CORRIGE du TD 17
Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.
Familles libres -génératrices -bases .

I Espaces vectoriels , famille génératrice

Exercice 0 « COURS »

1) Expliquer pourquoi un K-e-v contenant au moins un vecteur non nul contient une infinité de vecteurs.

Un tel espace vectoriel contient tous les vecteurs colinéaires à ce vecteur non nul ; cela constitue une infinité de vecteurs élément de cet $e.v$.

2) Quel est le seul $K-e-v$ contenant un nombre fini de vecteurs ?

$\{\vec{0}\}$ est le seul e.v contenant un nombre fini de vecteurs. Cet $e.v$ ne contient qu'un seul vecteur

3) Que démontre-t-on par double inclusion ? Et en pratique que fait-on ?

La double inclusion permet de prouver l'égalité entre deux ensembles F et G. En pratique , on considère un élément quelconque de F et on prouve que cet élément est dans G et inversement on considère un élément quelconque de G et on prouve que cet élément est dans F.

4) Soit F et G deux ss-e-v de E tel que F est engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$. Que suffit-il de faire pour prouver que $F \subset G$?

Il suffit de prouver que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont éléments de G pour prouver que $F \subset G$.

5) Soit F et G deux ss-e-v de E. Laquelle des deux inclusions est toujours vraie $F \cap G \subset \{\overrightarrow{O_E}\}$ ou $\{\overrightarrow{O_E}\} \subset F \cap G$? Comment prouve-t-on l'autre lorsqu'elle est vraie ?Laquelle des deux inclusions est toujours vraie $F + G \subset E$ ou $E \subset F + G$? Comment prouve-t-on l'autre lorsqu'elle est vraie?

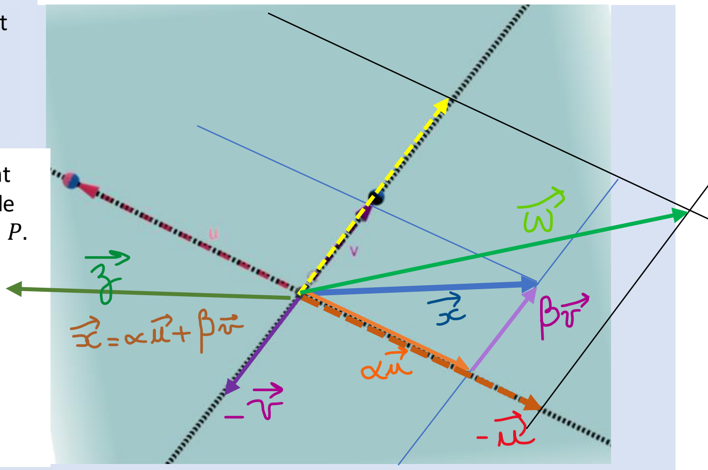
$\{\overrightarrow{O_E}\} \subset F \cap G$ et $F + G \subset E$ sont toujours vraies. Pour prouver les deux inclusion « réciproques » :
on prend un élément arbitraire de $F \cap G$ et on prouve que cet élément est nul
on prend un élément arbitraire de E et on prouve que cet élément s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

6) A quelle condition sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre-t-elle une droite vectorielle ? un plan vectoriel ? ni l'un, ni l'autre ?

Si $\vec{v}$ est non nul et $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre une droite vectorielle.
Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre un plan vectoriel.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nuls alors $(\vec{u}, \vec{v})$ engendre $\{\overrightarrow{O_E}\}$.

7) Dans le plan géométrique P, on considère deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.Placer un vecteur $\vec{x}$ quelconque dans le plan. Décomposer $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$. En déduire un supplémentaire de la droite $vect(\vec{u})$ dans P?

Comme tout vecteur de P s'écrit de manière unique come somme d'un élément colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ i.e. comme somme d'un vecteur de $vect(\vec{u})$ et d'un vecteur de $vect(\vec{v})$. Cela signifie que $vect(\vec{u}) \oplus vect(\vec{v}) = P$. Ainsi, $vect(\vec{v})$ est un supplémentaire de $vect(\vec{u})$ dans P.

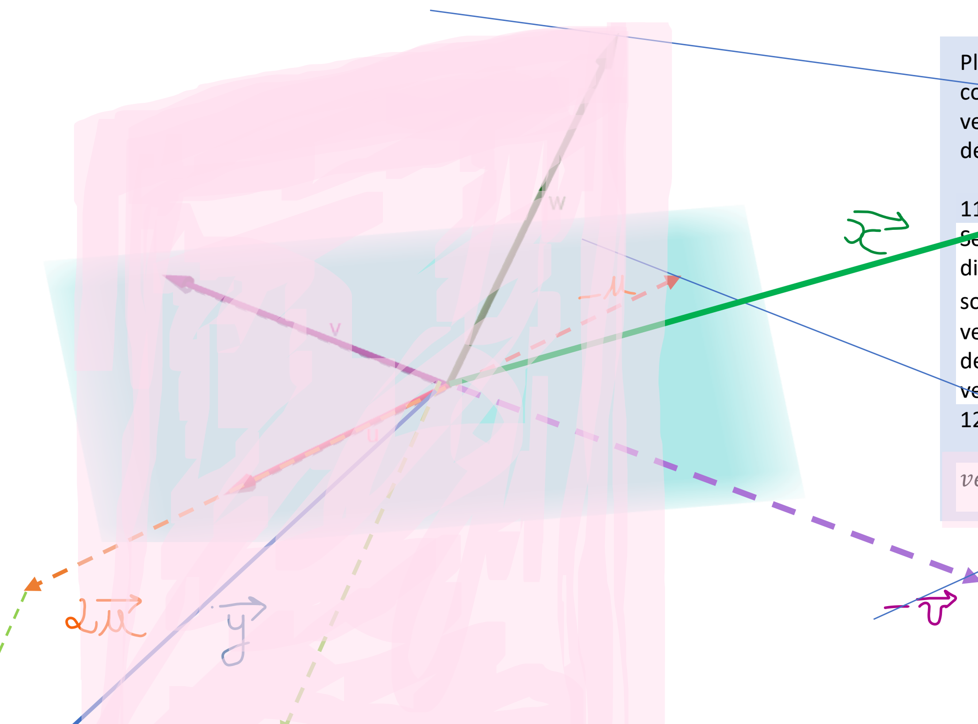


8) Quels sont les ss-e-v de P ?

Les ss-e-v de P ont pour dimension 0, 1 ou 2. De plus, si F est un ss-e-v de P de dimension $2 = dimP$, alors $F = P$. Ainsi, les ss-e-v de P sont $\{\overrightarrow{O_P}\}$, les droites vectorielles engendrées chacune par un vecteur non nul de P et P tout entier.

9) Représenter, dans P, les vecteurs $w = -u + 2v$ et $z = u - v$

10) Dans l'espace géométrique E, on considère deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires.



Placer un vecteur $\vec{x}$ quelconque dans E. Décomposer$\vec{x}$ comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ d'un vecteur colinéaire à $\vec{w}$. En déduire un supplémentaire du plan $vect(\vec{u}, \vec{v})$ dans E?

11) Quels sont les ss-e-v de E ?

Ses ss-e-v sont de dimension 0,1,2 ou 3 et ceux de dimensions trois sont tous égaux à E. Donc les ss-e-v de E sont Ainsi, les ss-e-v de E sont $\{\overrightarrow{O_P}\}$, les droites vectorielles engendrées chacune par un vecteur non nul de E , les plans vectoriels engendrés chacun par deux vecteurs non colinéaires de E et E tout entier.

12) Représenter $x = -u - 2v + w$ et $y = 2u - w$ et $vect(2u - w, u + w)$.

$vect(2u - w, u + w) = vect(u, w)$

11)

12) Décrire autrement $F = vect((1)_{n\in\mathbb{N}})$. Représenter F.
Expliquer pourquoi les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires. Idem avec $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où r_1 et r_2 sont des réels distincts. Décrire autrement $G = vect(({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}})$

F est l'ensemble des suites constantes. F est une droite vectorielle, F est donc représentée par une droite passant par la suite nulle.

$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a(1)_{n\in\mathbb{N}} + b(n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, a+bn=0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0\ (n=0) \\ a+b=0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow a=b=0.$

$({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires car $a({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}} + b({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, a{r_1}^n + b{r_2}^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0\ (n=0) \\ ar_1+br_2=0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} b=-a \\ a(r_1-r_2)=0\end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ r_1\neq r_2}} a=b=0.$

$G = vect(({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(a{r_1}^n + {r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{r_1\ et\ r_2 \\ racines\ de\ (e.c)}} \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-(r_1+r_2)\,u_{n+1}+r_1r_2u_n=0\}$

$H = vect((1)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(an+b)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} = \{((an+b)1^n)_{n\in\mathbb{N}}/a,b\in\mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{1\ racine \\ double\ de\ (e.c)}} \{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-2\,u_{n+1}+u_n=0\}$

13) Décrire autrement $F = vect\big((x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})\big)$. Expliquer pourquoi les fonctions $(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires. Représenter F.

$F = \{(x\mapsto ae^{2x}+be^{-x})/a,b\in\mathbb{R}\} \underbrace{=}_{\substack{2\ et -1 \\ racines\ de\ (e.c)}} \{f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/f''-f'-2f=0\}$

$(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{-x})$ ne sont pas colinéaires car $a(x\mapsto e^{2x})+b(x\mapsto e^{-x})=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, ae^{2x}+be^{-x}=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0\ (n=0) \\ ae^2+b\frac{1}{e}=0\ (n=1)\end{cases} \Rightarrow a = b=0.$ F est donc un plan vectoriel et est représenté par un plan passant par la fonction nulle.

14) Soit P et Q deux polynômes. Comment savoir si P et Q sont colinéaires ou non ? Même question avec deux matrices A et B puis deux n-uplets X et Y , puis deux suites u et v et enfin deux fonctions f et g.

(*)avec toujours le même coeff. de proportionnalité

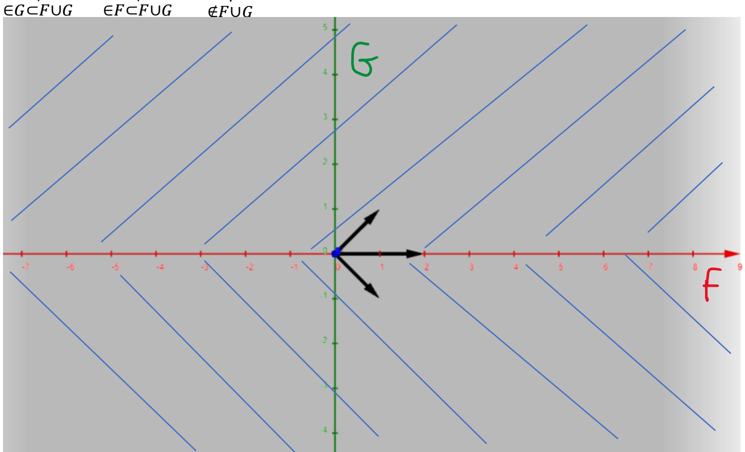
- $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$.
P et Q sont colinéaires sietssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}/\forall k\in\mathbb{N}, a_k=\lambda b_k$ ou $\forall k\in\mathbb{N}, b_k=\lambda a_k$
sietssi les coefficients de P sont proportionnels* aux coefficients de Q ou inversement
- deux matrices A et B sont colinéaires sietssi les coefficients de A sont proportionnels* aux coefficients de B ou inversement.
- deux n-uplets X et Y sont colinéaires sietssi les composantes de X sont proportionnels* aux composantes de Y ou inversement.
- deux suites u et v sont colinéaires sietssi les termes de u sont proportionnels* aux termes de v ou inversement.
- deux fonctions f et g sont colinéaires sietssi les images de f sont proportionnels* aux images de g ou inversement.

Ex 1 Espace vectoriel quelqconque

Soit $(E,+,.)$ un $K-e-v$.

A. Soit F et G deux ss-e-v d'un $K.e.v$ E tq : F et G distincts de E et de $\{\overrightarrow{O_E}\}$.
$E\backslash F$ est – il un ss-e-v de E ? $E\backslash F\cup\{\overrightarrow{O_E}\}$ est –il un ss-e-v de E ? $(F\cup G)$ est-il un ss-e-v de E ?

A. F étant un ss-e-v de E , F contient le vecteur nul donc $E\backslash F$ (l'ensemble des vecteurs de E qui ne sont pas dans F) ne contient pas la vecteur nul donc n'est pas un ss-e-v de E. Et même si on ajoute le vecteur nul à $E\backslash F$, l'ensemble $E\backslash F\cup\{\overrightarrow{O_E}\}$ n'est toujours spas un ss-e-v de E comme le prouve le contre-exemple suivant : prenons $E=\mathbb{R}^2, F = vect\big((1,0)\big). Alors\ E\backslash F\cup\{\overrightarrow{O_E}\} = \{(x,y)/y\neq 0\}\cup\{(0,0)\}$ et $(1,1)\in E\backslash F\cup\{(0,0)\}$ et $(1,-1)\in E\backslash F\cup\{(0,0)\}$ mais $(2,0)=(1,1)+(1,-1)\in F donc\ (2,0)\notin E\backslash F\cup\{(0,0)\}$. J'en déduis que $E\backslash F\cup\{(0,0)\}$ n'est pas stable par addition donc n'est pas un ss-e-v de E.
$(F\cup G)$ n'est pas un ss-e-v de E comme le prouve le contre-exemple suivant : reprenons $E=\mathbb{R}^2, F=vect\big((1,0)\big)\ puis\ G = vect\big((0,1)\big)$. Alors $\underbrace{(0,1)}_{\in G\subset F\cup G} + \underbrace{(1,0)}_{\in F\subset F\cup G} = \underbrace{(1,1)}_{\notin F\cup G}$. Donc $F\cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un ss-e-v de E.



B. Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.

a. Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de F permet d'affirmer que $vect\big(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p\big)\subset G$?

b. Soit F=$\{\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p)\in K^p\}$ et G $=\{\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p)\in K^p\ et\ \alpha_1+..+\alpha_p=0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $vect\big(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p\big)$? Justifier.

c. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.

d. Donner une écriture de $\vec{u}_2$ puis de $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur $\mathcal{G}$ cette écriture est-elle unique ?

e. Compléter que $vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p,\vec{w}) = vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ $sietssi$ $\vec{w}$ … … … … … … ….
f. Déterminer plusieurs familles génératrices de F et de G.

a. F est stable par combinaison linéaire.
b. $F = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)$ car la condition « $\alpha_1+..+\alpha_p = 0$ » nous infirme de G ne contient pas toutes les combinaisons linéaires de $\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p$ alors que F, qui n'impose aucune condition sur $\alpha_1,..,\alpha_p$ les contient toutes. $G \subset F$.
c. $F = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)$ est d'après le cours un ss-e-v de E et $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p)$ est une famille génératrice de F. Montrons que G en est un aussi :
$\forall(\alpha_1,..,\alpha_p) \in K^p, \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p \in E\ donc\ G \subset E.$
Prenons $(\alpha_1,..,\alpha_p) = (0,…,0). Alors\ \alpha_1+..+\alpha_p = 0$. Donc $\vec{O} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p \in G$.
$Soit\ \vec{v},\vec{w}$ deux éléments de G et $a\ et\ b$ deux scalaires.
Posons $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p\ tel\ que\ \alpha_1+..+\alpha_p = 0\ et\ \vec{w} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2+..+\beta_p\vec{u}_p\ tel\ que\ \beta_1+..+\beta_p = 0.$
Alors $a\vec{v} + b\vec{w} = a(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p) + b(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2+..+\beta_p\vec{u}_p) = (a\alpha_1 + b\beta_1)\vec{u}_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)\vec{u}_2+..+(a\alpha_p + b\beta_p)\vec{u}_p\ \ et$
$(a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) + \cdots + (a\alpha_p + b\beta_p) = a(\underbrace{\alpha_1+..+\alpha_p}_{=0\ car\ \vec{v}\in G}) + b(\underbrace{\beta_1+..+\beta_p}_{=0\ car\ \vec{w}\in G}) = 0$. Donc $a\vec{v} + b\vec{w} \in G$.
J'en conclus que $G\ est\ un\ ss-e-v\ de\ E$. Comme de plus $G \subset F, G$ est un ss-e-v de F.Cherchons une famille génératrice de G .
$G = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_1,..,\alpha_p) \in K^p\ et\ \alpha_1 = -\alpha_2-…-\alpha_{p-1}\}$
$G = \{(-\alpha_2-…-\alpha_{p-1})\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2+..+\alpha_p\vec{u}_p/(\alpha_2,..,\alpha_p) \in K^{p-1}\}$
$G = \{\alpha_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)+..+\alpha_p(\vec{u}_p - \vec{u}_1)/(\alpha_2,..,\alpha_p) \in K^{p-1}\} = vect(\vec{u}_2 - \vec{u}_1, \vec{u}_3 - \vec{u}_1,..,\vec{u}_p - \vec{u}_1).$
Donc, $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1, \vec{u}_3 - \vec{u}_1,..,\vec{u}_p - \vec{u}_1)$ est une famille génératrice de G.
d. $\vec{u}_2 = 0\vec{u}_1 + 1\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3+..+0\vec{u}_p$ et $\vec{O} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3+..+0\vec{u}_p$. Ces écritures ne sont a priori pas uniques . Si $\mathcal{G}$ était libre alors ces écritures seraient obligatoirement uniques.
e. $vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p,\vec{w}) = vect(\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)$ $sietssi$ $\vec{w}\ est\ une\ combinaison\ liénaire\ de\ \vec{u}_1,..,\vec{u}_p$.
f. $F = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2,\vec{u}_2,..,-4\vec{u}_p) = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,..,\vec{u}_p,\vec{u}_1 + \vec{u}_2+..+\vec{u}_p)$=(…)

Ex 2 vect(…)

1. Montrer que $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$ .Déterminer les réels k tels que : $vect(P,Q) = vect(P,Q,R)$.

1. **Par équation :**

$$vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3/2y - x = z\right\}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a - b = x\\2a = y\\3a + b = z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = \frac{y}{2} - x\\2a = y\\2y - x = z\end{cases}.$$

De même, $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3/2y - x = z\right\}$. D'où l'égalité souhaitée.

OU Bien par double inclusion

$vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) \subset vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sont éléments de $vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sont des c.l. de $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Or, $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{U} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{X} - \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{Y}\right]$ et $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}}_{V} = \frac{3}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{X} - \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{Y}$. Donc, $vect(U,V) \subset vect(X,Y)$.

On a $U = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y\ et\ V = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}Y$ donc $V - U = X\ et\ V - 3U = Y$. Donc $X \in vect(U,V)\ et\ Y \in vect(U,V)$ et finalement $vect(X,Y) \subset vect(U,V)$.
Ainsi, $vect(U,V) = vect(X,Y)$.

OU Bien par inclusion+dimension

Posons $F = vect(U,V)$ et $G = vect(X,Y)$.
U, V ne sont pas colinéaires donc $dimF = 2$. De même $dimG = 2$. De plus, $U = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y\ et\ V = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}Y\ donc\ U \in G\ et\ V \in G$. Et par suite, $F \subset G$ puisque G est stable par combinaison linéaire. Alors F et un ss-e-v de G . Comme $dimF = dimG$, j'en conclus que $F = G$.

2. Soit $\boldsymbol{P(X) = 1 + 2X + X^2}$, $\boldsymbol{Q(X) = 2 - X - 2X^2}$ et $\boldsymbol{R(X) = -1 + 2X + kX^2}$.

$$vect(P,Q) = vect(P,Q,R) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ l'autre\\inclusion\ est\\toujorus\ vraie}} vect(P,Q,R) \subset vect(P,Q) \Leftrightarrow R \in vect(P,Q) \Leftrightarrow R\ est\ c.l.de\ P\ et\ Q$$

$\Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/R = aP + bQ \Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/-1 + 2X + kX^2 = a(1 + 2X + X^2) + b(2 - X - 2X^2)$

$\Leftrightarrow$le système (S): $\begin{cases}-1 = a + 2b\\2 = 2a - b\\k = a - 2b\end{cases}$ d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est compatible.

Or, (S): $\begin{cases}a + 2b = -1\\2a - b = 2\\a - 2b = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}2a = k - 1\\-b = 2 + 1 - k\\a - 2b = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}a = \frac{1}{2}(k-1)\\b = k - 3\\\frac{1}{2}(k-1) - 2(k-3) = k\end{cases} \Leftrightarrow (S)$: $\begin{cases}a = \frac{1}{2}(k-1)\\b = k - 3\\k = \frac{11}{5}\end{cases}$.

Donc (S) est compatible $\Leftrightarrow k=\frac{11}{5}$. Ainsi, $vect(P,Q)=vect(P,Q,R)\Leftrightarrow k=\frac{11}{5}$.

Ex 4 Ensembles de n-uplets

Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels d'un e-v de référence à préciser ? Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F. On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

a. $F=\{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ et } xz=y\}$

NON F n'est pas un s-e-v de $\mathbb{R}^3$ car F n'est pas stable par multiplication externe : $(1,1,1)\in F \text{ mais } 2(1,1,1)=(2,2,2)\notin F$

b. $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\3x-y+z+2t+w=0\\5x-2y-z+t+3w=0\end{cases}\right\}$.(*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ et $F=vect\left(\left(1,\frac{19}{3},-4,\frac{11}{3},0\right),\left(0,\frac{5}{3},0,\frac{1}{3},1\right)\right)$.

Car $\begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\3x-y+z+2t+w=0\\5x-2y-z+t+3w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\-x-3y-5z+5w=0\\3x-3y-4z+5w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+3z+t-2w=0\\-x-3y-5z+5w=0\\4x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{3}w+\frac{11}{3}x\\y=\frac{1}{3}(19x+5w)\\z=-4x\end{cases}$

c. Soit $n\geq 3$ et $F=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\sum_{k=1}^n kx_k=\sum_{k=1}^n x_k=0\}$ (*)

OUI F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$ et $F=vect\left(\left(\left((k-2),(1-k),0,\dots,\underbrace{1}_{k\text{ème composantes}},0,\dots,0\right)\right)_{k=3..n}\right)$.

Car $\sum_{k=1}^n kx_k=\sum_{k=1}^n x_k=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sum_{k=1}^n kx_k=0\\\sum_{k=1}^n x_k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sum_{k=1}^n kx_k=0\\\sum_{k=2}^n (k-1)x_k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-\sum_{k=3}^n kx_k\\x_2=\sum_{k=3}^n(1-k)x_k\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_1=-2\sum_{k=3}^n(1-k)x_k-\sum_{k=3}^n kx_k=\sum_{k=3}^n(k-2)x_k\\x_2=\sum_{k=3}^n(1-k)x_k\end{cases}$.

Donc $F=\{(\sum_{k=3}^n(k-2)x_k,\sum_{k=3}^n(1-k)x_k,x_3,x_4,\dots,x_n)/(x_3,x_4,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-2}\}$

$$F=\left\{\sum_{k=3}^n x_k\left((k-2),(1-k),0,\dots,\underbrace{1}_{k\text{ème composantes}},0,\dots,0\right)/(x_3,x_4,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-2}\right\}$$

d. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x-y)^2=(x+y)^2\}$.

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/xy=0\}=\{(0,y,z),(y,0,z)/y,z \text{ réels}\}$.

NON F n'est pas un ss-e-v de $\mathbb{R}^3$ car F n'est pas stable par addition : $(0,1,1)\in F \text{ et } (1,0,1)\in F \text{ mais } (0,1,1)+(1,0,1)=(1,1,2)\notin F$.

Ex 9 Dans K^n

4. Soit $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}\right\}$ et $G=\{(a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^5$.
b. Montrer que $F=vect((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1))$
c. Pour quelles valeurs du réel x, $(2x,0,3,-3,x)\in G$?
d. Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).
e. F et G sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$?

a. $G=\{a(1,1,-1,2,1)+b(0,2,-1,2,1)/a,b\in\mathbb{R}^2\}=vect((1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1))$.Comme $(1,1,-1,2,1)$ et $(0,2,-1,2,1)$ sont dans $\mathbb{R}^5$, G est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. $(1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1)$ ne sont clairement pas colinéaires donc $((1,1,-1,2,1),(0,2,-1,2,1))$ est une base de G et $dimG=2$.

$F\subset\mathbb{R}^5$. Prenons $x=y=z=t=w=0$. Alors $\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}$. Donc $(0,0,0,0,0)\in F$.

Considérons $X_1=(x_1,y_1,z_1,t_1,w_1)$ et $X_2=(x_2,y_2,z_2,t_2,w_2)$ deux éléments de F et a_1 et a_2 deux réels.

$a_1X_1+a_2X_2=a_1(x_1,y_1,z_1,t_1,w_1)+a_2(x_2,y_2,z_2,t_2,w_2)=(a_1x_1+a_2x_2,a_1y_1+a_2y_2,a_1z_1+a_2z_2,a_1t_1+a_2t_2,a_1w_1+a_2w_2)$ et

$$\begin{cases}3(a_1x_1+a_2x_2)-(a_1y_1+a_2y_2)+a_1z_1+a_2z_2-(a_1t_1+a_2t_2)+a_1w_1+a_2w_2\\=a_1\left(\underbrace{3x_1-y_1+z_1-t_1+w_1}_{=0}\right)+a_2(\underbrace{3x_2-y_2+z_2-t_2+w_2}_{=0})=0\\\text{de même}, 2(a_1x_1+a_2x_2)-(a_1y_1+a_2y_2)-2(a_1z_1+a_2z_2)-(a_1t_1+a_2t_2)-(a_1w_1+a_2w_2)=0\end{cases}$$

Donc, $a_1X_1+a_2X_2\in F$. Ainsi F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^5$.

b. **OU BIEN par liberté + dimension :** Cherchons une famille génératrice de F pour obtenir une base puis la dimension de F.

$\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\2x-y-2z-t-w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\-x-3z-2w=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y+z-t+w=0\\x=-3z-2w\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-3z-2w)-y+z-t+w=0\\x=-3z-2w\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8z-5w-t\\x=-3z-2w\end{cases}$

Donc, $F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/\begin{cases}y=-8z-5w-t\\x=-3z-2w\end{cases}\right\}=\{(-3z-2w,-8z-5w-t,z,t,w)\in\mathbb{R}^5/(z,w,t)\in\mathbb{R}^3\}$

$= \{z(-3,-8,1,0,0) + w(-2,-5,0,0,1) + t(0,-1,0,1,0)/(z,w,t) \in \mathbb{R}^3\} = vect((-3,-8,1,0,0),(-2,-5,0,0,1),(0,-1,0,1,0))$.

Donc, $((-3,-8,1,0,0),(-2,-5,0,0,1),(0,-1,0,1,0))$ est une famille génératrice de F. De plus, cette famille est libre car échelonnée en 0 (par la droite) . Donc, $(\underbrace{(-3,-8,1,0,0)}_{=U},\underbrace{(-2,-5,0,0,1)}_{=V},\underbrace{(0,-1,0,1,0)}_{=W})$ est une base de F et $dimF = 3$.

Les trois vecteurs $(-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)$ sont éléments de F car ces 5-uplets vérifient les deux équations de F. De plus, ces trois vecteurs forment une famille libre car $a(-2,-6,0,1,1) + b(3,9,-1,-1,0) + c(1,4,-1,-1,1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+3b+c=0 \\ -6a+9b+4c=0 \\ -b-c=0 \\ a-b-c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2a+3b+c=0 \\ -6a+9b+4c=0 \\ b=-c \\ -b=0 \\ a=-c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$. Comme $dimF = 3$, $((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1))$ est libre et maximale dans F donc est une base de F . Et ainsi, $F = vect\big((-2,-6,0,1,1),(3,9,-1,-1,0),(1,4,-1,-1,1)\big)$.

OU bien par double inclusion je remarque que $X = (-2,-6,0,1,1), Y = (3,9,-1,-1,0), Z = (1,4,-1,-1,1)$ vérifient $\begin{cases} Y=-U-W \\ X=V+W \\ Z=-U+V-W \end{cases}$. Donc, $X, Y\ et\ Z$ sont dans Fet par suite $vect(X,Y,Z) \subset F$. De plus, $X+Y-Z = W$ et $\begin{cases} Y+X+Y-Z=-U \\ X-(X+Y-Z)=V \\ X+Y-Z=W \end{cases}$. Donc U, V et W sont des combinaisons linéaires de $X, Y\ et\ Z$ et par conséquent, $F \subset vect(X,Y,Z)$. Ainsi, $F = vect(X,Y,Z)$.

c. $G = \{(a, a+2b, b-a, 2a+b, a+b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

$(2x,0,3,-3,x) \in G \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/(2x,0,3,-3,x) = (a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x \\ a+2b=0 \\ b-a=3 \\ 2a+b=-3 \\ a+b=x \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} a=2x \\ 3a=-6 \\ 3b=3 \\ 2a+b=-3 \\ a+b=x \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} x=-1 \\ a=-2 \\ b=1 \\ -3=-3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ainsi, $(2x,0,3,-3,x) \in G \iff x=-1$.

d.$(x,y,z,t,w) \in G \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/(x,y,z,t,w) = (a,a+2b,b-a,2a+b,a+b)$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x \\ a+2b=y \\ b-a=z \\ 2a+b=t \\ a+b=w \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} a=x \\ 3a=y-2z \\ 3b=y+z \\ 2a+b=t \\ a+b=w \end{cases} \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\begin{cases} x=\frac{1}{2}(y-2z) \\ a=\frac{1}{2}(y-2z) \\ b=\frac{1}{3}(y+z) \\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t \\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w \end{cases}.$$

Ainsi, $G = \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5/\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ (y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=t \\ \frac{1}{2}(y-2z)+\frac{1}{3}(y+z)=w \end{cases}\}$.

e.F et G sont des ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. Notons $B_c = ((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Alors, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow$la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow(\underbrace{(-3,-8,1,0,0)}_{=U},\underbrace{(-2,-5,0,0,1)}_{=V},\underbrace{(0,-1,0,1,0)}_{=W},\underbrace{(1,1,-1,2,1)}_{=A},\underbrace{(0,2,-1,2,1)}_{=B})$ est une base de $\mathbb{R}^5$

$\Leftrightarrow M = mat_{B_c}(U,V,W,A,B)$ est inversible

$\Leftrightarrow rg(M) = 5$.

Or, $mat_{B_c}(U,V,W,A,B) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_5}{\underbrace{\sim}_{c}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_5 \leftarrow C_5 - C_2 - 2C_3 + C_1 + C_4}{\underbrace{\sim}_{c}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc, M n'est pas inversible et ainsi, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.