, G(t)=\frac{1}{\tilde{P}(t)}$.

La décomposition en éléments simples de G est de la forme : $\forall t\in D,\ G(t)=\sum_{k=1}^s\frac{u_k}{t-\alpha_k}$ où $u_1,..,u_s$constantes réelles.

4. Soit $j\in[\![1,s]\!]$. Justifier que $\widetilde{P'}(\alpha_j)\neq 0$ et montrer que $\lim_{t\to\alpha_j}(t-\alpha_j)G(t)=\frac{1}{\widetilde{P'}(\alpha_j)}$.
5. En déduire que : $\forall t\in D,\ G(t)=\sum_{k=1}^s\frac{1}{\widetilde{P'}(\alpha_k)}\frac{1}{t-\alpha_k}$ (c'est la décomposition en éléments simples de G).
6. Application : simplifier $S_N=\sum_{n=3}^N\frac{1}{n^3-2n^2-n+2}$ puis calculer sa limite .

D'une part , $\forall t\in D,(t-\alpha_j)G(t)=\frac{(t-\alpha_j)}{\lambda\prod_{k=1}^s(t-\alpha_k)}=\frac{1}{\lambda\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^s(t-\alpha_k)}$. Donc, $\lim_{t\to\alpha_j}(t-\alpha_j)G(t)=\frac{1}{\lambda\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^s(\alpha_j-\alpha_k)}$.

D'autre part, $P(X)=\lambda\prod_{k=1}^s(X-\alpha_k)$ donc $P'(X)=\lambda\sum_{k=1}^s(X-\alpha_k)'\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^s(X-\alpha_i)=\lambda\sum_{k=1}^s\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^s(X-\alpha_i)$.

Donc $P'(\alpha_j) = \lambda \sum_{k=1}^{s} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{s} (\alpha_j - \alpha_i) \quad = \lambda \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} (\alpha_j - \alpha_i)$. Ainsi $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = \frac{1}{P'(\alpha_j)}$.

5. Enfin, $(t-\alpha_j)G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{(t-\alpha_j)u_k}{t-\alpha_k} = u_j + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{s} \frac{(t-\alpha_j)u_k}{t-\alpha_k}$. Donc, $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = u_j$ et par suite, $u_j = \frac{1}{P'(\alpha_j)}$.

Ainsi, $\forall t \in D,\ G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{P'(\alpha_k)} \frac{1}{t-\alpha_k}$.

6. $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^3-2n^2-n+2}$. Posons $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$ *et* $G(t) = \frac{1}{\tilde{P}(t)}$. Alors $P(X) = X^2(X-2) - (X-2) = (X-2)(X^2-1) = (X-2)(X+1)(X-1)$. Donc P est scindé à racines simples. Par conséquent, le résultat précédent s'applique et $\forall t \in D,\ G(t) = \frac{1}{\tilde{P}'(1)} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\tilde{P}'(-1)} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{\tilde{P}'(2)} \frac{1}{t-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2}$.

Alors, $S_N = \sum_{n=3}^{N} -\frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{n-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n}$
$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\left(\sum_{n=4}^{N-2} \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N-1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

$S_N = \frac{1}{6} - \frac{1}{3(N-1)} + \frac{1}{6N} + \frac{1}{6(N+1)}$. Donc $\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{6}$.

III. Partie polaire d'un pôle simple ou double.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction irréductible.

7. Montrer que si α est un pôle simple de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{t-\alpha}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)}$ où $B(t) = \hat{B}(t)(t-\alpha)$
8. Montrer que si α est un pôle double de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{(t-\alpha)^2} + \frac{b}{(t-\alpha)}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)}$ et $b = \left(\frac{A}{\hat{B}}\right)'(\alpha)$ où $B(t) = \hat{B}(t)(t-\alpha)^2$

7. Soit $F(t) = \frac{A(t)}{\hat{B}(t)(t-\alpha)}$ tel que $\hat{B}(\alpha) \neq 0$. Donc, en notant $\frac{a}{t-\alpha}$ la partie polaire dans la décomposition en éléments simple de F, on a : $F(t) = \frac{a}{t-\alpha} + \frac{C(t)}{\hat{B}(t)}$. Donc, $\frac{A(t)}{\hat{B}(t)} = (t-\alpha)F(t) = a + \frac{C(t)}{\hat{B}(t)}(t-\alpha)$ et par suite, $\frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)} = \lim_{t\to\alpha} \frac{A(t)}{\hat{B}(t)} = \lim_{t\to\alpha} (t-\alpha)F(t) = a$.
8. Soit $F(t) = \frac{A(t)}{\hat{B}(t)(t-\alpha)^2}$ tel que $\hat{B}(\alpha) \neq 0$. Donc, en notant $\frac{a}{(t-\alpha)^2} + \frac{b}{(t-\alpha)}$ la partie polaire dans la décomposition en éléments simple de F, on a : $F(t) = \frac{a}{(t-\alpha)^2} + \frac{b}{(t-\alpha)} + \frac{C(t)}{\hat{B}(t)}$. Donc, $\frac{A(t)}{\hat{B}(t)} = (t-\alpha)^2F(t) = a + b(t-\alpha) + \frac{C(t)}{\hat{B}(t)}(t-\alpha)^2$ et par suite, $\frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)} = \lim_{t\to\alpha} \frac{A(t)}{\hat{B}(t)} = \lim_{t\to\alpha} (t-\alpha)^2F(t) = a$. De plus, $\left(\frac{A}{\hat{B}}\right)'(t) = 2(t-\alpha) \quad F(t) + (t-\alpha)^2F'(t) = b + \left(\frac{C}{\hat{B}}\right)'(t)(t-\alpha)^2 + 2(t-\alpha)\frac{C(t)}{\hat{B}(t)}$ et et par suite, $\left(\frac{A}{\hat{B}}\right)'(\alpha) = \lim_{t\to\alpha} \left(\frac{A}{\hat{B}}\right)'(t) = b$.

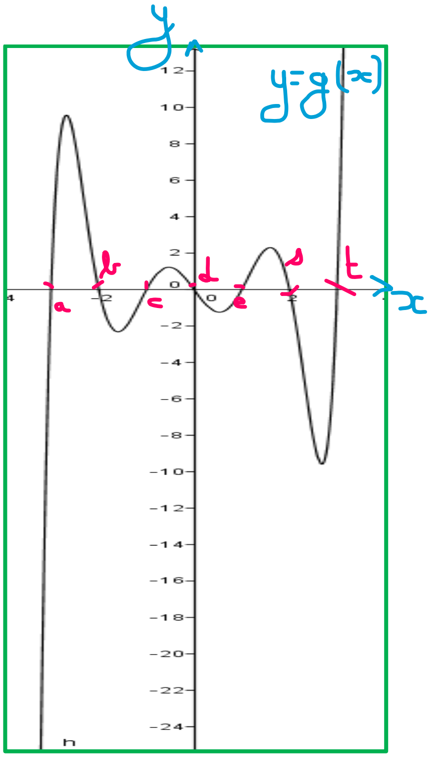
VI Les fonctions polynomiales

Ex 26

A chaque fonction polynomiale f (resp.g) , on associe le polynôme P (resp. Q).

1. Justifier de deux manières que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair a toujours une racine réelle.
2. Quelles sont les fonctions polynômiales f vérifiant : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$?
   Existe-t-il des fonctions φ non nullles telles que $\forall n, \varphi^{(n)}(0) = 0$?
3. Si f et g sont deux fonctions polynômiales de degré 6 ayant 6 racines en commun, quelle relation y-a-t-il entre ces deux fonctions ? Si on ajoute que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, que peut-on dire de f et g?
   Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ s'annulent en 6 valeurs communes et sont équivalentes au voisinage de $+\infty$?
4. Démontrer que si f *et* g sont deux fonctions polynômiales qui coïncident sur un intervalle I non vide et non réduit à un point alors $f = g$ partout et f *et* g ont les mêmes coefficients.
   Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ coïncident sur un intervalle non vide et non réduit à un point ?
5. Parmi les courbes suivantes, quelle sont celles qui ne peuvent pas être la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5 ? Et expliquer pourquoi ? On précisera pour chaque courbe, si cette courbe peut être la courbe d'une fonction polynomiale et le cas échéant de quel degré ?

   1. Première méthode : en appliquant le TVI à la fonction polynomiale associée qui est continue et dont les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont de signes opposés.
      Deuxième méthode : en utilisant le fait de que tout polynôme réel non constant admet un nombre de racines complexes (dont réelles) égale à son degré mais possède un nombre pair de racines complexes non réelles.
   2. Seule la fonction polynomiale nulle vérifie $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$ puisque Taylor affirme que : si f est polynomiale alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ où $N \in \mathbb{N}$ *et* $N \geq \deg(P)$.
   3. F etg sont alors scindées avec les mêmes racines et même multiplicité donc il existe un réel λ non nul tq : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda g(t)$. Si de plus, $f(x) \sim_{+\infty} g(x), \lambda = 1$ *et* $f = g$.
      φ et Ψ n'ont alors en commun que ses 6 valeurs… ailleurs elles peuvent être totalement différentes.
   4. Posons T le polynôme tel que $\tilde{T} = f - g$. Alors T est polynomiale et admet touts les réelles de l'intervalle I comme racine. Comme I contient au moins deux réels distincts, I contient tous les réels compris entre ces deux réels donc I contient une infinité de valeurs qui constituent une infinité de racines de T. Ainsi T est le polynôme nul donc $f = g$.
      φ et Ψ peuvent n'être égales que sur I et nulle part ailleurs comme le prouve les fonctions $\varphi(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x > 0 \\ x^2 + 1\ si\ x \leq 0 \end{cases}$ *et* $\Psi(x) = \begin{cases} 0\ si\ x > 0 \\ -1 si\ x \leq 0 \end{cases}$.
   5.



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g s'annule 7 fois sur $\mathbb{R}$ (en a, b … et t) et ne peut donc pas être polynomiale de degré 5.

g pourrait par contre être polynomiale. Dans ce cas, ses racines réelles sont toutes simples puisqu'aucune tangente aux points d'abscisses $a, b, c \ldots, t$ n'est horizontale. Cela signifie que g' ne s'annule pas en $a, ni\ en\ b$ …, $ni\ en\ t$. Et par conséquent, ces racines réelles sont simples. Mais elle pourrait aussi avoir des racines complexes ….

de degré 7 de la forme :

$$g(x) = 16(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)$$

Ou de degré 9 de la forme

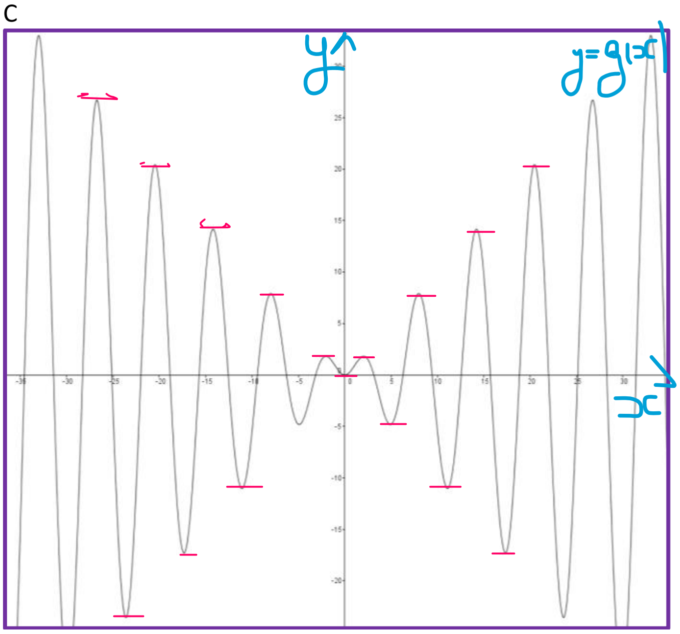
$$g(x) = 23(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)(x^2+x+1)$$

Ou de degré 11 ou 13 de la forme

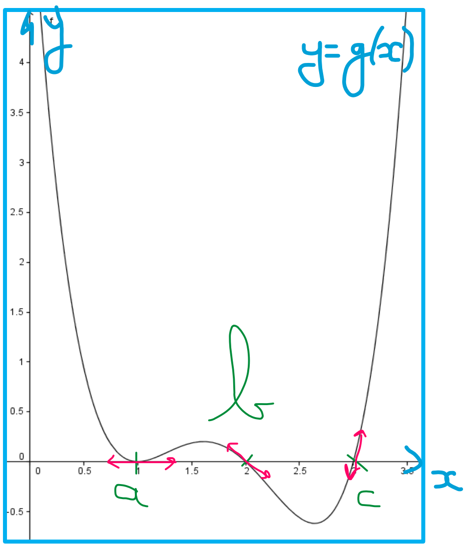
$$g(x) = 23(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-s)(x-t)(x^2+1)^2(x^2+x+1)$$

….

C



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g s'annule une infinité de fois sans être la fonction nulle. $Donc$, g n'est pas polynomiale du tout. On remarque en outre que sa dérivée s'annule aussi une infinité de fois sans être la fonction nulle.



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet, cette fonction g tend vers $+\infty$ en $+\infty et\ en -\infty$. Or une fonction polynomiale de degré 5 tend vers deux infinis opposés en $+\infty$ $et\ en -\infty$.

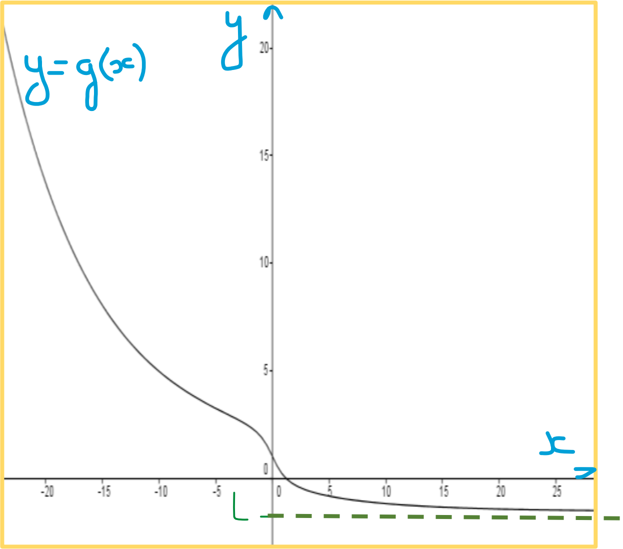
Par contre, g peut être polynomiale : g s'annule 3 fois sur $\mathbb{R}$ en $a, b, et\ c$ et g' s'annule en a mais pas en b, ni en c. Donc a est racine au moins double de g et b et c sont simples. g peut avoir d'autres racines complexes…g tend vers vers $+\infty$ en $+\infty et\ en -\infty$, donc si g est polynomiale alors $deg(g)$ est pair et $codom(g) > 0$.Onpourrai avoir

$$g(x) = 4(x-a)^2(x-b)(x-c)$$

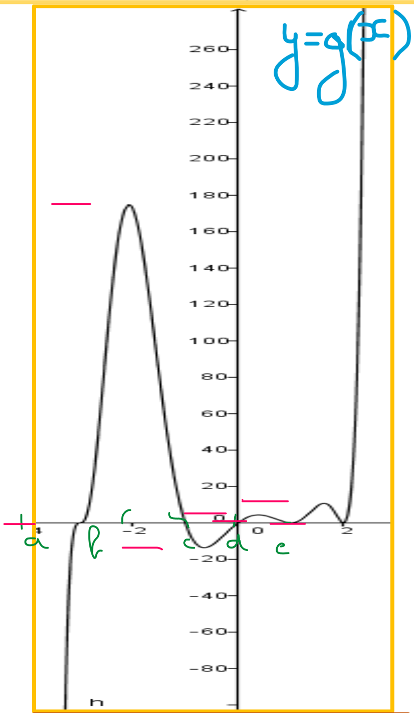
Ou encore

$$g(x) = 13(x-a)^2(x-b)(x-c)(x^2+1)$$

Ou encore …..



NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet,
cette fonction g ne tend pas vers l'infini en $+\infty$. g n'est d'ailleurs pas polynomiale du tout car elle n'est pas constante et tend vers une limite finie L en $+\infty$. Or, toute fonctino polynomiale non constante tend vers l'infini en l'infini.



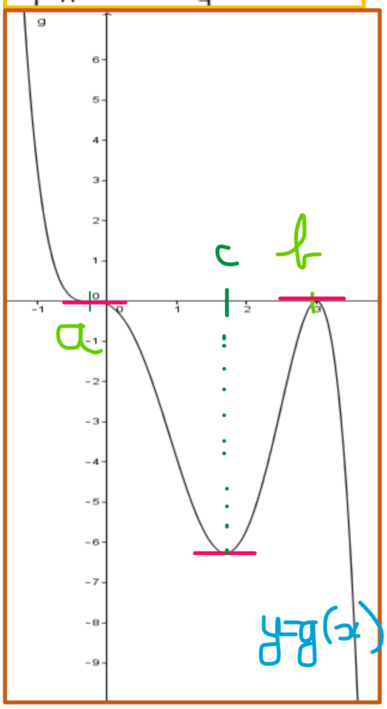
NON, ce n'est pas la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5. En effet,
cette fonction g' s'annule 7 fois sur $\mathbb{R}$ et g' ne peut donc pas être polynomiale de degré 4.
g pourrait par contre être polynomiale. Dans ce cas, $a, b, c, d, et\ e$ sont les seules racines réelles de g mais g peut avoir des racines complexes (deux à deux conjuguées puisque g est une fonction réelle). D'après les tangentes de Cg aux points d'abscisses a, b, c, d et e, a, d et e sont des racines réelles d'ordre de multiplicité au moins 2 , $b\ et\ c$ sont simples et De plus, étant donné les limites de g en $\pm\infty$, $deg(g)$ est impair et $codom(g) > 0$.on pourrait avoir :

$$\underbrace{g(x) = 16(x-a)^2(x-b)(x-c)(x-d)^3(x-e)^2}_{impossible\ Cf\ exemple\ ci\ dessous\ .}$$

Ou

$$g(x) = 157(x-a)^5(x-b)(x-c)(x-d)^2(x-e)^2(x^2-x+1)^4(x^2+1)^2$$

Ou ....



Oui c'est possible que g soit une fonction polynomiale de degré 5. En effet,
g ne s'annule que deux fois sur $\mathbb{R}$ $en\ a\ et\ b$ qui sont de multiplicité au moins 2.
g' ne s'annule que 3 fois sur $\mathbb{R}$
les limites de g en $\pm\infty$ sont infinies et opposées.
g pourrait peut-être être de la forme : $g(x) = -7(x-a)^2(x-b)^3$
NB : Comme $deg(g) = 5$ et a et b ont des multiplicités $p\ et\ q$ supérieures à 2. Alors, $0 \leq 5 - a - b \leq 1$. Par conséquent, le quotient $Q(x)$ de la division euclidienne de $g(x)$ par $(x-a)^p(x-b)^q$ est de degré 0 ou 1. Mais si $deg(Q) = 1$, cela signifie que $Q(x) = ux + v$ avec u et v réels et Q a une racine réelle $-v/u$ distinctes de $a\ et\ b$. Donc g aurait une autre racine réelle ce qui est exclu. Ainsi deg(Q)=0 i.e. Q =cste non nulle et ainsi, $p + q = 5$ donc $p = 2$ et $q = 3$ ou $p = 3$ et $q = 2$ et g n'a pas d'autres racines complexes.
Ainsi , si g est polynomiale de degré 5 et à la courbe ci-contre alors nécessairement :
$g(x) = \lambda(x-a)^2(x-b)^3$ ou $g(x) = \lambda(x-a)^3(x-b)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$.
Alors $g'(x) = \lambda(x-a)(x-b)^2(x-c)$ou $g'(x) = \lambda(x-a)^2(x-b)(x-c)$.
Or on lite sur la courbe que g' s'annule en a mais sans changer de signe (g' est négative à gauche et à droite de a) . Par contre, g' s'annule en changeant de signe en b (positive à gauche de b et négative à droite de b) . Donc nécessairement, $g'(x) = \lambda(x-a)^2(x-b)(x-c)$ et donc
$g(x) = \lambda(x-a)^3(x-b)^2$. Pour calculer λ, il suffit de prendre une valeur de g particulière (autre que $g(a)$ et $g(b)$....)
NB : l'allure de Cg au voisinage de a est celle d'une fonction polynomiale de degré impair lors que l'allure de Cg au voisine de b est celle d'une fonction polynomiale de degré pair.
En reprenant l'exemple précédent (exemple 5) et en faisant le même type de raisonnement , on voit la puissance $(x-a)$ est impaire supérieure à 3 , celles de $(x-d)\ et\ (x-e)$ sont paires supérieures à 2.
Dans l'exemple 3, la puissance de $(x-a)$ est paire sup à 2.