

Des exercices sur le début du chapitre « Matrices » : opérations sur les matrices, opérations élémentaires, systèmes linéaires et rang .

Ex 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A .

En remarquant que $C_1 = -C_3$, vous déterminerez :

1. une matrice colonne X telle que $AX = 0$.
2. le rang de A .

1. Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $AX = aC_1 + bC_2 + cC_3$ donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $AX = 1C_1 + 0C_2 + 1C_3 = 0$.

2. $C_1 = -C_3$ donc $rg(A) \leq 2$ et $A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = B$. Donc, $rg(A) = rg(B) = 2$.

Ex 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$. Trouver rapidement :

1. $rg(A)$.
2. deux matrices colonnes X telles que $AX = 0$.
3. deux matrices lignes L telles que $LA = 0$.
4. les solutions du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. les solutions du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$.
6. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit compatible.

1. Je remarque que $L_2 = 2L_1$ et $L_3 = 3L_1$. Donc, $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $rg(A) = 1$.

2. Je remarque que $2C_1 - C_2 = 0$ et $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Donc $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

On a aussi $C_3 + 3C_1 = 0$ donc $A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

3. Comme $2L_1 - L_2 = 0$ et $3L_1 - L_3 = 0$, $(2 \ -1 \ 0)A = 0$ et $(3 \ 0 \ -1)A = 0$.

4. $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2(x + 2y - 3z) = 1 \\ 3(x + 2y - 3z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2 = 1 \\ 3 = 1 \end{cases}$ IMPOSSIBLE !!

5. $AX = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ 2(x + 2y - 3z) = -12 \\ 3(x + 2y - 3z) = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -6 \\ -12 = -12 \\ -18 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6 - 2y + 3z$.

Donc, $Sol = \left\{ \begin{pmatrix} -6 - 2y + 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} / y, z \text{ réels} \right\}$

6. $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2(x + 2y - 3z) = b \\ 3(x + 2y - 3z) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2a = b \\ 3a = c \end{cases}$. Donc le système est compatible si et seulement si $\begin{cases} 2a = b \\ 3a = c \end{cases}$.

Ex0 Soit (S) un système n équations et n inconnues dont la matrice des coefficients est A . Justifier l'équivalence :

(S) est de Cramer si et seulement si $rg(A) = n$.

(S) est de Cramer si et seulement si (S) admet une unique solution

si et seulement si il existe un système (S') échelonné équivalent à (S) et de la forme (S') :

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1p}x_p = b'_1 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a'_{n-1,p}x_p = b'_{p-1} \\ x_p = b'_p \end{cases}$$

si et seulement si il existe un système (S') échelonné équivalent à (S) et de rang n .

si et seulement si $rg(S) = n$.