

Matrices

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont appelés des scalaires (ce sont des réels ou des complexes).

Lorsque cela n'est pas précisé, n , p , q et m sont des entiers naturels non nuls.

I Opérations sur les matrices.

1. Définitions

1 Définition : Une matrice n lignes et p colonnes (ou de type (n, p) ou de type $n \times p$) à coefficients dans K est un tableau n lignes et p colonnes remplies d'éléments de K .

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans K .

2 Notation : si A est une matrice n lignes et p colonnes à coefficients dans K alors on numérote les lignes de A de 1 à n et les colonnes de A de 1 à p et on note :

$a_{ij} = a_{\substack{i \\ \text{premier indice} \\ \text{de ligne}}} \substack{j \\ \text{deuxième indice} \\ \text{de colonne}}$ le scalaire rangé dans le tableau A qui se situe sur la ligne i et la colonne j .

$$A \text{ est notée : } A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}.$$

3 Exercice : Soit $A = (a_{kl})_{\substack{k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}}$ telle que $\forall (k, l) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 5 \rrbracket, a_{kl} = \begin{cases} kl & \text{si } k + l \text{ pair} \\ \frac{1}{k} & \text{sinon} \end{cases}$. Ecrire A sous forme d'un tableau.

4 Définition : a_{ij} est un élément de K et est appelé le coefficient ligne i colonne j de A .

Donc, a_{ji} est le coefficient ligne j et colonne i .

5 Définition : Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.

2. Matrices particulières

- La **matrice nulle**, n lignes p colonnes est la matrice, n lignes p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. On la note **0 ou (0) ou $O_{n,p}$** s'il y a ambiguïté.
- Une **matrice carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Une **matrice A carrée d'ordre n** est une matrice carrée à n lignes, n colonnes. Les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituent la **diagonale de A** .
- La **matrice identité d'ordre n** est la matrice carrée n lignes, n colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1. On la note **I ou I_n** .

Exemple: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

6 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$ tel que : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ (symbole de Kronecker).

- Une **matrice colonne** est une matrice ne comportant qu'une seule colonne.
- Une **matrice ligne** est une matrice ne comportant qu'une seule ligne.

7 Notation : dans la suite du cours, on notera souvent M_{ij} le coefficient ligne i colonne j de la matrice M

Par exemple, $(2A - BC)_{ij}$ est le coefficient ligne i et colonne j de $2A - BC$.

Cela évitera parfois d'introduire trop de lettres !!

3. Addition et multiplication par un scalaire.

8 Définition - Somme de deux matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ deux matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K et k un scalaire.

Par définition, $A + B$ et kA (ou $k.A$) sont les deux matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K définies par:

$A + B = (s_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ et $k.A = (m_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $m_{ij} = k \times a_{ij}$ ♥

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots & a_{1p-1} + b_{1p-1} & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdots & a_{2p-1} + b_{2p-1} & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & a_{i3} + b_{i3} & \cdots & a_{ip-1} + b_{ip-1} & a_{ip} + b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \cdots & a_{np-1} + b_{np-1} & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k.A = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{np} \end{pmatrix}.$$

Si α et β sont deux scalaires, alors $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \cdots & \alpha a_{1p} + \beta b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \cdots & \alpha a_{np} + \beta b_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(K)$ est combinaison linéaire de A et B

Généralisation : Une combinaison linéaire des matrices $A_1, \dots, A_s$ de $M_{n,p}(K)$ est toute matrice de la forme $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_s A_s$ telle que $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ scalaires.

NB : On ne peut additionner ou faire des combinaisons linéaires que des matrices de même taille.

9 Remarques:

- Si A et B sont des matrices n lignes p colonnes à coefficients dans K , alors $A + B$ et kA et $\alpha A + \beta B$ sont encore des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans K . On dit que $M_{n,p}(K)$ est stable par addition et multiplication par un scalaire et par combinaison linéaire.
- La ligne i (resp. colonne j) de $A + B$ est égale la somme des lignes i (resp. colonnes j) de A et de B .
La ligne i (resp. colonne j) de kA est égale au produit de k et de la ligne i (resp. colonne j) de A .

10 Propriétés : premières règles de calcul. Soit A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(K)$ et α et β deux scalaires.

- $A + (B + C) = (A + B) + C$ et $A + B = B + A$ L'addition matricielle est associative et commutative.
- $A + O_{np} = A + O_{np} = A$ O_{np} est l'élément neutre de l'addition matricielle.
- $A + (-1)A = O_{np}$ $(-1)A$ notée $-A$ est le symétrique de A pour l'addition.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ et $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ La multiplication externe est distributive à gauche et à droite sur l'addition dans K .
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ L'associativité mixte entre multiplication externe et produit dans K .
- $\alpha A = O \Leftrightarrow A = O$ ou $\alpha = 0$.

4. Produit matriciel

11 Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 & 2 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 21 & 32 \end{pmatrix}$$

Ils sont tout seuls !

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Produit impossible! Ce produit n'existe pas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \\ 0 & 1 & (-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -8 \\ 17 & 8 \\ 54 & -14 \\ -29 & 9 \end{pmatrix}$$

12 Cas général

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}}_A \end{array} \\
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q-1} & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q-1} & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{jq-1} & b_{jq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq-1} & b_{pq} \end{pmatrix}}_B \\ \uparrow \text{colonne } j \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ & & & \\ & & c_{ij} & \\ & & & \end{pmatrix} \\
 \uparrow \text{ligne } i
 \end{array}
 \end{array}$$

$\text{tq } c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

13 Définition du produit matriciel. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ une matrice n lignes et p colonnes, $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, q \rrbracket}}$ une matrice p lignes et q colonnes à coefficients dans K . Alors par définition $C = A \times B$, notée AB , est la matrice n lignes et q colonnes à coefficients dans K dont le coefficient c_{ij} , ligne i et colonne j , est : $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$. ♥♥

14 NB : on ne sait multiplier A par B que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et on a la règle suivante : $\text{type}(n, p) \times \text{type}(p, q) = \text{type}(n, q)$.

15 Cas particuliers : produit avec une matrice ligne ou colonne

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_{p-1} & C_p \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}}_A \end{array} \\
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_B \\ \begin{pmatrix} c_i \end{pmatrix} \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{tq } c_i = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_k = \sum_{k=1}^p b_k a_{ik}. \text{ Alors, } AB = \sum_{k=1}^p b_k C_k.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q-1} & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2q-1} & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jq-1} & b_{jq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pk} & \cdots & b_{pq-1} & b_{pq} \end{pmatrix}}_B \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_p \end{array} \\
 \begin{array}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}}_A \\ \begin{pmatrix} c_k \end{pmatrix} \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{tq } c_k = \sum_{i=1}^p a_i b_{ki}. \text{ i.e. } AB = \sum_{k=1}^p a_k L_k.
 \end{array}$$

16 Règles de calcul : Soit A, B, C matrices et α scalaire. Dès que les produits existent, on a :

- $(AB)C = A(BC)$ Le produit matriciel est associatif.
- $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$ Le produit matriciel est distributif sur l'addition matricielle.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ L'associativité du produit mixte entre produits externe et matriciel.
- $A(O) = O = (O)A$
- $AI_p = A = I_n A$ I_n est l'élément neutre du produit matriciel.

17 BILAN ET MISE EN GARDE : Les règles de calcul sur les matrices sont presque les mêmes que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf

ATTENTION Très souvent :

- AB existe mais BA n'existe pas. Même quand AB et BA existent, AB et BA n'ont pas forcément la même dimension.
- Même quand AB et BA existent et ont la même dimension, on a $AB \neq BA$. ♥

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Quand deux matrices vérifient $AB = BA$, on dit que ces deux matrices commutent.....c'est rare.

- Il peut arriver que $AB = O$ avec $B \neq O$ et $A \neq O$. Donc, $AB = O \nRightarrow B = O$ ou $A = O$. ♥ et $A^2 = O \nRightarrow A = O$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A$. Le produit matriciel n'est pas intègre

- Il peut arriver que $AB = AC$ et $B \neq C$. Donc, $AB = AC \nRightarrow B = C$. ♥

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Certaines matrices n'ont pas d'inverse pour la multiplication et on ne divise par une matrice. On multiplie par A^{-1} lorsqu'elle existe.

5. Transposition

18 Définition : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ une matrice de type (n, p) . La matrice transposée de A est la matrice notée

A^T de type (p, n) et définie par : le coefficient ligne i colonne j de A^T est égal au coefficient ligne j colonne i de A . Autrement dit, $A^T = (u_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$ telle que $u_{ij} = a_{ji}$. Autrement dit, $\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (A^T)_{lk} = A_{kl}$.

19 Exercice : Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \dots$

20 Remarque : la ligne i de A^T est la colonne i de A et la colonne j de A^T est la ligne j de A .

21 Règles de calcul: Soit A et B deux matrices.

- $(A^T)^T = A$.
- Si A et B sont de même type et α, β des scalaires alors $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.
- Si AB existe alors $B^T A^T$ existe et $(AB)^T = B^T A^T$.

6. Matrices élémentaires.

22 Définition : Une matrice élémentaire est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un coefficient qui vaut 1. Dans $M_{n,p}(K)$ on note E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

23 Propriété : Pour tous i et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et tous j et l dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

24 Théorème : Toute matrice M de $M_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires E_{ij} telle que $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Et plus précisément, si $M = (m_{ij})$ alors $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$.

II Matrices d'opérations élémentaires. Algorithme de Gauss-Jordan.

1. Matrices d'opérations élémentaires

25 Définition des matrices d'opérations élémentaires. A NE PAS CONFONDRE AUX MATRICES ELEMENTAIRES !!

Matrices de Transposition : Soit i et j deux entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note T_{ij} la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n .

Matrice de Dilatation : Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in K^*$. On note $D_i(\lambda)$ la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à I_n .

Matrice de Transvection : Soit i et j deux entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et λ un scalaire. On note $H_{ij}(\lambda)$ la matrice obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n .

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & (0) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ 0 & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & (0) & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & (0) & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26 Théorème : Soit A une matrice de type (n, p) et $\lambda \in K^*$.

Faire subir $L_i \leftrightarrow L_j$ à A revient à multiplier A à gauche par T_{ij} (i.e. $T_{ij}A$ est la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$ sur A).

Faire subir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à A revient à multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$.

Faire subir $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à A revient à multiplier A à gauche par $H_{ij}(\lambda)$.

27 EN PRATIQUE : pour retrouver ses résultats, prenez une matrice A carrée d'ordre 4 et multiplier-la à gauche par T_{32} , par $D_3(\lambda)$ et par $H_{43}(\lambda)$ puis à droite. Et vous regarder les effets sur A .

28 Conséquences fondamentales

1. Les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles et $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et $H_{ij}(\lambda)^{-1} = H_{ij}(-\lambda)$.

2. Faire subir à A une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes revient à multiplier A à gauche par un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires (donc de matrices inversibles).

2. Algorithme de Gauss par des produits matriciels.

29 Définition d'une matrice échelonnée par lignes.

Une matrice A est dite échelonnée par lignes lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) Si une ligne est nulle alors toutes les suivantes le sont aussi.
- 2) Si chaque ligne non nulle débute par davantage de zéros que la ligne précédente.

30 Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ scalaires non nuls. A est échelonnée par ligne, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont ses pivots.

31 Définition d'une matrice échelonnée réduite par lignes et du rang d'une telle matrice.

Une matrice A est échelonnée réduite par lignes lorsque :

Ou bien elle est nulle

Ou bien elle est échelonnée, que tous ses pivots valent 1 et que sur la colonne de chaque pivot tous les coefficients autres que le pivot sont nuls.

Alors il existe un entier r compris entre 0 et n telle que A contienne r lignes non nulles et $n - r$ lignes nulles.

Alors, Lorsque A est échelonnée réduite le rang de A est $rg(A) = r = \text{nbre de lignes non nulles de } A$

32 Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes et $rg(A) = 3$.

33 Théorème de Gauss-Jordan. Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

34 Théorème Soit A une matrice de type (n, p) . Il existe une unique matrice R échelonnée réduite par ligne de type (n, p) et une matrice inversible P , carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = PR$.

35 Définition : Soit A une matrice de type (n, p) .

Le rang de A est le rang de la matrice échelonnée et réduite par ligne, équivalente à A . $rg(A) = rg(R)$.

36 Conséquences .

- 1) Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.
- 2) Deux matrices équivalentes par ligne ont le même rang.
- 3) Soit A une matrice carrée d'ordre n . $rg(A) = n$ si et si A est équivalente par lignes à I_n

Le rang d'une matrice A est égal au nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente par ligne à A .

37 Exemple : Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i$ et $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.
Calculer A^2 , $rg(A)$ et Calculer AC Puis résoudre le système linéaire $AX = C$.

3. Application à la résolution de systèmes linéaires

38 Soit le système linéaire $(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$. Les scalaires a_{ij} sont appelés les

coefficients de (S) et $b_1, \dots, b_n$ les second membre.

(S) est échelonnée lorsque en passant d'une ligne de (S) à la suivante, au moins une inconnue « disparaît » (cette inconnue a en fait son coefficient nul).

(S) est de Cramer lorsque $n = p$ et (S) admet une unique solution.

(S) est compatible lorsque (S) admet au moins une solution.

(S) est incompatible lorsque (S) n'admet aucune solution.

A ce système (S) , on associe

1) le système linéaire homogène $(SH): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice (des coefficients) de (S) . Par définition, le rang de $(S) = rg(S) = rg(A)$.

3) $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice du second membre de (S) .

39 Théorème : Si X_0 est une solution particulière de (S) alors les solutions de (S) sont toutes les matrices de la forme $X_0 + Y$ où Y solution de (SH) .

40 Propriété : 1) En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $[(S) \Leftrightarrow AX = B]$ et $[(SH) \Leftrightarrow AX = 0]$.

2) (S) est échelonnée dès que sa matrice A est échelonnée.

3) Echelonner A en lignes et faire en parallèle les mêmes opérations sur le second membre B permet d'échelonner (S) .

41 Théorème de Gauss-Jordan. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

42 Propriété : Un système linéaire (S) est de Cramer si et si (S) est un système à n équations et n inconnues et $rg(S) = n$.

4. Et en colonne ?

43 Théorème : Soit A une matrice de type (n, p) .

Faire subir $C_i \leftrightarrow C_j$ à A revient à multiplier A à droite par T_{ij} .

Faire subir $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A revient à multiplier A à droite par $D_i(\lambda)$.

Faire subir $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ à A revient à multiplier A à droite par $H_{ij}(\lambda)$.

44 Théorème : Soit A une matrice de type (n, p) . Il existe une unique matrice V échelonnée réduite par colonne ^(**) de type (n, p) et une matrice inversible Q , carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = VQ$.

(**) cela signifie que : Soit V est nulle (ce qui signifierait que A est nulle) - Soit V vérifie : 1) si l'une de ses colonnes est nulle toutes les suivantes le sont aussi

2) chaque colonne débute par davantage de 0 que la précédente.

3) chaque colonne non nulle a son premier coefficient non nul égal à 1 appelé pivot

4) le pivot est le seul élément non nul de sa ligne.

45 Théorème (admis): Avec les notations des théorèmes 76 et 78, $rgA = rgR = rgV$.

46 Csq : On peut échelonner une matrice en ligne et/ou en colonne pour obtenir son rang et

$$\forall A \in M_{n,p}(K), rg(A) = rg(A^T) \leq \min(n, p).$$

III Matrices carrées . Ensemble $M_n(K)$.

1. Définition. Opérations. Premières règles de calcul.

47 Définitions : Une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n à coefficients dans K est une matrice n lignes et n colonnes à coefficients dans K . Les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituent la diagonale de A .

On note $M_n(K)$ (et non $M_{n,n}(K)$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K .

48 NB : D'après ce qui précède, toute somme, combinaison linéaire et tout produit de matrices carrées d'ordre n sont des matrices carrées d'ordre n . **Toutes les règles de calcul vues précédemment s'appliquent dans $M_n(K)$.** Donc,

$M_n(K)$ est stable par combinaison linéaire, par addition matricielle, par multiplication externe et par produit matriciel.

49 Définition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . La **trace de A** , notée $tr(A)$, est la somme des coefficients de la diagonale de A . Autrement dit, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

50 Propriétés de la trace A SAVOIR DEMONTRER :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n et α et β deux scalaires.

1. $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$
2. $tr(A^T) = tr(A)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$.

50 bis Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B carrées d'ordre n telles que $AB - BA = I_n$.

51 A SAVOIR DEMONTRER : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice rectangulaire de type (n, p) .

Alors, $tr(AA^T) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} (a_{ij})^2 =$ somme des carrés de tous les coefficients de A .

Démo : Soit A une matrice rectangulaire de type (n, p) Alors $A^T \in M_{p,n}(K)$ et $AA^T \in M_n(K)$.

$$tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n (AA^T)_{ii} \underset{\text{avec } A^T = (u_{ij})}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} u_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{ik}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik}^2 = \text{somme des carrés de tous les coefficients de } A.$$

52 Exercice : Montrer que si A est une matrice à coefficients réels alors : $A = 0 \Leftrightarrow tr(AA^T) = 0$. Que se passe-t-il si A est à coefficients complexes ?

2. Matrices carrées particulières

53 Rappel : On note O ou O_n la matrice carrée d'ordre n nulle et I ou I_n la matrice identité d'ordre n .

a) Matrices diagonales

54 Définition : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n . A est diagonale lorsque tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.

On note parfois $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

On note $D_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K diagonales.

55 Exemple : O_n et I_n sont diagonales.

56 Propriétés : Soit α et β deux scalaires. Si $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ et $L = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ alors $\alpha D + \beta L = \text{diag}(\alpha d_1 + \beta \delta_1, \alpha d_2 + \beta \delta_2, \dots, \alpha d_n + \beta \delta_n)$ et $DL = \text{diag}(\delta_1 d_1, \delta_2 d_2, \dots, \delta_n d_n)$.

Par conséquent, toute combinaison linéaire et tout produit de deux matrices diagonales carrées d'ordre n sont des matrices diagonales carrées d'ordre n . $D_n(K)$ est donc stable par combinaison linéaire (en particulier par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

57 Exercice. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec tous les λ_k distincts. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : A et D commutent si et ssi A est diagonale.

b) Matrices triangulaires

58 Définitions : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n . A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque tous ses coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers $i > j$ (resp $i < j$), $a_{ij} = 0$.

On note $TS_n(K)$ (resp $TI_n(K)$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et triangulaires supérieures (resp. inférieures).

59 Remarques : 1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure alors $A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$ triangulaire inférieure.

2. Les matrices diagonales sont les matrices triangulaires supérieures et inférieures à la fois.

60 Propriétés Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre n sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre n .

Et, Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \delta_1 & * & \dots & * \\ & \delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \delta_n \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 \delta_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 \delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \delta_n \end{pmatrix}$.

$TS_n(K)$ (resp $TI_n(K)$) est donc stable par combinaison linéaire (en particulier, par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

c) Matrices (anti)symétriques

61 Définitions : Soit $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n .

1. A est symétrique lorsque $A^T = A$ ie $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = a_{ji}$.
2. A est anti-symétrique lorsque $A^T = -A$ ie $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = -a_{ji}$.

On note $S_n(K)$ (resp $AS_n(K)$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K symétriques (resp. anti-symétriques).

62 Exemple : 1. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ symétrique et $B = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -e \\ c & e & 0 \end{pmatrix}$ anti-symétrique.

2. Toute matrice diagonale est symétrique.

63 Exercice Montrons que pour toute matrice A (pas nécessairement carrée), AA^T et $A^T A$ sont symétriques.

64 Propriétés :

- 1) La matrice nulle est la seule matrice symétrique et antisymétrique.
- 2) La diagonale d'une matrice anti-symétrique est nulle.

Tapez une équation ici..

65 Propriétés Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) carrées d'ordre n est symétrique (resp. anti-symétrique) carrée d'ordre n .

$S_n(K)$ (resp $AS_n(K)$) est donc stable par combinaison linéaire (par somme et multiplication par un scalaire).

66 Attention : $S_n(K)$ et $AS_n(K)$ ne sont pas stables par produit matriciel car $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 5 \\ 10 & * \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

67 Théorème : Toute matrice M carrée d'ordre n s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique Cette écriture est : $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\text{anti-symétrique}}$.

3. Puissances d'une matrice carrée.

68 Définition Soit $A \in M_n(K)$. Par convention, $A^0 = I_n$.

Par définition, pour tout entier naturel p non nul, $A^p = A^{p-1}A = AA^{p-1} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Si $P(X) = a_0 \underbrace{1}_{=X^0} + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p \in K[X]$ alors par définition, $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p$. P est un polynôme annulateur de A lorsque $P(A) = 0$.

69 NB :

- 1) A^p et $P(A)$ sont alors des matrices carrées d'ordre n .
- 2) Si tel que $P = Q + R$ (resp. $P = QR$) où $(Q, R) \in K[X]^2$ alors $P(A) = Q(A) + R(A)$ (resp. $P(A) = Q(A)R(A)$).

70 Exemples à connaître : Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n et α un scalaire. Alors, $(\alpha A)^p = \alpha^p A^p$.

2. Si $(A, B) \in M_n(K)^2$ tq A et B commutent ie $AB = BA$ alors αA et βB commutent où $(\alpha, \beta) \in K^2$ et $(AB)^p = A^p B^p$.
3. Si $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ alors $D^p = \text{diag}(\delta_1^p, \delta_2^p, \dots, \delta_n^p)$.
4. $(I_n)^p = I_n$ et $(\alpha I_n)^p = \alpha^p I_n$
5. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = n^{p-1} J$. Attention non valable pour $p = 0$.

71 Définition : Une matrice carrée N est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = O_n$.

Le plus petit entier naturel p tel que $N^p = O_n$ s'appelle l'indice de nilpotence. (on a nécessairement $N^p = O_n$ et $N^{p-1} \neq O_n$).

72 NB : Si N est une matrice nilpotente et $\alpha \in K$ alors αN est nilpotente car $(\alpha N)^p = \alpha^p N^p$

72bis Exemples à connaître : 1) Toute matrice carrée d'ordre n de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & 0 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ * & 0 & \\ & \ddots & \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ (ie.

N triangulaire avec diagonale nulle) est nilpotente d'indice au plus n .

73 Proposition : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation.

A et B sont deux matrices carrées d'ordre n et p est un entier naturel.

Si A et B commutent ie. $AB = BA$ alors $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$

et si, de plus, $p \neq 0$ alors $A^p - B^p = (A - B) \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) = (A - B) \left(\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k} \right)$.

74 Cas particulier, pour toute matrice carrée A , I et A commutent donc, $(I + A)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k$

et si, de plus, $p \neq 0$ alors $I - A^p = (I - A) \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k \right)$.

75 Quelques méthodes pour obtenir les puissances d'une matrice carrée M :

76 Ou bien : on calcule quelques itérés M^2, M^3, M^4 pour voir si une formule apparaît. On démontre la conjecture par récurrence.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n tq $n \in \mathbb{N}$.

77 Ou bien : on décompose M comme somme de deux matrices qui commutent et dont on sait calculer les puissances (matrices diagonales, $J = (1)$, matrices nilpotentes ...). Puis, on applique la formule de binôme de Newton. (Cf exemple 50)

Exercice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer M^p tq $p \in \mathbb{N}$.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^p tq $p \in \mathbb{N}$.

78 Ou bien : il existe un polynôme P annulateur de M i.e. un polynôme P tq $P(M) = 0$.

79 SOIT : Je cherche le reste R de la division euclidienne de X^p par P .

Alors, $X^p = P(X)Q(X) + R(X)$ donc $M^p = \underbrace{P(M)}_{=0} Q(M) + R(M) = R(M)$.

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $P(t) = (t-1)(t+2)$. Calculer $P(A)$. En déduire A^p tq $p \in \mathbb{N}$.

80 SOIT : la relation $P(M) = 0$ permet d'obtenir un M^d d'écrire comme combinaison linéaire des premiers itérés de M : par exemple $P(M) = 2M^4 + 4M^3 - M^2 + M - 2I = 0$. Donc, $M^4 = -2M^3 + \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{2}M + I$. On montre alors par récurrence que $\forall k, \exists (a_k, b_k, c_k, d_k) \in \mathbb{R}^4 / M^k = a_k M^3 + b_k M^2 + c_k M + d_k I$ et on essaie d'établir des relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_k), (b_k), (c_k), (d_k)$. On essaiera ensuite de trouver une expression explicite de $(a_k), (b_k), (c_k)$ et (d_k) .

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 1) Ecrire A^2 comme combinaison linéaire de A et I .

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que : $A^n = u_n A + v_n I$.

3) A l'aide des suites α et β telles que $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$, exprimer u_n et v_n en fonction de n puis donner A^n sous forme d'un tableau matriciel.

81 Ou bien on effectue un « changement de base » en trouvant une matrice inversible P telle que : $M = PDP^{-1}$ et D est une matrice dont on sait calculer les puissances ou itérés. Alors, $M^k = PD^k P^{-1}$ (Cf paragraphe suivant).

IV Matrices carrées inversibles. Ensemble $GL_n(K)$.

1. Définition

82 Définition : La matrice A carrée d'ordre n est inversible lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que :

$$AB = I_n = BA.$$

Une telle matrice B est unique, s'appelle l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Ainsi, lorsque A^{-1} existe, elle vérifie $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et inversibles.

NB : une matrice non carrée n'est jamais inversible !

83 Applications : résolution d'équations matricielles, de systèmes linéaires.

Si A est inversible alors : $AB = AC \Leftrightarrow B = C$

Si A est inversible alors : $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

2. Exemples importants

84 Exemples à connaître . ♥ ♥ :

- I_n est inversible et $I_n = I_n^{-1}$. O_n n'est pas inversible
- Toute matrice contenant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.
- Si A et B sont **non nulles** et vérifient $AB = O_n$ alors ni A ni B n'est inversible (valable si A ou B n'est pas carrée).
- Si une ligne (resp. colonne) de A est combinaison linéaire des **autres** lignes (resp. colonnes) de A alors A n'est pas inversible.
- Soit $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ matrice diagonale.
 D est inversible si et ssi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i \neq 0$. Le cas échéant, $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \dots, \frac{1}{\delta_n}\right)$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors, A est inversible $\Leftrightarrow \frac{ad - cb}{\det(A) = \text{determinant de } A} \neq 0$. Et le cas échéant, $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Une matrice nilpotente N (telle que $N^p = 0$) n'est pas inversible mais $I \pm N$ est inversible et $(I - N)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right)$.
- S'il existe un polynôme P **non constant** tel que $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p = O_n$ et $a_0 \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = -\left(\frac{a_1}{a_0} I_n + \frac{a_2}{a_0} A + \dots + \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right)$.
- S'il existe $P = \sum_{k=1}^p a_k X^k = XQ(X)$ tel que : P non constant, $a_0 = 0$, $P(A) = O$ et $Q(A) \neq O$ alors A n'est pas inversible.

3. Opérations sur les matrices inversibles

85 Propriétés : Inverse, produit et transposée de matrices inversibles.

Soit P et Q deux matrices carrées d'ordre n , α scalaire **non nul** et k un entier naturel.

Si P et Q sont inversibles alors P^{-1} , αP , P^T , PQ et P^k sont inversibles et

$(P^{-1})^{-1} = P$ et $(\alpha P)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1}$, $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ et $(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$.

86 NB Une somme ou combinaison linéaire de matrices inversibles n'est pas en général inversible $\nexists \text{ex } I_n + (-I_n) = O_{\text{non inversible}}$

87 $GL_n(K)$ n'est pas stable par addition ni combinaison linéaire mais est stable par produit et passage à l'inverse.

88 Définition : Lorsque P est inversible, on définit P^{-k} avec $k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante : $P^{-k} = (P^{-1})^k$. Et d'après ce qui précède, $P^{-k} = (P^{-1})^k = (P^k)^{-1}$. Ainsi si P est inversible alors on donne un sens à toutes les puissances P^k avec $k \in \mathbb{Z}$.

89 Un résultat très utile à comprendre et savoir retrouver : Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$; si, de plus, B est inversible alors A est inversible et $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = P^{-1}B^kP$.

4. Caractérisations d'une matrice inversible.

89 Lemme : Soit A une matrice de type (n, p) . Il existe une unique matrice R échelonnée réduite par ligne de type (n, p) et une matrice inversible P , carrée d'ordre n et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = PR$.

Démo : D'après le théorème de Gauss Jordan, il existe une unique matrice R échelonnée réduite par ligne équivalente par ligne à A ie. obtenue en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A . Cette suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A se traduit par un produit à gauche de A par une suite finie de matrices d'opérations élémentaires notées $P_1, P_2, \dots, P_m$. Ainsi $R = \underbrace{P_1 P_2 \dots P_m}_{=Q} A = QA$ où Q est inversible car $P_1, P_2, \dots, P_m$ le sont.

Alors $A = \underbrace{Q^{-1}}_{=P} R$.

90 Théorème de caractérisation de l'inversibilité ♥ ♥ : Soit A une matrice carrée d'ordre n

- (a) A est inversible si et ssi il existe une matrice B telle que $BA = I_n$ (b).
 A est inversible si et ssi le système $AX = 0$ a une unique solution (qui est $X = 0_{n,1}$) (c)
 A est inversible si et ssi $\text{rg}(A) = n$ (d)
 A est inversible si et ssi $A \sim_L I_n$ (e)
 A est inversible si et ssi A est un produit fini de matrices d'opérations élémentaires. (f)

90bis Par contraposée : A n'est pas inversible *si et ssi* il existe une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.

91 Conséquence : Soit M une matrice n lignes et p colonnes et P et Q deux matrices carrées inversibles d'ordre n et p .

Alors $rg(M) = rg(PM) = rg(MQ)$. Autrement dit, multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.

Démo : Soient P et Q carrées d'ordre n et p et inversibles. Alors P et Q sont des produits finis de matrices d'opérations élémentaires. Donc multiplier M à gauche par P revient à faire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M et multiplier M à droite par Q revient à faire une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de A . Donc PM et MQ ont le même rang que M .

92 Théorème : A est inversible *si et ssi* il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.

93 Théorème :

1. A est inversible *si et ssi* l'un des systèmes linéaires associés à A est de Cramer.
2. A est inversible *si et ssi* tout système linéaire associé à A est de Cramer.
3. A est inversible *si et ssi* pour toute matrice colonne Y , le système $AX = Y$ a une unique solution. Le cas échéant, l'unique solution de $AX = Y$ est alors, $X = A^{-1}Y$.

94 Théorème : Soit A une matrice carrée d'ordre n .

A n'est pas inversible *si et ssi* l'une de ses lignes (resp. colonnes) est combinaison linéaire de ses autres lignes (resp. colonnes).

Démo : A n'est pas inversible

si et ssi il existe une matrice colonne X non nul tq $AX = 0$ *si et ssi* il existe une matrice carrée B non nulle tq $AB = 0$.

en posant B
la matrice
dont toutes les
colonnes valent X .

$$\text{si et ssi } \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) / \text{l'un } x_j \text{ est non nul et } \sum_{i=1}^n x_i C_i = 0$$

$$\text{si et ssi } \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket / x_j \neq 0 \text{ et } x_j C_j = - \sum_{i \neq j}^n x_i C_i.$$

$$\text{si et ssi } \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket / x_j \neq 0 \text{ et } C_j = - \sum_{i \neq j}^n \frac{x_i}{x_j} C_i.$$

$$\text{si et ssi } \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in K^{n-1} / C_j = - \sum_{i \neq j}^n \lambda_i C_i.$$

ssi et ssi l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres colonnes de A .

A n'est pas inversible *si et ssi* (A^T) n'est pas inversible

ssi et ssi l'une des colonnes de A^T est combinaison linéaire des autres colonnes de A^T .

ssi et ssi l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres lignes de A .

5. Méthodes pratiques pour savoir si une matrice carrée A est inversible et le cas échéant, calculer son inverse.

95 En pratique : pour prouver que A est inversible et le cas échéant, trouver A^{-1} .

96 OU BIEN L'énoncé donne l'expression de A^{-1} . On nomme B la matrice proposée. Dans ce cas, on vérifie simplement que $AB = I_n$.

Alors on peut conclure que A est inversible et $A^{-1} = B$.

97 OU BIEN A a l'une des formes suivantes : diagonale, carrée d'ordre 2, nilpotente, égale à $I \pm N$ avec N nilpotente, produit de deux matrices inversibles, transposée ou puissance d'une matrice inversible. Alors je sais dire si A est inversible ou non et je sais donner A^{-1} lorsqu'elle existe.

98 OU BIEN L'énoncé propose de vérifier que $P(A) = 0$ avec P polynôme. Alors je vais conclure suivant la valeur du terme constant de P .

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} comme combinaison linéaire de A^2 , A et I .

Que peut-on dire de $A + I$? Retrouver alors par une autre formule l'expression de A^{-1} ?

99 OU BIEN L'énoncé ne donne que la matrice A . Je cherche à savoir si A est inversible ou non et le cas échéant à déterminer A^{-1} . Je peux calculer $\det(A)$ (Cf paragraphe suivant) pour savoir si A est inversible mais cela ne donnera pas l'expression de A^{-1} . Je peux répondre aux deux questions en même temps en appliquant l'une des deux méthodes suivantes au choix :

✓ **100 Première méthode :** Je prends $Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ quelconque. Je résous le système $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

- Dès que le système a une équation de compatibilité i.e. $rg(A) \leq n - 1$ (i.e. pour certains Y le système n'a aucune ou a plein de solution) alors A n'est pas inversible.

- Si $\text{rg}(A) = n$ i.e. pour tout Y , le système a une unique solution X alors A est inversible et je lis A^{-1} en écrivant la solution du système sous la forme $X = A^{-1}Y$. (on a $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$)

Exercice : Montrons que $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

✓ **101 Deuxième méthode :** J'échelonne la matrice A en opérant sur ses lignes et je fais en parallèle les mêmes opérations sur I_n .

En effet, il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes telle que : $A \sim_L R$. Je vais faire des opérations élémentaires sur les lignes de A pour obtenir R et en parallèle je fais ces mêmes opérations sur I_n . J'obtiens alors une matrice Q carrée d'ordre n telle que $I_n \sim_L Q$.

- Si $R \neq I_n$ alors A n'est pas inversible.
- Si $R = I_n$ alors A est inversible et il existe P inversible telle que $PA = R = I_n$ avec P produit des matrices des opérations élémentaires effectuées pour passer de A à R . Ainsi, $P = A^{-1}$. Ayant fait subir à I_n les mêmes opérations, j'ai donc $PI_n = P$. Alors, $P = A^{-1}$.

A^{-1} est alors la matrice obtenue en faisant subir à I_n les mêmes opérations que celles faites pour transformer A en I_n .

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que A est inversible et trouver A^{-1} .

102 OU BIEN Si $A = PDP^{-1}$ et D est une matrice inversible alors A est inversible et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que : $AP = PD$. En déduire A^p où $p \in \mathbb{Z}$.

Théorème Soit T triangulaire. Alors T est inversible si et seulement si sa diagonale n'a pas de 0. Et le cas échéant, T^{-1} est triangulaire.