SUP PCSI 2022-2023 Mathématiques.

TD 15 Polynômes

I Opérations, unicité des coefficients, degré, les polynômes dérivés.

Ex 1 Produit de deux fonctions polynomiales. Montrer que : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_kx^k+o_0(x^n)$ où $a_k=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$.

Ex 2 Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$ par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on cherchera d'abord le degré d'un tel polynôme.

Ex 2 bis Solutions polynomiales d'une équa. diff.

1. Chercher toutes les fonctions polynomiales solutions de l'équation différentielle (E): $(x^2+1)y''-2y=-x$.
2. Déterminer une solution polynomiale φ non nulle de (EH).
3. En déduire toutes les solutions de (E) en les cherchant sous la forme $y(x)=k(x)\varphi(x)$ (c'est ce qu'on appelle la méthode de variation de la constante pour les équa.diff. d'ordre 2 à coefficients non constants)

Ex 3 Degré et unicité des coefficients

Soit $f(P)=(X^2+X)P''(X)+(2X+1)P'(X)$.

1) Montrer que $\forall P\in\mathbb{R}_n[X], f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.
2) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P\neq 0$ *et* tel qu'il existe λ un réel vérifiant $f(P)=\lambda P$.
   On note $d=\deg(P)$ *et* $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ tq $a_d\neq 0$.
   a) Démontrer que : $\lambda=d(d+1)\ et\ \forall k\in\{0,1,\dots,d-1\}, a_{k+1}=\frac{(d-k)(d+k+1)}{(k+1)^2}a_k$.
   b) En déduire que : $\forall k\in\{0,1,\dots,d\}$, , $a_k=\frac{(d+k)!}{(d-k)!(k!)^2}a_0$.
   c) Démontrer qu'il existe un seul polynôme Q_d unitaire, (i.e. codom$(Q_d)=1$) tel que $f(Q_d)=d(d+1)Q_d$.

II Taylor-Divisibilité-Racines.

Ex 4 Formules de Taylor pour les polynômes

1. Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(-1)=1, P'(-1)=-2\ et\ P''(-1)=3$.
2. Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(3)=P'(3)+P''(3)$.

Ex 5

1. Déterminer un polynôme U de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui admet $1+\sqrt{2}$ comme racine.
2. Soit $P=2X^5-4X^4-2X^3+3X^2-5X-4$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par U.
3. En déduire $P\left(1+\sqrt{2}\right)$

Ex 6

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X+1)=P(X)$.
2. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+3)P(X)=XP(X+1)$.

Ex 7 Déterminer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P de $K[X]$ quelconque par $B=(X-a)(X-b)$ avec $a\ et\ b$ deux scalaires.

Ex 7 bis Soit $n\in\mathbb{N}\ et\ \theta\in\mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\mathrm{P}=(\cos(\theta)\,X+\sin(\theta))^n$ par $B=X^2+1$.

Ex 8 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine de $P=X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1$ et déterminer son ordre de multiplicité. Factoriser P par $(X-1)^2$.

Ex 9 Montrer que : X^4+2X^2+4X-1 n'a que des racines simples.

Ex 10 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que : $(X-1)^2$divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ et on déterminera alors le quotient.

2. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que X^2+aX+1 divise X^4-X+b.

Ex 10 bis Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X-2)(X-3)$ divise $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-1$
2. Déterminer le quotient. (indication : on écrira $(X-2)=(X-3)+1$ puis $(X-3)=(X-2)-1$).

Ex 10 Ter *Soit* $n\in\mathbb{N}\ et\ a\in\mathbb{R}$. Montrer que $X^2-2Xcosa+1$ divise $X^nsina-Xsin(na)+sin(n-1)a$.

Ex 10 Quater Montrer que X^2+X+1 divise $X^{311}+X^{82}+X^{15}$.

Ex 10 Quinquies Pour quelles valeurs de n, $B=(X^2+X+1)^2$ divise-t-il $P=(1+X)^n-X^n-1$

Ex 11 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x) = \frac{e^x \widetilde{P_n}(x)}{(1-x)^{n+1}}$.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n et justifier votre réponse . Et Calculer $\widetilde{P_n}(1)$.
4. Vérifier que f est solution d'une équa.diff. En déduire que : $P_{n+1}(X) = n(X-1)P_{n-1}(X) + \big((n+2)-X\big)P_n(X)$.
5. En déduire que : pour tout entier $n \geq 1$, $P_n'(X) = -nP_{n-1}(X)$.
6. Démontrer, par l'absurde, que pour tout entier $n \geq 1$, P_n n'a que des racines simples .
7. Soit n et k entiers tels que : $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k} et en déduire la valeur de $P_n^{(k)}(1)$.
8. En déduire que : $P_n(X) = n!\left(1 + (1-X) + \frac{(1-X)^2}{2!} + \cdots + \frac{(1-X)^n}{n!}\right) = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-X)^k}{k!}\right)$.

III Relation nombre de racine/degré - Forme scindée - Relations coefficients/racines.

Ex 12 Déterminer tous les polynômes de degré 3 multiple de $X-1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $(X-2)$, par $(X-3)$ et par $(X-4)$ sont égaux.

Ex 12bis Déterminer tous les polynômes P de ℝ[X] de degré 5 tels que $P+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(X-2)^3$ (indication : considérer P').

Ex 12Ter Soit P un polynôme de degré 2023 tel que $\tilde{P}(0) = 1$ et $\forall k \in [\![1,2023]\!], \tilde{P}(k) = k.$ Calculer $\tilde{P}(-1)$.

Ex 13 Soit $P = X^3 + X^2 + 1$.

1. Justifier que P admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On ne demande pas de les déterminer. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
2. Calculer $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\,\alpha_3$.
3. En déduire ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2$, ${\alpha_1}^3 + {\alpha_2}^3 + {\alpha_3}^3$, $\frac{{\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2}{{\alpha_1}^2} + \frac{{\alpha_1}^2 + {\alpha_3}^2}{{\alpha_2}^2} + \frac{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2}{{\alpha_3}^2}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^7 par $X^3 + X^2 + 1$. En déduire ${\alpha_1}^7 + {\alpha_2}^7 + {\alpha_3}^7$

Ex 14 Montrer que $P = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et trouver sa forme scindée.

Ex 14bis Factorisation et application Soit $n \in \mathbb{N}^*et$ $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$. Factoriser P sous forme scindée dans ℂ[X] . En déduire $\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$ puis $\prod_{k=1}^{n-1} sin\frac{k\pi}{n}$.

Ex 14Ter Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur ℝ .

Ex 15 Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}\,[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé sur ℝ et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}\,[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N$ où $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

Ex 16 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Version simplifiée Soit a , b et c trois réels distincts. On pose $A(X) = \frac{(X-b)(X-c),}{(a-b)(a-c)}$, $B(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $C(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1. Montrer sans calcul que : $A + B + C = 1$
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = \tilde{P}(a)A + \tilde{P}(b)B + \tilde{P}(c)C$ et que cette écritrue de P comme combinaison linéaire de A, B et C est unique.

Version complète Soit $(a_k)_{k=0\ldots n}$ $(n+1)$ réels distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n\,[X]$ tel que : $L_i(a_i) = 1 et$ $\forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, L_i(a_k) = 0$. On donnera son expression sous forme factorisée (scindée).
2. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes $L_0, \ldots, L_n$.
4. **Application** : On pose $N(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_k)$.
   Soit a et b deux réels tels $a < \min\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$ et $b > \max\{a_k / k \in [\![0,n]\!]\}$.
   Soit $f : ([a,b] \to \mathbb{R})$ une application .
   a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0,n]\!], \tilde{P}(a_k) = f(a_k)$.

b. On suppose de f est de classe $C^{(n+1)}$ sur $[a,b]$.

i. Montrer que $\forall x \in [a,b], \exists c \in]a,b[, f(x) - P(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$. (indication : on utilisera la fonction $W(t) = N(x)\big(f(t) - P(t)\big) - N(t)\big(f(x) - P(x)\big)$).

ii. Justifier que $M = sup_{[a,b]}|f^{n+1}|$ existe.

iii. En déduire que $\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\tilde{N}(x)|$ et $sup_{[a,b]}|f - P| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$.

Ex 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2-1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$.

1. Donner une expression de L_n. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Justifier que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.
3. Montrer que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

Ex 18 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et deg $(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, .., \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, .., m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, .., \alpha_s$ étant réels , on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 <\ldots< \alpha_s$. On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

1. Exprimer deg(P) en fonction de $m_1, .., m_s$. On note $D = \mathbb{R} \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n]$.
2. Quelle est la multiplicité de $\alpha_1, .., \alpha_s$ en tant que racines de P'? (multiplicité nul " = " pas racine)
3. Ici, je suppose que $s \geq 2$ (i.e. P a au moins deux racines réelles distinctes). Justifier que pour tout $k \in [\![1, s-1]\!]$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ $tel\ que\ \tilde{P}'(c_k) = 0$.
4. Déduire de ce qui précède que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ et donner sa forme scindée.

Ex 19 Soit $n\in\mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que :$\forall t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\tilde{P}_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$.

1. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X) = 2$ et $P_1(X) = X$ puis en développant $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n existe et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) = X.P_{n+1}(X) - P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme dominant (avec preuve) .
5. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de cos $\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et cos $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

IV Factorisation en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X].

EX 20 Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. Factoriser les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$

1. $P = X^8 + X^4 + 1$.
2. $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.
3. $P = X^6 + 1$
4. $P = X^n - R^n$ où R réel strictement positif
5. $P = X^{2n} - 2\cos(\theta) X^n + 1$ où $\theta \in [0, \pi]$.

EX 21 Factoriser les polynômes réciproques suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

1. $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
2. $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.

EX 22 Sommes de Riemann. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x cos(t) + x^2)\, dt$ (où x variable réelle)

1. Domaine de définition de f.
   a) Compléter la phrase : $f(x)$ existe dès que …………
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x cos(t) + x^2))$est continue sur $]0, \pi[$.
   c) Montrer que $g_x: (t \mapsto \ln(1 - 2x cos(t) + x^2))$est continue en 0 $si\ etssi\ x \neq 1$. Tourver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que g_x soit continue en π.
   d) En déduire que f est définie que $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$.
2. Soit x réel tel que $|x| \neq 1$ et n entier naturel non nul, on note $S_n(x) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2x cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right)$.
   a) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2x cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) = \left(\frac{x^{2n}-1}{x-1}\right)(x+1)$.
   b) En déduire $S_n(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ selon que $|x| > 1$ ou $|x| < 1$.

V Décomposition en éléments simples

Ex 23 1) Calculer $I = \int_0^1 \frac{t^5}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1} dt$ après avoir justifié son existence. Faites de même avec $J = \int_0^1 \frac{t^3}{t^3+1} dt$.

3. Calculer $\lim_{N\to+\infty} S_N$ où $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}$.
4. Déterminer l'expression de la dérivée $n$ième de $f(x) = \frac{3-2x^4}{x^4-2x^2+1}$.

Ex 24 Soit l'équation différentielle (E) : $x(x+1)y'' + (x-2)y' - y = 0$. Vérifier que (E) admet une solution polynomiale φ puis résoudre (E) sur $]2;+\infty[$ en cherchant les solutions sous la forme $f(x) = k(x)\varphi(x)$.

EX 25 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P scindé sur $\mathbb{R}$ et deg $(P) \geq 2$. On note λ le coefficient dominant de P et $\alpha_1, .., \alpha_s$ les racines de P de multiplicités respectives non nulles $m_1, .., m_s$ où $s \in \mathbb{N}^*$. $\alpha_1, .., \alpha_s$ étant réels , on peut les ordonner. On impose donc : $\alpha_1 < \alpha_2 <\ldots< \alpha_s$. On a ainsi, $P = \lambda \prod_{k=1}^{s} (X-\alpha_k)^{m_k}$.

<u>I. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$.</u> On pose $F(t) = \frac{\widetilde{P'}(t)}{\tilde{P}(t)}$ pour tout $t \in D$.

1. Donner une expression de P' grâce à la forme scindée de P.(on utilisera la formule $(\prod_{k=1}^{n} P_k)' = \cdots$.)
2. En déduire que $\forall t \in D_F, F(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{m_k}{t-\alpha_k}$. (c'est la décomposition en éléments simples de F !!)
3. <u>Application</u> : Déterminer $\int \frac{5t^4-16t^3+3t^2+20t-4}{t^5-4t^4+t^3+10t^2-4t-8} dt$ (on précisera sur quel intervalle on travaille).

<u>II. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ quand P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.</u>

On suppose ici que $m_1 = m_2 =..= m_s = 1$ i.e<u>. toutes les racines de P sont réelles et simples</u> . On pose $\forall t \in D, G(t) = \frac{1}{\tilde{P}(t)}$.

La décomposition en éléments simples de G est de la forme : $\forall t \in D,\ G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{u_k}{t-\alpha_k}$ où $u_1, .., u_s$constantes réelles.

4. Soit $j \in [\![1,s]\!]$. Justifier que $\widetilde{P}'(\alpha_j) \neq 0$ et montrer que $\lim_{t\to\alpha_j} (t-\alpha_j)G(t) = \frac{1}{\widetilde{P'}(\alpha_j)}$.
5. En déduire que : $\forall t \in D,\ G(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{\widetilde{P'}(\alpha_k)} \frac{1}{t-\alpha_k}$ (c'est la décomposition en éléments simples de G).
6. <u>Application</u> : On pose $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^3-2n^2-n+2}$. Déterminer la limite de S_N quand $N \to +\infty$.

<u>III. Partie polaire d'un pôle simple ou double.</u>

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction irréductible.

7. Montrer que si α est un pôle simple de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{X-\alpha}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)}$ où $B(t) = \hat{B}(t)(t-\alpha)$
8. Montrer que si α est un pôle double de F alors sa partie polaire est $\frac{a}{(X-\alpha)^2} + \frac{b}{(X-\alpha)}$ tel que $a = \frac{A(\alpha)}{\hat{B}(\alpha)}$ et $b = \left(\frac{A}{\hat{B}}\right)'(\alpha)$ où $B(t) = \hat{B}(t)(t-\alpha)^2$

VI Les fonctions polynomiales

Ex 26

A chaque fonction polynomiale f (resp.g) , on associe le polynôme P (resp. Q).

1. Justifier de deux manières que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair a toujours une racine réelle
2. Quelles sont les fonctions polynômiales f vérifiant : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$?
   Existe-t-il des fonctions φ non nullles telles que $\forall n, \varphi^{(n)}(0) = 0$?
3. Si f et g sont deux fonctions polynômiales de degré 6 ayant 6 racines en commun, quelle relation y-a-t-il entre ces deux fonctions ? Si on ajoute que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, que peut-on dire de f et g?
   Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ s'annulent en 6 valeurs communes et sont équivalentes au voisinage de $+\infty$?
4. Démontrer que si f et g sont deux fonctions polynômiales qui coïncident sur un intervalle non vide et non réduit à un point alors $f = g$ partout et f et g ont les mêmes coefficients.
   Que peut-on dire si φ ou Ψ n'est pas polynomiale mais φ et Ψ coïncident sur un intervalle non vide et non réduit à un point ?
5. Parmi les courbes suivantes, quelle sont celles qui ne peuvent pas être la courbe d'une fonction polynomiale de degré 5 ? Et expliquer pourquoi ? On précisera pour chaque courbe, si cette courbe peut être la courbe d'une fonction polynomiale et le cas échéant de quel degré ?