Familles libres, génératrices, bases d'un K-e-v.
Espaces vectoriels de dimension finie.

Dans tout le chapitre, $(E\ ,+,.)$ est un K-e-v.

I. Familles libres, génératrices et bases d'un K-e-v E.

1. Famille libre, famille liée.

1Def. : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E .

1. $\mathcal{F}$ est **libre lorsque :** la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ est l'écriture (ou la combinaison linéaire) dite triviale $\overrightarrow{O_E} = 0\overrightarrow{u_1} + 0\overrightarrow{u_2} + .. + 0\overrightarrow{u_n}$; **autrement dit , lorsque** : l'équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$ d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$ admet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0, \dots ,0)$ comme unique solution .

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement indépendants.**

2. $\mathcal{F}$ est **liée lorsque** $\mathcal{F}$ n'est pas libre i.e. lorsqu'il existe une écriture non triviale de $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ i.e. lorsqu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,0, \dots ,0)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$. On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement dépendants**.

2Caractérisation (ou déf. équivalente) :

1. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est liée si et ssi l'un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
2. La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre si et ssi aucun de ses n vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

Démo :1. $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est liée$\Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n / (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0,0, \dots ,0)$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$.

$\Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, \exists i_o \in [\![1,n]\!] / \alpha_{i_0} \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$.

$\Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, \exists i_o \in [\![1,n]\!] / \alpha_{i_0} \neq 0$ et $\alpha_{i_0} \overrightarrow{u_{i_O}} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i}$.

$\Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, \exists i_o \in [\![1,n]\!] / \alpha_{i_0} \neq 0$ et $\overrightarrow{u_{i_O}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \frac{-\alpha_i}{\alpha_{i_0}} \overrightarrow{u_i}$.

$\underset{\overrightarrow{\forall i \neq i_0, \beta_i = \frac{-\alpha_i}{\alpha_{i_0}}}}{\overleftarrow{\alpha_{i_0}=1 \text{ et } \forall i \neq i_0, \alpha_i = -\beta_i}}$ $\exists i_o \in [\![1,n]\!], \exists\ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i_0-1}, \beta_{i_0+1}, .., \beta_n) \in K^{n-1} /$ et $\overrightarrow{u_{i_O}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \beta_i \overrightarrow{u_i}$.

$\Leftrightarrow$l'un des vecteurs de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est combinaison linéaire des autres.

Par contraposée on obtient la preuve de 2.

3Conséquence :

1. Une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.
2. Une famille dont deux vecteurs sont égaux est liée.
3. Soit $\mathcal{F}$ famille constituée d'un seul vecteur $\vec{u}$. $\mathcal{F} = (\vec{u})$ est libre sietssi $\vec{u} \neq \vec{O}$. Par conséquent, tout K —e-v contenant un vecteur non nul contient au moins une famille libre.
4. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont (non) colinéaires sietssi la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée (libre).
5. $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont (non) coplanaires sietssi $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée (libre).

4Exemples :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ b & -2 & +4 \end{pmatrix}$. (A, B) est libre sietssi $b \neq 6$.
2) Une matrice A carrée d'ordre n est (non) inversible sietssi la famille formée par ses n colonnes (resp. lignes) est libre (liée).
3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(2x), g(x) = sin^2(x)$ *et* $h(x) = 1$. La famille (f, g, h) est liée car $f = h - 2g$.
4) Soit a *et* b deux nombres complexes distincts. $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires et de même pour $f: (t \mapsto e^{at})$ et $g: (t \mapsto e^{bt})$ Démo : cherchons ttes les manières d'écrire la suite nulle comme c.l de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit$(\lambda, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

$$\lambda(a^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \lambda a^n + \beta b^n = 0 \underset{\substack{n=0 \\ puis\ n=1}}{\underbrace{\Rightarrow}} \begin{cases} \lambda + \beta = 0 \\ \lambda a + \beta b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\beta \\ \lambda \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

De même, cherchons ttes les manières d'écrire la fonction nulle comme $c.l$ de f *et* g. soit $(\lambda, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

$$\lambda(t \mapsto e^{at}) + \beta(t \mapsto e^{bt}) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda e^{at} + \beta e^{bt} = 0 \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \lambda e^{at} + \beta e^{bt} = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, \lambda a e^{at} + \beta b e^{bt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta = 0 \\ \lambda a + \beta b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\beta \\ \lambda(a-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}.$$

5Théorème

1) Echanger deux vecteurs (op1) d'une famille libre, ajouter à un vecteur de cette famille libre un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire (op2) et multiplier un vecteur de cette famille libre par un scalaire non nul (op3) sont trois opérations qui conserve la liberté de la famille (idem avec une famille liée).

2) Toute famille extraite d'une famille libre est libre (Toute famille contenant une famille liée est liée).

3) Si j'ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs déjà présents dans la famille alors la famille obtenue est encore libre.

NB Je ne peux pas ajouter n'importe quel vecteur si je souhaite garder la liberté !!!!

Démo : Soit $\mathscr{L} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ une famille libre de vecteurs de E .

1) **Op1)** Echanger deux vecteurs dans cette famille donnera une famille avec exactement les mêmes vecteurs donc cette nouvelle famille ne contient aucun vecteur combinaison linéaire des autres et est donc encore libre.

Op2) Soit $\beta \in K$ et $\mathscr{L}' = (\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$. Montrons que $\mathscr{L}'$est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$.

$\overrightarrow{O_E} = \alpha_1(\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}) + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_E} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + (\alpha_1\beta + \alpha_2)\overrightarrow{u_2} + \alpha_3\overrightarrow{u_3} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$ **←une écriture de $\overrightarrow{O_E}$comme c.l. de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$**

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\overrightarrow{O_E} = 0\,\overrightarrow{u_1} + 0, \overrightarrow{u_2}, .. + 0, \overrightarrow{u_n} \\ est\ l'unique façon \\ d'écrire\ \overrightarrow{O_E} comme\ c.l. de\ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}}} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1\beta + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}'$est la manière triviale. J'en conclus que $\mathscr{L}'$ est libre. Quitte à changer l'ordre des vecteurs en utilisant op1) je peux affirmer la preuve faite en ajoutant $\beta\overrightarrow{u_2}$ à $\overrightarrow{u_1}$ permet de conclure plus généralement que op2) conserve la liberté d'une famille.

Op3) Soit $\beta \in K^*$ et $\mathscr{L}' = (\beta\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$. Montrons que $\mathscr{L}'$est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$.

$\overrightarrow{O_E} = \alpha_1(\beta\overrightarrow{u_1}) + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_E} = \beta\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \alpha_3\overrightarrow{u_3} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \beta \neq 0} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la seule manière d'écrire$\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}'$est la manière triviale. J'en conclus que $\mathscr{L}'$ est libre. Quitte à changer l'ordre des vecteurs en utilisant op1) je peux affirmer la preuve faite en multipliant $\overrightarrow{u_1}$ par β permet de conclure plus généralement que op3) conserve la liberté d'une famille.

2) Soit $\mathscr{L}' = (\overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ famille obtenue en ôtant $\overrightarrow{u_1}$ à $\mathscr{L}$. Comme aucun vecteur de $\mathscr{L}$ n'est combinaison linéaire des autres, aucun vecteur de $\mathscr{L}'$ n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}'$.

3) Soit $\vec{v}$ un vecteur de E qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$.Soit $\mathscr{L}' = (\vec{v}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$.). Montrons que $\mathscr{L}'$est libre. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$.

$\overrightarrow{O_E} = \alpha_0\vec{v} + \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + \alpha_n\overrightarrow{u_n} \Leftrightarrow \alpha_0\vec{v} = -\alpha_1\overrightarrow{u_1} - \alpha_2\overrightarrow{u_2} - .. - \alpha_n\overrightarrow{u_n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\overrightarrow{u_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\overrightarrow{u_2} - .. - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\overrightarrow{u_n}\ si\ \alpha_0 \neq 0 \\ -\alpha_1\overrightarrow{u_1} - \alpha_2\overrightarrow{u_2} - \alpha_3\overrightarrow{u_3} - .. - \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \vec{O}\ si\ \alpha_0 = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ \vec{v}\ n'est\ pas \\ c.l.de\ \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}}} \begin{cases} IMPOSSIBLE\ si\ \alpha_0 \neq 0 \\ -\alpha_1\overrightarrow{u_1} - \alpha_2\overrightarrow{u_2} - \alpha_3\overrightarrow{u_3} - .. - \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \vec{O}\ i\ \alpha_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{L}'$est libre.

6Conséquence : Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ une famille libre et $\vec{u}_{n+1}$ un vecteur de E . Alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}, \vec{u}_{n+1})$ est libre sietssi $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.

Démo : ⇐ c'est le 3) du théorème précédent.

⇒ la caractérisation d'une famille libre assure que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}, \vec{u}_{n+1})$ est libre alors $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.

7Prop. : Familles libres de référence

1) Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés différents (famille dite échelonnée en degré) est libre.

2) Toute famille d'éléments de K^n ou de $M_{n,1}(K)$ « échelonnée » sans vecteur nul est libre.

Démo : 1) Soit $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ une famille de polynômes tous de degrés différents et non nuls. Comme l'ordre des vecteurs d'une famille n'influe pas sur le caractère libre de cette famille, on peut supposer sans perdre la généralité de cette preuve que $\underbrace{0 \leq}_{car\ \forall k, P_k \neq 0} deg(P_1) < deg(P_2) < \dots < deg(P_m)$.

Montrons que $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ est une famille libre i.e. montrons que $0 = 0P_1 + 0P_2 + \dots + 0P_m$est la seule manière d'écrire le polynôme nul comme combinaison linéaire de $P_1, P_2, \dots, P_m$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in K^m$ tq $\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \dots + \alpha_mP_m = 0$ $(*)$.Montrons que : $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

$(*)$ assure que deg $(\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \dots + \alpha_mP_m) = -\infty(**)$. Imaginons un instant que $\alpha_m \neq 0$.

Alors deg $(\alpha_mP_m) = \deg(P_m) \underbrace{>}_{si\ k<m} \deg(P_k) \geq \deg(\alpha_kP_k)$ si $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Donc, deg $(\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \dots + \alpha_mP_m) = $ deg $(P_m) \neq -\infty$ ce qui contredit $(**)$. J'en déduis que $\alpha_m = 0$.

Alors $(*)$ s'écrit $\alpha_1P_1 + \dots + \alpha_{m-1}P_{m-1} = 0$ et $(**)$ donne deg $(\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \dots + \alpha_{m-1}P_{m-1}) = -\infty$.

Imaginons un instant que $\alpha_{m-1} \neq 0$.....on aboutit de même à une contradiction avec $(**)$… On montre ainsi en itérant ce procédé que $\alpha_m = \alpha_{m-1} = .. = \alpha_1 = 0$. J'en conclus que la famille $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ est libre.

2) Soit $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ une famille de matrices-colonne-n lignes non nulles et telles que chaque colonne commence par un zéro de plus que la précédente. On a $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix}, \dots, C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ $avec\ \forall k, a_{kk} \neq 0$.

Montrons que cette famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est libre i.e. montrons que $0 = 0C_1 + 0C_2 + \dots + 0C_n$est la seule manière d'écrire la matrice colonne nulle comme combinaison linéaire de $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n\ tq\ \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = 0\ (*)$. Montrons que : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

On a : $\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc, $\begin{cases} \alpha_1 a_{11} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = 0 \\ \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = 0 \\ \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + .. + \alpha_n a_{nn} = 0 \end{cases}$. Ce système d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est homogène associé à la matrice triangulaire inférieure $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Or $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$. Donc, le système est de Cramer et admet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0,..,0)$comme unique solution. Ainsi, la famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est libre. J'en déduis que toute famille de $M_{n,1}(K)$ sans colonne nulle et échelonnée (i.e. toute matrice colonne commence par davantage de zéros que la précédentes) est libre puisqu'elle est extraite d'une famille de la forme de sans colonne $(C_1, C_2, \dots, C_n)$. On dira aussi que la famille est échelonnée lorsque toute matrice colonne termine par davantage de zéros que la précédentes. Une telle famille est libre dès qu'elle ne contient pas de colonne nulle.

Des exemples classiques à savoir faire!!

8 Exemple Soit $N \in M_n(K)$ tel que N nilpotente d'indice p . Montrer que $(I, N, N^2, .., N^{p-1})$est libre.

Pour cela, montrons que $0 = 0.I + 0.N + 0.N^2 + .. + 0.N^{p-1}$ est la seule manière d'écrire la matrice nulle comme $c.l.$ de $I, N, N^2, .., N^{p-1}$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in K^p\ tq\ \alpha_0 I + \alpha_1 N + \dots + \alpha_{p-1} N^{p-1} = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$.

Multiplions $(*)\ par\ I, N, N^2, \dots, N^{p-1}$. On obtient (S) : $\begin{cases} \alpha_0 I + \alpha_1 N + \cdots \alpha_{p-3} N^{p-3} + \alpha_{p-2} N^{p-2} + \alpha_{p-1} N^{p-1} = 0 \\ \alpha_0 N + \alpha_1 N^2 + \dots + \alpha_{p-3} N^{p-2} + \alpha_{p-2} N^{p-1} + \underbrace{\alpha_{p-1} N^p}_{=0} = 0 \\ \alpha_0 N^2 + \alpha_1 N^3 + \dots + \alpha_{p-3} N^{p-1} + \underbrace{\alpha_{p-2} N^p + \alpha_{p-1} N^{p+1}}_{=0} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 N^{p-2} + \alpha_1 N^{p-1} + \underbrace{\dots + \alpha_{p-3} N^{2p-5} + \alpha_{p-2} N^{2p-4} + \alpha_{p-1} N^{2p-3}}_{=0} = 0 \\ \alpha_0 N^{p-1} + \underbrace{\alpha_1 N^p + \dots + \alpha_{p-3} N^{2p-4} + \alpha_{p-2} N^{2p-3} + \alpha_{p-1} N^{2p-2}}_{=0} = 0 \end{cases}$.

car, $N^p = 0\ donc, \forall k \in \mathbb{N}, N^{p+k} = N^p N^k = O.N^k = O$.

Donc, (S) : $\begin{cases} \alpha_0 I + \alpha_1 N + \dots + \alpha_{p-3} N^{p-3} + \alpha_{p-2} N^{p-2} + \alpha_{p-1} N^{p-1} = 0\ (L_1) \\ \alpha_0 N + \alpha_1 N^2 + \dots + \alpha_{p-3} N^{p-2} + \alpha_{p-2} N^{p-1} = 0\ (L_2) \\ \alpha_0 N^2 + \alpha_1 N^3 + \dots + \alpha_{p-3} N^{p-1} = 0 (L_3) \\ \vdots \\ \alpha_0 N^{p-2} + \alpha_1 N^{p-1} = 0\ (L_{n-1}) \\ \alpha_0 N^{p-1} = 0\ (L_n) \end{cases}$ est échelonné. Faisons la remontée.

$N^{p-1} \neq 0$. Donc, (L_n) implique $\alpha_0 = 0$. Alors (L_{n-1}): $\alpha_1 \underbrace{N^{p-1}}_{\neq 0} = 0$ implique $\alpha_1 = 0$.Alors (L_{n-2}): $\alpha_2 \underbrace{N^{p-1}}_{\neq 0} = 0$ implique $\alpha_2 = 0$ (…)Et enfin, (L_1): $\alpha_{p-1} N^{p-1} = 0$ implique que $\alpha_{p-1} = 0$. J'en conclus que $0I + 0N + \dots + 0N^{p-1} = O$ est la seule manière d'écrire la matrice nulle comme combinaison linéaire de $I, N, N^2, \dots, N^{p-1}$. La famille $(I, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est donc libre.

9Exemple Soit $\forall k \in [\![0, n]\!], P_k(X) = X^k (X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, P_1, .., P_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.

Tout d'abord, $\forall k \in [\![0, n]\!], deg(P_k) = \deg(X^k) + \deg((X+1)^{n-k}) = k + (n-k) = n$. Donc, $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $(P_0, P_1, .., P_n)$ est libre. Pour cela, montrons que $0 = 0P_0 + 0P_1 + .. + 0P_n$ est la seule manière d'écrire le polynôme nul comme $c.l.$ de $P_0, P_1, .., P_n$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\ tq\ \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0 \widetilde{P_0}(t) + \alpha_1 \widetilde{P_1}(t) + \dots + \alpha_n \widetilde{P_n}(t) = 0$

i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0 (t+1)^n + \alpha_1 t (t+1)^{n-1} + \alpha_2 t^2 (t+1)^{n-2} + \cdots \alpha_{n-1} t^{n-1} (t+1)^n + \alpha_n t^n = 0$.

En particulier pour $t = 0$,on obtient : $\alpha_0 = 0$. Alors $(*)$ s'écrit : $\alpha_1 X^1 (X+1)^{n-1} . + \dots + \alpha_n X^n = O$.

Donc, $(\alpha_1 (X+1)^{n-1} . + \dots + \alpha_n X^{n-1}) \underbrace{X}_{\substack{polynôme \\ non\ nul}} = O$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est intègre, nécessairement, $\alpha_1 (X+1)^{n-1} + \dots + \alpha_n X^{n-1} = 0$.

Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 (t+1)^{n-1} + \alpha_2 t^1 (t+1)^{n-2} + \cdots \alpha_{n-1} t^{n-2} (t+1)^1 + \alpha_n t^{n-1} = 0$.

En particulier pour $t = 0$,on obtient : $\alpha_1 = 0$. Alors $(*)$ s'écrit : $\alpha_2 X^2 (X+1)^{n-2} . + \dots + \alpha_n X^n = O$.

Donc, $(\alpha_2 (X+1)^{n-2} . + \dots + \alpha_n X^{n-2}) \underbrace{X^2}_{\substack{polynôme \\ non\ nul}} = O$. Et nécessairement, $\alpha_2 (X+1)^{n-2} . + \dots + \alpha_n X^{n-2} = 0$.On itère ce procédé et on obtient ainsi, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. A la dernière étape, $(*)$ s'écrit : $\alpha_n \underbrace{X^n}_{\substack{polynôme \\ non\ nul}} = O$.Donc, nécessairement, $\alpha_n = 0$. J'en conclus que $O = 0P_0 + 0P_1 + .. + 0P_n$ est la seule manière d'écrire le polynôme nul comme $c.l.$ de $P_0, P_1, .., P_n$. Et ainsi la famille $(P_0, P_1, .., P_n)$ est libre.

10 Exemple Soit $a_0,..,a_n$ des complexes distincts et$\forall k \in [\![0,n]\!], L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j}(X - a_j)$ Montrer que $(L_0, L_1,..,L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit $k \in [\![0,n]\!], \deg(L_k) = \deg\left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j}(X - a_j)\right) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \deg\left(\frac{1}{a_k - a_j}(X - a_j)\right) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} 1 = n$. Donc, $L_k \in \mathbb{C}_n[X]$. De plus, $\forall j \in [\![0,n]\!]\backslash\{k\}, (X - a_j)$ divise L_k. Donc, tous les $a_j$avec $j \neq k$ sont racines de L_k.
Enfin, $\widetilde{L_k}(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \underbrace{\frac{1}{a_k - a_j}(a_k - a_j)}_{=1} = 1$.

Montrer que $(L_0, L_1,..,L_n)$ est libre. Pour cela, montrons que $O = 0L_0 + 0L_1 +..+0L_n$ est la seule manière d'écrire le polynôme nul comme $c.l.$ de $L_0, L_1,..,L_n$.
Soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^{n+1}\ tq\ \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Alors, $\forall t \in \mathbb{C}, \alpha_0 \widetilde{L_0}(t) + \alpha_1 \widetilde{L_1}(t) + \cdots + \alpha_n \widetilde{L_n}(t) = 0$.
En particulier pour $t = a_0$, $\alpha_0 \underbrace{\widetilde{L_0}(a_0)}_{=1} + \alpha_1 \underbrace{\widetilde{L_1}(a_0)}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\widetilde{L_n}(a_0)}_{=0} = 0$. Donc, $\alpha_0 = 0$.
Pour $t = a_1$, $\alpha_0 \underbrace{\widetilde{L_0}(a_1)}_{=0} + \alpha_1 \underbrace{\widetilde{L_1}(a_1)}_{=1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\widetilde{L_n}(a_1)}_{=0} = 0$. Donc, $\alpha_1 = 0$.En prenant de même, $t = a_2$ puis $t = a_3$ puis…. $t = a_n$, on obtient : $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, ..., \alpha_n = 0$. Ainsi, $O = 0L_0 + 0L_1 +..+0L_n$ est la seule manière d'écrire le polynôme nul comme $c.l.$ de $L_0, L_1,..,L_n$. Autrement dit, $(L_0, L_1,..,L_n)$ est libre.

11Exemple Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts *et* $\forall k \in [\![0,n]\!], f_k : (t \mapsto e^{a_k t})$. Montrer que $(f_0, f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Tout d'abord, $\forall k \in [\![0,n]\!], f_k \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrer que $(f_0, f_1,..,f_n)$ est libre. Pour cela, montrons que $O = 0f_0 + 0f_1 +..+0f_n$ est la seule manière d'écrire la fonction nulle comme $c.l.$ de $f_0, f_1,..,f_n$. Comme l'ordre des vecteurs d'une famille n'influe pas sur son caractère libre, on peut supposer que $a_0 < a_1 <..< a_n$.
Soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^{n+1}\ tq\ \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0 e^{a_0 t} + \alpha_1 e^{a_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{a_n t} = 0$. Imaginons un instant que $\alpha_n \neq 0$.
Alors, $\forall k \in [\![0,n-1]\!], \frac{\alpha_k e^{a_k t}}{\alpha_n e^{a_n t}} = \frac{\alpha_k}{\alpha_n} e^{(a_k - a_n)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0\ i.e.\ \alpha_k e^{a_k t} = o_{+\infty}(\alpha_n e^{a_n t})$. Donc, $\underbrace{\alpha_0 e^{a_0 t} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{a_{n-1} t}}_{\substack{somme\ finie\ de\ fonctions \\ négligeables\ devant\ \alpha_n e^{a_n t} \\ au\ voisinage\ de +\infty}} = o_{+\infty}(\alpha_n e^{a_n t})$.

Par conséquent, , $\alpha_0 e^{a_0 t} + \alpha_1 e^{a_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{a_n t} \sim_{+\infty} \alpha_n e^{a_n t}$. Et on obtient donc $0 \sim_{+\infty} \alpha_n e^{a_n t}$ce qui est absurde car $\alpha_n \neq 0$ donc $\alpha_n e^{a_n t}$ ne s'annule jamais. Ainsi, $\alpha_n = 0$. Il s'en suit que $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0 e^{a_0 t} + \alpha_1 e^{a_1 t} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{a_{n-1} t} = 0$. Imaginons un instant que $\alpha_{n-1} \neq 0$.
Alors de même, on aboutit à l'absurdité : $0 = \alpha_0 e^{a_0 t} + \alpha_1 e^{a_1 t} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{a_{n-1} t} \sim_{+\infty} \alpha_{n-1} e^{a_{n-1} t}$.
On itère ce procédé, on montre ainsi que : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. A la dernière étape, on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0 \underbrace{e^{a_0 t}}_{\neq 0} = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$. J'en conclus que : $(f_0, f_1,..,f_n)$ est une famille libre de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

12Exemple Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts *et* $\forall k \in [\![0,n]\!], f_k : (t \mapsto |t - a_k|)$. Montrer que $(f_0, f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Tout d'abord, $\forall k \in [\![0,n]\!], f_k \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\ et\ f_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a_k\}$ mais n'est pas dérivable en a_k.
Montrer que $(f_0, f_1,..,f_n)$ est libre. Pour cela, montrons que $0 = 0f_0 + 0f_1 +..+0f_n$ est la seule manière d'écrire la fonction nulle comme $c.l.$ de $f_0, f_1,..,f_n$. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\ tq\ \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0|t - a_0| + \alpha_1|t - a_1| + \cdots + \alpha_n|t - a_n| = 0$. Imaginons un instant que $\alpha_n \neq 0$.
Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \underbrace{|t - a_n|}_{=f_n(t)} = \underbrace{-\frac{\alpha_0}{\alpha_n}|t - a_0| - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}|t - a_1| - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}|t - a_{n-1}|}_{=g_n(t)}$. Or, f_n n'est pas dérivable en a_n tandis que g_n est dérivable en $a_n$car g est une somme finie de fonctions dérivables en a_n. On aboutit donc à une absurdité. Ainsi, $\alpha_n = 0$.
Alors, $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0|t - a_0| + \alpha_1|t - a_1| + \cdots + \alpha_{n-1}|t - a_{n-1}| = 0$. Imaginons un instant que $\alpha_{n-1} \neq 0$. Alors de même on obtient l'égalité entre deux fonctions f_{n-1} et g_{n-1} l'une dérivable en a_{n-1}mais pas l'autre. Ainsi, $\alpha_{n-1} = 0$. On itère ce procédé et à a dernière étape on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_0|t - a_0| = 0$. En particulier pour $t = a_0 + 1$, on obtient : $\alpha_0 = 0$. J'en conclus que : $(f_0, f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

13 Exemple Soit $b_1,..,b_p$ des nombres complexes distincts *et* $\forall k \in [\![1,p]\!], u_k$ est la suite géométrique de raison b_k et de premier terme 1 . Montrer que $(u_1,..,u_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Montrer que $(u_1,..,u_p)$ est libre. Pour cela, montrons que $O = 0u_1 + 0u_2 +..+0u_p$ est la seule manière d'écrire la suite nulle comme $c.l.$ de $u_1,..,u_p$. Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{C}^p\ tq\ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = O\ (*)$. Montrons que : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_1 {b_1}^n + \alpha_2 {b_2}^n + \cdots + \alpha_p {b_p}^n = 0$.
En particulier , $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 0\ \ (pour\ n = 0) \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_p b_p = 0\ \ (pour\ n = 1) \\ \alpha_1 {b_1}^2 + \alpha_2 {b_2}^2 + \cdots + \alpha_p {b_p}^2 = 0\ \ (pour\ n = 2) \\ \vdots \\ \alpha_1 {b_1}^{p-1} + \alpha_2 {b_2}^{p-1} + \cdots + \alpha_p {b_p}^{p-1} = 0\ \ (pour\ n = p-1) \end{cases}$. Donc $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ est solution du système linéaire homogène associé à $V_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \vdots & b_p \\ b_1^2 & b_2^2 & \vdots & b_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^{p-1} & b_2^{p-1} & \cdots & b_p^{p-1} \end{pmatrix}$. Or $V_p$est une matrice de Vandermonde donc, $\det(V_p) = \prod_{i=1}^{p-1} \prod_{j=i+1}^{p} (b_j - b_i)$ et par conséquent, $\det(V_p) \neq 0$ car tous les complexes $b_1,..,b_p$ sont distincts. Le système linéaire homogène admet donc l'unique solution $(\alpha_1, ..., \alpha_p) = (0,0, ..., 0)$. J'en conclus que $(u_1,..,u_p)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$.

14 Méthode :

1) Pour montrer qu'une famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre, je vais considérer des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$. Et par déduction, je vais montrer que ces scalaires sont nécessairement nuls. (Cf exemples ci-dessus)
2) Pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs ou pour trouver toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, je vais
   a) Regarder s' il existe une relation de dépendance linéaire évidente entre les vecteurs de cette famille.
   b) Résoudre l'équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \vec{O}$ d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$.

   Les solutions de cette équation sont

   soit uniquement $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0, \dots ,0)$ ce qui signifie que la famille étudiée est libre.

   soit d'autres solutions apparaissent (il y a alors au moins une inconnue secondaire) ce qui signifie que la famille étudiée est liée et les solutions me donnent toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille c'est-à-dire toutes les manières d'écrire certains vecteurs comme combinaison linéaire d'autres.

15 Exemple : Soit E un K —espace vectoriel et $\mathscr{L}= (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$une famille libre de vecteurs de E.

On pose: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$. Etudions la liberté de $\mathscr{F}= (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$. Soit $(a, b, c, d) \in K^4$.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + d\vec{t} = \overrightarrow{O_E} \Leftrightarrow a(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}) + b(-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}) + c(-2\vec{\imath} + \vec{k}) + d(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}) = \overrightarrow{O_E}$$

$$\Leftrightarrow (a - b - 2c + d)\vec{\imath} + (-2a - b + 2d)\vec{\jmath} + (-3a + 3b + c - d)\vec{k} = \overrightarrow{O_E} \text{ ←une écriture de } \overrightarrow{O_E} \text{comme c.l. de } \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{par unicité} \\ \text{de l'écriture de } \vec{O} \\ \text{comme c.l.des} \\ \text{vecteurs } \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}.}} \begin{cases} a - b - 2c + d = 0 \\ -2a - b + 2d = 0 \\ -3a + 3b + c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 2c + d = 0 \\ -3a + 2c + d = 0 \\ -5c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{5}d - \frac{4}{5}d + d = \frac{4}{5}d \\ a = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}d + d\right) = \frac{3}{5}d \\ c = \frac{2}{5}d \end{cases} \text{ et } d \text{ quelconque.}$$

Donc, $\forall d \in K, \frac{3}{5}d\vec{u} + \frac{4}{5}d\vec{v} + \frac{2}{5}d\vec{w} + d\vec{t} = \overrightarrow{O_E}$ et ce sont les seules relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de $\mathscr{F}$.

En particulier, en prenant $d = 1$, on obtient : $\vec{t} = -\frac{3}{5}\vec{u} - \frac{4}{5}\vec{v} - \frac{2}{5}\vec{w}$. Donc l'une des vecteurs de $\mathscr{F}$ est $c.l.$ des autres. La famille $\mathscr{F}$est donc liée.

16 Prop. : Si la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ est libre alors toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.

Démo : Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$ un famille libre de vecteurs de E.

Soit $(a_1, a_2, .., a_n) \in K^n$ et $(b_1, b_2, .., b_n) \in K^n$ tq : $a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + .. + a_n\overrightarrow{u_n} = b_1\overrightarrow{u_1} + b_2\overrightarrow{u_2} + .. + b_n\overrightarrow{u_n}$.

Alors $(a_1 - b_1)\overrightarrow{u_1} + (a_2 - b_2)\overrightarrow{u_2} + .. + (a_n - b_n)\overrightarrow{u_n} = \vec{O}$. **←une écriture de $\overrightarrow{O_E}$comme c.l. de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.**

Donc, par unicité de l'écriture de $\vec{O}$ comme $c.l.$ des vecteurs de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$, $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$. Ainsi, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.Ainsi**,** toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n}$.

17 Def. généralisation : La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est libre lorsque toutes les familles finies extraites de $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ sont libres.
La famille $(\vec{u}_i)_{i\in \mathbb{N}}$ est libre lorsque pour tout entier naturel n , la famille finie $(\vec{u}_i)_{i\in\{0,..,n\}}$ est libre.

18 Exemples :

1)$(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$est une famille libre de $K[X]$ car pour tout entier naturel n, $(X^k)_{k\in\{0,..,n\}}$est une famille de polynômes non nuls et échelonnée en degré donc libre.

2) $\left(f_k : (x \mapsto e^{kx})\right)_{k\in\mathbb{N}}$est une famille libre de vecteurs de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car pour tout entier naturel n, $(f_k)_{k\in\{0,..,n\}}$est une famille de fonctions du type de l'exemple 11 donc libre.

3) $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ car pour tout entier naturel n, $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\{0,..,n\}}$est une famille de suites géométriques toutes de raisons différentes donc cette famille est libre (cf exemple13).

2. Familles génératrices

19 Def. Caractérisation (Rappel) : Soit $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.
1) $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une **famille génératrice** de F (ou engendre F) lorsque $F = vect\ (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$.
2) Si F est un ss-e-v de E alors $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une **famille génératrice** de F lorsque $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ sont des éléments de F et que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$.

20 Méthodes: En exercice, l'énoncé décrit un sous- ensemble F d'un K-e-v E donné. Pour prouver que F est un ss-e-v de E et en trouver une famille génératrice. On a alors deux possibilités :
1) Le « tout en un » : montrer directement que $F = vect\ (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ avec $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Alors on peut conclure que F est un ss-e-v de E et $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une famille génératrice de F.
2) En deux temps : montrer que F est un ss-e-v de E puis prouver que chaque vecteur de F est une combinaison linéaire de vecteurs de $\boldsymbol{F}$: $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$, connus et fixés.
3) On peut aussi utiliser les deux résultats suivants :

21 Prop. rappel : Si $F = vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p})$ et Si $G = vect(\vec{g_1},\dots,\vec{g_q})$ alors $F + G = vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{g_1},\dots,\vec{g_q})$

22 Théorème
1) Echanger deux vecteurs (op1) d'une famille génératrice, ajouter à un vecteur de cette famille un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire (op2) et multiplier un vecteur de cette famille par un scalaire non nul (op3) sont trois opérations qui conserve le caractère générateur de la famille.
2) Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.
3) Si j'ôte à une famille génératrice de E un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, la famille obtenue est encore génératrice de E .
NB Je ne peux pas ôter n'importe quel vecteur si je souhaite garder la genèse !!!!

Démo TD 18 Ex 2.

23Conséquence : $vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}) = vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{f}_{p+1})$ si et ssi $\vec{f}_{p+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}$.

Démo TD 18 Ex 2

24 De même , $vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{x}) = vect(\vec{f_1},\dots,\vec{f_p},\vec{y})$ si et ssi $\vec{x}$ est $c.l$ de $\vec{y},\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}$ et $\vec{y}$ est $c.l$ de $\vec{x},\vec{f_1},\dots,\vec{f_p}$.

25 Généralisation : Soit E un K-e-v. La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est génératrice de E lorsque pour tout $i \in I$, $\vec{u}_i$ est élément de E et que tout vecteur de E est combinaison linéaire (finie) de vecteurs de $(\vec{u}_i)_{i\in I}$; ou de manière équivalente, lorsque $E = vect((\vec{u}_i)_{i\in I})$

3. Bases

26 Def. : Soit E un K-e-v. Une famille de vecteurs est une **base** de E lorsque cette famille est une famille de vecteurs de E, libre et génératrice de E .

27 NB : cette définition s'applique au ss-e-v puisqu'un ss-e-v est un e-v.

28 Théorème ou caractérisation : Soit $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.
$(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une base de E **si et seulement si** tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$.

L'existence est donnée par le caractère générateur.
L'unicité est donnée par la liberté.

Démo : ⇒ Hypothèse : $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une base de E .Alors, par définition d'une base, $\mathscr{B}$ est génératrice de E et libre. Génératrice de E implique que tout vecteur de E s'écrit comme $c.l$ des vecteurs $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ et libre implique, d'après la prop.16, que cette écriture est unique. D'où le résultat souhaité.
⇐Hypothèse : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme $c.l.$ des vecteurs de $\mathscr{B}$.
En particulier, tout vecteur de E s'écrit comme $c.l.$ des vecteurs de $\mathscr{B}$ donc $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre i.e. que $\overrightarrow{O_E} = 0\overrightarrow{u_1} + 0\overrightarrow{u_2} + .. + + 0\overrightarrow{u_n}$ est la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme $c.l.\ de\ \overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$.
Soit $(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n) \in K^n tq\ \overrightarrow{O_E} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$. Alors, $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + .. + + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{O_E} = 0\overrightarrow{u_1} + 0\overrightarrow{u_2} + .. + + 0\overrightarrow{u_n}$
Comme $\overrightarrow{O_E}$ s'écrit de manière unique comme c.l.de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$, je peux affirmer que $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, .., \alpha_n = 0$. Ainsi $\mathscr{B}$ est libre.

29 NB lorsque E peut être un $\mathbb{R}$-e-v et un $\mathbb{C}$-e-v, on précisera s'il s'agit d'une base sur le $\mathbb{R}$-e-v appelée $\mathbb{R}$-base ou sur le $\mathbb{C}$-e-v appelée $\mathbb{C}$-base.

30 Def. : Lorsque $B = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$est une base de E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists!\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{dépendente\ \vec{x}} \in K^n / \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{u_i}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les **composantes** de $\vec{x}$ dans la base B et pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, α_k est sa **composante** selon $\overrightarrow{u_k}$.
$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est le n-uplet des **composantes** de $\vec{x}$ dans la base B.
$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ est la matrice des composantes de $\vec{x}$ dans la base B , on note : $mat_B\vec{x} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

31Exemples de référence :

- Un vecteur $\vec{u}$ non nul forme une base de la droite vectorielle $D = vect(\vec{u})$.
- Deux vecteurs d'un plan vectoriel P non colinéaires forment une base de P.
- Trois vecteurs de l'espace géométrique E non coplanaires forment une base de l'espace géométrique E .
- (1) est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{R}$. (1) est une $\mathbb{C}$- base de $\mathbb{C}$ et $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{C}$.

car tout réel (resp. complexe) x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda.1$ où $\lambda \in \mathbb{R}(resp. \mathbb{C})$ (nécessairement $x = \lambda$); donc, (1) est $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{R}$ *et une* $\mathbb{C}$- base de $\mathbb{C}$. De même, tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a.1 + b.i$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (nécessairement $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$); donc, $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{C}$.

- $\mathscr{B}_c = \big((1,0, \dots ,0), (0,1,0, .. ,0), \dots , (0, \dots ,0,1)\big)$est une base de K^n appelée base canonique.

car prenons $X = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in K^n$. Alors $X = x_1(1,0, \dots ,0) + x_2(0,1,0, \dots ,0) + .. + x_n(0,0, \dots ,1)$. Donc, X est c.l. de $(1,0, \dots ,0), (0,1,0, .. ,0), \dots , (0, \dots ,0,1)$. Ainsi $\mathscr{B}_c$ est génératrice de K^n. De plus, $\mathscr{B}_c$ est échelonnée dans vecteur nul donc est libre. Donc, $\mathscr{B}_c$ est une base de K^n.

- Dans $M_{n,p}(K)$, notons E_{ij} la matrice de type (n, p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est une base de $M_{n,p}(K)$ appelée base canonique.

car prenons $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. Alors $A = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$

$$\Leftrightarrow A = \alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{21}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + .. + \alpha_{np}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + .. + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + .. + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2p} \\ & & & \\ \alpha_{n1} & & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$ $\Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], a_{ij} = \alpha_{ij}$. Donc, il existe une et une seule manière d'écrire une matrice A de $M_{n,p}(K)$ comme $c.l.$ des matrices $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

- Soit n un entier naturel. la famille $(1, X, X^2, \dots , X^n)$est la base canonique de $K_n[X]$. Soit a un scalaire. La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots , (X - a)^n)$ est la base de taylor de $K_n[X]$ en a et les composantes d' un polynôme P de $K_n[X]$ dans cette base de Taylor sont $\left(\frac{P^{(0)}(a)}{0!}, \frac{P^{(1)}(a)}{1!}, \frac{P^{(2)}(a)}{2!}, \dots , \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$(pour $a = 0$ on retrouve la base canonique). La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $K[X]$ *et* $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base Taylor en a de $K[X]$.

car tout polynômes de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme $c.l.$ des polynômes$(1, X - a, (X - a)^2, \dots , (X - a)^n)$ d'après la formule de Taylor sur les polynômes. Et par conséquent, tout polynôme de $K[X]$ s'écrit de manière unique comme $c.l.$ des polynômes$((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'après la formule de Taylor sur les polynômes.

- Posons $f_n: (x \mapsto x^n)$. Alors la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'ensemble des fonctions polynomiales de réelles.

Car toute fonction polynomiale s'écrit de manière unique come $c.l.$ des fonctions f_n tq $n \in \mathbb{N}$.

<u>32 D'autres exemples déjà rencontrés.</u>

- L'ensemble S des solutions de l'équa. diff. $y' + a(x)y = 0$ où a *continue sur* I a pour base (f_0) où $f_0: \left(x \to e^{-A(x)}\right)$ *tq* A primitive de a sur I .

car (f_0) est génératrice de S et libre car constituée d'un seul vecteur non nul.

- Soit a , b des réels. L'ensemble S des solutions de l'équa. diff. $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel de base (f_1, f_2) où

$f_1: (x \to e^{r_1 x})$*et* $f_2: (x \to e^{r_2 x})$ avec r_1 *et* r_2 solutions de $(e.c)$ si $\Delta > 0$
$f_1: (x \to e^{r_0 x})$*et* $f_2: (x \to xe^{r_0 x})$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta = 0$
$f_1: (x \to \cos(\omega x)e^{\rho x})$*et* $f_2: (x \to \sin(\omega x)e^{\rho x})$ avec $r_1 = \rho + i\omega$ *et* $\overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta < 0$

car (f_1, f_2) est génératrice de S et libre. En effet, les deux fonctions ne sont pas colinéaires.

- Soit r cpxe non nul fixé. $((r^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de la droite vectorielle des suites cpxes géométriques de raison r.
- $((1)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
- Soit a , b des réels. L'ensemble S des suites u vérifiant $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est un plan vectoriel de base (u, v) où

$u = ({r_1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $v = ({r_2}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec r_1 *et* r_2 solutions de $(e.c)$ si $\Delta > 0$
$u = ({r_1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $v = (n{r_1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec r_0 solution de $(e.c)$ si $\Delta = 0$
$u = (\cos(n\theta)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $v = (\sin(n\theta)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $r_1 = re^{i\theta}$ $(r \neq 0$ *et* $\theta \not\equiv 0[\pi])$ *et* $\overline{r_1}$ solutions de $(e.c)$ si $\Delta < 0$

car (u, v) est génératrice de S et vérifions que (u, v) est libre. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$tq : $au + bv = 0$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, au_n + bv_n = 0$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, a\cos(n\theta)r^n + b\sin(n\theta)r^n = 0$.
Comme $r^n \neq 0$, *on a*: $\forall n \in \mathbb{N}, a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta) = 0$. En particulier, pour $n = 0$, on obtient $a = 0$ et par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, b\sin(n\theta) = 0$. En particulier pour $n = 1$, $b\sin(\theta) = 0$.Or, $\theta \not\equiv 0[\pi]$, $\sin(\theta) \neq 0$. Donc $b = 0$. J'en déduis que $0u + 0v = 0$ est la seule manière d'écrire la suite nulle comme $c.l.$ de u *et* v.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des suites u périodiques de période p fixée admet pour base la famille $\left(u^{(0)}, u^{(1)}, .. , u^{(p-1)}\right)$ où $\forall k \in [\![0, p - 1]\!], u^{(k)} = (\underbrace{0}_{rang\ 0}, .. , 0, \underbrace{1}_{rang\ k}, 0, \dots .. 0, \underbrace{1}_{rang\ k+p}, 0, \dots .. , 0, \underbrace{1}_{rang\ k+2p}, 0, \dots .)$

Car Soit v une suite p-périodique. $v = \lambda_0 u^{(0)} + \lambda_1 u^{(1)} + .. + \lambda_{p-1} u^{(p-1)} \Leftrightarrow v = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, .. , \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, .. , \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$
$\Leftrightarrow \lambda_0 = v_0, \lambda_1 = v_1, .. , \lambda_{p-1} = v_{p-1}$. Donc toute suite p-périodique s'écrit de manière unique comme $c.l.$ de $u^{(0)}, u^{(1)}, .. , u^{(p-1)}$.

33 Exemple : Déterminer une base de $\boldsymbol{F}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^3/\ \boldsymbol{2x-3y+4z=0}\}$.
$F=vect((3,2,0),(2,0,-1))\ et\ (3,2,0)\ et\ (2,0,-1)$ ne sont clairement pas colinéaires. J'en déduis que $((3,2,0),(2,0,-1))$ est une base de F.

34 Exemple : $M_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, et $M_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Montrons que (M_1,M_2) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et déterminons les composantes de M_3 dans cette base.

Soit $M=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Cherchons à écrire M comme $c.l.$ de $M_1\ et\ M_2$

$M=xM_1+yM_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+2y\\b=2x-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=a\\y=b+2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a+2b\\y=b+2a\end{cases}$.

Donc, $M=(3a+2b)M_1+(b+2a)M_2$ est la seule manière d'écrire M comme $c.l.$ de $M_1\ et\ M_2$. J'en déduis que la famille (M_1,M_2) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Et $M_3=5M_1+3M_2$. Donc $(5,3)$ est le couple des composantes de M_3 dans cette base.

35 Méthode : pour trouver une base d'un K-e-v E, une méthode consiste
1)à trouver une famille génératrice de cet espace.
2) d'étudier toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille.
3) d'éliminer les vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres. Ainsi, je conserve le caractère générateur de ma famille et je gagne de la liberté !!

36 Exemple : $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/(X^2-1)P''-2XP'=0\}$. Déterminons une base de F.
1) Montrons que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$.
$F\subset\mathbb{R}_n[X]$.
Si $P=0$ alors $P'=P''=0$ et $(X^2-1)P''-2XP'=0$. Donc, $0\in F$.
Soit $(P,Q)\in F^2\ et\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors $aP+bQ\in\mathbb{R}_n[X]$ (car $P\ et\ Q$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$qui est stable par c.l.) et

$(X^2-1)(aP+bQ)''-2X(aP+bQ)'=(X^2-1)(aP''+bQ'')-2X(aP'+bQ')=a\left(\underbrace{(X^2-1)P''-2XP'}_{=0\ car\ P\in F}\right)+$

$b\left(\underbrace{(X^2-1)Q''-2XQ'}_{=0\ car\ Q\in F}\right)=0$. Donc, $aP+bQ\in F$.

Ainsi, F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Cherchons une famille génératrice de F.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul tq $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ où $n=\deg(P)\in\mathbb{N}\ et\ a_n=codom(P)\neq0$.
Si P est constant alors $P'=P''=0$ donc $P\in F$.
Si P est de degré 1 alors $P'=codom(P)$et $P''=0$ donc, $P\notin F$.
Prenons $n=deg(P)\geq2$. Alors le terme dominant de$(X^2-1)P''=n(n-1)a_nX^n$ et le terme dominant de$2XP'=2na_nX^n$.
Alors, $P\in F\Leftrightarrow(X^2-1)P''-2XP'=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(X^2-1)P''-2XP'=0\\n(n-1)a_n-2na_n=0\end{cases}\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ a_n\neq0}\begin{cases}(X^2-1)P''-2XP'=0\\n(n-3)=0\end{cases}\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ n\geq2}\begin{cases}(X^2-1)P''-2XP'=0\\n=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(X^2-1)P''-2XP'=0\\P=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0\ et\ a_3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(X^2-1)(6a_3X+2a_2)-2X(3a_3X^2+2a_2X+a_1)=0\\P=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0et\ a_3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-2a_2X^2-2(a_1+3a_3)X-2a_2=0\\P=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0\ et\ a_3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_2=0\ et\ a_1=-3a_3\\P=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0et\ a_3\neq0\end{cases}\Leftrightarrow P=a_3(X^3-3X)+a_0\ et\ a_3\neq0.$

$Ainsi$, les polynômes de F sont les polynômes constants et les polynômes de degré 3 de la forme $a(X^3-3X)+b$ tels que $a\neq0\ et\ b\ réel$. Donc, $F=\{a(X^3-3X)+b/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}=vect((X^3-3X),1)$.
La famille$((X^3-3X),1)$ est donc génératrice de F.
3) De plus, cette famille est échelonnée en degré et ne contient pas le polynôme nul, donc cette famille est libre. Ainsi, $((X^3-3X),1)$ est une base de F qui est donc un plan vectoriel.

37 Exemple : Déterminer une base de $F=vect((f_k)_{k=0..6})$où $f_0=1,f_1:(x\to cosx),f_2:(x\to sinx),f_3:(x\to cos^2x),f_4:(x\to sin^2x),f_5:(x\to\cos(2x)),f_6:(x\to sin2x)$.
On sait déjà que $((f_k)_{k=0..6}$est génératrice de F.
De plus, $f_5=f_3-f_4\ et\ f_0=f_3+f_4$. Donc, $F=vect(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)=vect(f_1,f_2,f_3,f_4,f_6)$.
Montrons que $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_6)\ est\ libre\ i.e.$que la fonction nulle s'écrit de manière unique comme $c.l.$ de f_1,f_2,f_3,f_4,f_6.
Soit $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5tq\ af_1+bf_2+cf_3+df_4+ef_6=0$.Alors $\forall t\in\mathbb{R},acos(t)+bsin(t)+ccos^2(t)+dsin^2(t)+esin(2t)=0$.
En particulier, pour $t=0,a+c=0$
pour $t=\frac{\pi}{2},b+d=0$
pour $t=\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt2}{2}(a+b)+\frac12(c+d)+e=0$
pour $t=\pi,-a+c=0$
pour $t=-\frac{\pi}{2},-b+d=0$.
$L_1\ et\ L_4$ donnent $a=c=0$, $L_2\ et\ L_5$ donnent $b=d=0$ et alors L_3 donnent $e=0$. J'en déduis que (f_1,f_2,f_3,f_4,f_6) est libre. Et ainsi, $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_6)\ est$ une base de F.

4. Dimension

38 Def : Un K-e-v E est **de dimension finie** lorsque E admet au moins une famille génératrice finie.
Sinon E est de dimension infinie.

39 Prop. : Dans e v E de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de E a un nombre d'éléments inférieur ou égal au nombre d'éléments de toute famille génératrice de E.

Démo : Soit E un K-e-v de dimension finie non réduit au K-e-v $\{\vec{0}\}$. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E finie. Soit n le nombre non nul d'éléments de $\mathscr{G}$. Posons $\mathscr{G}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$.
Imaginons un instant que E contienne une famille $\mathscr{L}$ libre ayant $n+1$ vecteurs. Posons $\mathscr{L}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},..,\overrightarrow{e_{n+1}})$.
$\overrightarrow{e_1}$ est $c.l$ des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ (car $\mathscr{G}$ génératrice de E) et non nul (car $\mathscr{L}$ libre). Alors $\exists(a_1,a_2,..,a_n)\in K^n/(a_1,..,a_n)\neq(0,..,0)$ et $\overrightarrow{e_1}=a_1\overrightarrow{u_1}+a_2\overrightarrow{u_2}+..+a_n\overrightarrow{u_n}$. Supposons par exemple $a_1\neq 0$. Donc, $\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{a_1}\overrightarrow{e_1}-\frac{a_2}{a_1}\overrightarrow{u_2}-\cdots-\frac{a_n}{a_1}\overrightarrow{u_n}$. Donc, $\overrightarrow{u_1}$ est c.l. $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$. Par conséquent, tout vecteur de E étant $c.l.$ de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ est $c.l.$ de $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$. Donc, $\mathscr{G}_1=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est aussi génératrice de E.
Alors, $\overrightarrow{e_2}$ est c.l des vecteurs $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ (car $\mathscr{G}_1$ génératrice de E) et non colinéaires à $\overrightarrow{e_1}$ (car $\mathscr{L}$ libre). Alors $\exists(b_1,b_2,..,b_n)\in K^n/(b_2,..,b_n)\neq(0,..,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{u_2}+..+b_n\overrightarrow{u_n}$. Supposons par exemple $b_2\neq 0$. Donc, $\overrightarrow{u_2}=\frac{1}{b_2}\overrightarrow{e_2}-\frac{b_1}{b_2}\overrightarrow{e_1}-\frac{b_3}{b_2}\overrightarrow{u_3}-\cdots-\frac{b_n}{b_2}\overrightarrow{u_n}$. Donc, $\overrightarrow{u_2}$ est c.l. $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_3},..,\overrightarrow{u_n}$. Par conséquent, tout vecteur de E étant $c.l.$ de $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ est $c.l.$ de $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_3},....,\overrightarrow{u_n}$.
Donc, $\mathscr{G}_2=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_3},..,\overrightarrow{u_n})$ est aussi génératrice de E. On itère ce procédé et on obtient que $\mathscr{G}_n=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},..,\overrightarrow{e_n})$ est une famille génératrice de E. Mais alors $\overrightarrow{e_{n+1}}$ est $c.l$ de $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},..,\overrightarrow{e_n}$ ce qui contredit l'hypothèse de liberté de $\mathscr{L}$. J'en déduis qu'une telle $\mathscr{L}$ famille n'existe pas. Ainsi, toutes les familles libres de E ont au plus n éléments. Et plus généralement, une famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice dans tout K-e-v de dimension finie.

40 Conséquence : Tout e-v contenant une famille libre infinie est de dimension infinie.

41 Exemples de référence : $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$est une famille libre et infinie de vecteurs de **$K[X]$ qui est donc de dimension infinie**.
$\left((x\to e^{kx})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre et infinie de vecteurs de **$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou $C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ou C^∞ $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui sont donc de dimension infinie**.
$((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$est une famille libre et infinie de vecteurs de **$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est donc de dimension infinie.**

42 Théo : Dimension d'un e-v- de dimension finie

1. Tout e-v de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$ a une base finie.
2. Toutes les bases dans un ev de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases est appelé la dimension de E et noté $dim(E)$.

$$dim(E)=\underbrace{card(base\ de\ E)}_{(***)}=nbre\ de\ vecteurs\ dans\ une\ base\ quelconque\ de\ E\ .$$

par convention, $dim\{\vec{0}\}=0$.
(***)Le cardinal d'une famille $\mathscr{F}$, notée $card(\mathscr{F})$, est le nombre d'éléments de cette famille $\mathscr{F}$.

Démo : Soit E un K-e-v de dimension finie non réduit au K-e-v $\{\vec{O}\}$.

1) Soit $A=\{card(\mathscr{G})\ /\ \mathscr{G}$ est finie et génératrice de $E\}$. Comme E a au moins une famille génératrice finie, A est non vide et comme $A\subset\mathbb{N}$, A admet un plus petit élément n. Comme $E\neq\{\vec{O}\}$, $n>0$. Il existe donc une famille génératrice de E ayant un nombre n minimum d'éléments (on dit que cette famille est génératrice et minimale).
Considérons une telle famille $\mathscr{G}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ où $n=\min(A)$. Montrons que $\mathscr{G}$ est libre. Imaginons un instant que $\mathscr{G}$ soit liée. Alors l'un des vecteurs de $\mathscr{G}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est $c.l.$ des autres. Supposons que $\overrightarrow{u_1}$ est c.l. de $\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$. Alors, la famille $\mathscr{G}'=(\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est génératrice de E. Mais alors card($\mathscr{G}'$) $=n-1\in A$. Cela contredit la définition de $n=\min(A)$.Ainsi, $\mathscr{G}$est libre et par conséquent, $\mathscr{G}$ est une base de E. J'en conclus que tout K-e-v de dimension finie possède au moins une base et cette base est une famille génératrice de E minimale.
2) Soit $\mathscr{B}$et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.Comme sont libres, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont moins d'éléments de toute famille génératrice de E et sont donc finies et $card(\mathscr{B})\leq n$ et $card(\mathscr{B}')\leq n$. De plus, $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice donc $card(\mathscr{B})\leq card(\mathscr{B}')$. De même, $\mathscr{B}'$ est libre et $\mathscr{B}$ est génératrice donc $card(\mathscr{B})\geq card(\mathscr{B}')$. Ainsi $card(\mathscr{B})=card(\mathscr{B}')$.Donc toutes les bas es dans un K-e-v de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

43 Exemples de référence :

- **Une droite vectorielle est un ev de dimension 1.**
- **$dim_{\mathbb{R}}\ P=2$ où P est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan.**
- **Un plan vectoriel est un ev de dimension 2.**
- **$dim_{\mathbb{R}}\ E=3$ où P est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométriques.**
- **$dim_K\ K=1$ et $dim_{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}=2$.**
- **$dim_K\ K^n=n$.**
- **$dim_K M_{n,p}(K)\ =np$.**
- **$dim_K\ K_n[X]=n+1$.**
- **$dim_K\ K[X]=+\infty$.**
- **$dim_K\ \mathscr{F}(I,K)=+\infty$, $dim_K\ C^k(I,K)=+\infty$, $dim_K\ \ D^k(I,K)=+\infty$, $dim_K\ \ C^\infty(I,K)=+\infty$.**
- **$dim_K\ K^{\mathbb{N}}=+\infty$.**
- Soit a fonction continue sur I . La dimension de l'ensemble des solutions de l'équa. diff. $y'+a(x)y=0$ est 1 .
- Soit a et b réels fixés. La dimension de l'ensemble des solutions de l'équa. diff. $y''+ay'+by=0$ est 2.
- Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Le K-e-v de suites p $-$périodiques de dimension p.
- Le K-e-v des suites arithmétiques est de dimension 2.
- Soit $r\in\mathbb{R}^{+*}$. Le K-e-v des suites géométriques de raison r est de dimension 1.
- Soit a et b réels fixés. Le K-e-v des suites vérifiant: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0$ est de dimension 2.

II. Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Famille libre ou génératrice dans un ev de dimension finie.

44 Théo : BASES dans un e-v- de dimension finie.

$card(famille\ libre\ de\ E) \leq dim(E) \leq card(famille\ génératrice\ de\ E)$.

Soit E un K-e-v de dimension finie $n = dim(E)$.

1. Une famille libre de vecteurs de E a au plus n éléments.
2. Une famille génératrice de E a au moins n éléments.
3. Une famille libre de cardinal n est une base de E (on dit alors que la famille est libre et maximale) .
4. Une famille génératrice de E et cardinal n est une base de E (on dit alors que la famille est génératrice et minimale).

Démo : E *étant* un K-e-v de dimension finie $n = dim(E)$, E admet une base $\mathscr{B}$ et $card(\mathscr{B})= n$.

1. Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de vecteurs de E alors $card(\mathscr{L})$ est inférieur au cardinal de $\mathscr{B}$ génératrice de E, donc $card(\mathscr{L}) \leq n$.
2. Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E alors $card(\mathscr{G})$ est supérieur au cardinal de $\mathscr{B}$ libre dans E, donc $card(\mathscr{G}) \geq n$.
3. Soit $\mathscr{L}$ =$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$une famille libre de vecteurs de E telle que $card(\mathscr{L}) = n$. Montrons que $\mathscr{L}$ est génératrice de E par l'absurde. Imaginons un instant que $\mathscr{L}$ ne soit pas génératrice de E. Alors il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que $\vec{x}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$. Alors la famille $\mathscr{L}$ '=$(\vec{x}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_n})$. est encore libre et $card\ (\mathscr{L}\ ') = n + 1$ ce qui contredit la propriété 1. J'en déduis que $\mathscr{L}$ est génératrice de E et ainsi $\mathscr{L}$ est une base de E.
4. n est le cardinal minimal de toute famille génératrice de E. Et nous avons prouvé (démo42) que toute famille génératrice de cardinal minimal est une base de E . Ainsi, toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

44bis Conséquence : Soit $\mathscr{F}$une famille de vecteurs de E telle que $card(\mathscr{F}) = dim(E) < +\infty$.
Alors, $\mathscr{F}$est une base de E sietssi $\mathscr{F}$ est libre sietssi $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

45 Exemple : Soit n un entier naturel**.** Soit $a_0, .., a_n$ des réels tous distincts et pour tout $\in \{0, \ldots, n\}$, $L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{X-a_i}{a_k-a_i}$ (polynômes de Lagrange). On a montré que $\mathscr{B}= (L_0, \ldots, L_n)$ sont libres dans $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $card(\mathscr{B}) = (n + 1)$ =dim$(\mathbb{R}_n[X])$, on peut affirmer que $\mathscr{B}$ est une base de de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminons les composantes d'un polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathscr{B}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\exists! (b_0, .., b_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(X)$. Déterminons $b_0, .., b_n$en fonction de Pet$a_0, .., a_n$.
On sait que $\widetilde{L_k}(a_j) = \begin{cases} 0\ si\ j \neq k \\ 1\ si\ j = k \end{cases}$. Donc chaque fonction $\widetilde{L_k}$ s'annule en tous les a_j $sauf\ en\ a_k$. Par conséquent,
$\forall j, \tilde{P}(a_j) = \sum_{k=0}^{n} b_k \widetilde{L_k}(a_j) = b_j$. Ainsi, $(\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), .., \tilde{P}(a_n))$ est le $(n + 1)$-uplet des composantes de P dans $\mathscr{B}$.

46 Théorème de complétion et d'extraction : Soit E un K-e-v de dimension finie n.
1)Toute famille libre de vecteurs de E de cardinal p peut être complétée par $n - p$ vecteurs de E bien choisis pour obtenir une base de E. Ces $n - p$ vecteurs de E peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une base connue de E.
2) De toute famille génératrice de E , on peut extraire n vecteurs qui forment une base de E.

Démo : Soit $\mathscr{B}= (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, .., \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
1) Soit $\mathscr{L}$ =$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p})$une famille libre de vecteurs de E où $p \in [\![1, n]\!]$.
Si $p = n$ alors $\mathscr{L}$ est une base de E.
Si $p < n$ alors $\mathscr{L}$ ne peut pas être génératrice de E. Donc, au moins un des vecteurs $\overrightarrow{e_{i_1}}$ de $\mathscr{B}$ n'est pas $c. l.$ des vecteurs de $\mathscr{L}$. (puisque si tous les vecteurs de $\mathscr{B}$sont $c. l.$ des vecteurs de $\mathscr{L}$ alors tout vecteur de E qui est $c. l.$ des vecteurs de $\mathscr{B}$ serait $c. l$ des vecteurs de $\mathscr{L}$ et donc $\mathscr{L}$ serait elle-aussi génératrice de E ce qui n'est pas le cas). Alors, $\mathscr{L}$'=$(\overrightarrow{e_{i_1}}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p})$ est encore une famille libre de vecteurs de E de cardinal $p + 1$.
Si $p + 1 = n$ alors $\mathscr{L}$' est une base de E.
Si $p + 1 < n$ alors $\mathscr{L}$' ne peut pas être génératrice de E. Donc, au moins un des vecteurs $\overrightarrow{e_{i_2}}$ de $\mathscr{B}$n'est pas c.l. des vecteurs de $\overrightarrow{e_{i_1}}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p}$. …
On itère ainsi le procédé $n - p$ fois et on ajoute ainsi à la famille libre $\mathscr{L}$, $(n - p)$ vecteurs de $\mathscr{B}$ bien choisis de sorte d'obtenir une famille libre et de cardinal n donc une base de E.
2) Soit $\mathscr{G}$ =$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p})$une famille génératrice de E où $p \geq n$.
Si $p = n$ alors $\mathscr{G}$ est une base de E.
Si $p > n$ alors $\mathscr{G}$ ne peut pas être libre. Donc, au moins un des vecteurs de $\mathscr{G}$ est $c. l.$ des autres vecteurs de $\mathscr{G}$. Supposons pour simplifier l'écriture que $\overrightarrow{u_1} est\ c. l. de\ \overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p}$ Alors, $\mathscr{G}$'=$(\overrightarrow{u_2}, .., \overrightarrow{u_p})$ est encore une famille génératrice de E de cardinal $p - 1$.
Si $p - 1 = n$ alors $\mathscr{G}$'est une base de E.
Si $p - 1 > n$ alors $\mathscr{G}$'ne peut pas être libre……
On itère ainsi le procédé $p - n$ fois et on ôte ainsi à la famille génératrice $\mathscr{G}$, $(p - n)$ vecteurs bien choisis, la famille restante est génératrice de E et de cardinal n donc une base de E.

47 Méthode:

- Pour compléter une famille libre afin d'obtenir une base de E, il suffit de bien choisir les nouveaux vecteurs parmi ceux d'une base connue de E, en ajoutant un par un chaque vecteur veillant à ce qu'il ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille déjà formée. On aura une technique matricielle très efficace pour compléter.
- Pour obtenir une base de E à partir d'une famille génératrice de E , il suffit d'ôter un par un les vecteurs combinaisons linéaires des autres, il faut pour cela parfois étudier les relations de dépendances linéaires entre les vecteurs de la famille et d'ôter ceux combinaison linéaire des autres.

48 Exemple: Montrer que la famille $\mathscr{F}=\left(\underbrace{1+X+X^2}_{P},\underbrace{2X-X^2}_{Q},\underbrace{3+X}_{R},\underbrace{1-2X^2}_{S}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Etudions les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille. Cherchons tous les réels a,b,c,d tels que $a(1+X+X^2)+b(2X-X^2)+c(3+X)+d(1-2X^2)=0(*)$.

$(*)\Leftrightarrow a+3c+d+(a+2b+c)X+(a-b-2d)X^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+3c+d=0\\a+2b+c=0\\a-b-2d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+3c+d=0\\2b-2c-d=0\\-b-3c-3d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+3c+d=0\\-8c-7d=0\\-b-3c-3d=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a=\frac{13}{8}d\\c=-\frac{7}{8}d\\b=-\frac{3}{8}d\end{cases}$. Donc, $\forall d\in\mathbb{R},\frac{13}{8}d(1+X+X^2)-\frac{3}{8}d(2X-X^2)-\frac{7}{8}d(3+X)+d(1-2X^2)=0$ sont les relations de dépendance linéaire entre les polynômes de $\mathscr{F}$. En prenant $d=-1$, on a $S=\frac{-13}{8}P+\frac{3}{8}Q+\frac{7}{8}R$. S est donc $c.l.$ des autres vecteurs de la famille. Donc $vect(P,Q,R,S)=vect(P,Q,R)$. De plus , lorsque l'on prend $d=0$, ce qui revient à étudier les relations de dépendance linéaire entre P,Q et R , alors nécessairement $a=b=c=0$ce qui prouve que la famille (P,Q,R) est libre. Donc, (P,Q,R) est une famille extraite de $\mathscr{F}$ et est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ dont le cardinal est égal à la dimension 3 de $\mathbb{R}_2[X]$. J'en déduis que (P,Q,R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ extraite de $\mathscr{F}$.

Enfin, $\mathbb{R}_2[X]\underbrace{=}_{\substack{car\ (P,Q,R)base\\ de\ \mathbb{R}_2[X]}}vect(P,Q,R)=vect(P,Q,R,S)$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et (P,Q,R) est une base de$\mathbb{R}_2[X]$ extraite de $\mathscr{F}$.

2. Matrices d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

49 Def.: Soit $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots\overrightarrow{e_n})$ une base d'un K-e-v E de dimension finie n .
•Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ les composantes de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots\overrightarrow{e_n})$ .Alors **la matrice de $\vec{v}$ dans la base B** est la matrice colonne notée $mat_{\mathrm{B}}\,\vec{v}$ et définie par :

$$mat_{\mathrm{B}}\,\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

•Soit $\mathscr{V}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de E . $\forall j\in\{1,..p\}$, notons $(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\dots,\alpha_{nj})$ les composantes de $\overrightarrow{v_j}$ dans B ie. $\overrightarrow{v_j}=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\overrightarrow{e_i}$. Alors **la matrice de la famille** $\mathscr{V}$dans la base $\mathscr{B}$, notée mat $_{\mathrm{B}}$V, est la matrice de type (n,p) définie par :

$$mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\overrightarrow{v_1}&\overrightarrow{v_2}&\cdots&\overrightarrow{v_p}\end{matrix}\\\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1p}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&\alpha_{np}\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\\overrightarrow{e_1}\\\overrightarrow{e_2}\\\vdots\\\text{[redacted]}\\\overrightarrow{e_n}\end{matrix}$$

50 Prop . Soit $\mathscr{B}$ une base de E .
1) $\Delta:\begin{pmatrix}E\to M_{n,1}(K)\\\vec{x}\to mat_B\vec{x}\end{pmatrix}$ est une bijection.
2)Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E , α,β deux scalaires. Alors $mat_{\mathscr{B}}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha mat_{\mathscr{B}}\vec{x}$+$\beta mat_{\mathscr{B}}\vec{y}$.
3) Soit $\mathscr{V}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de E .
$\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$ si et ssi $mat_{\mathscr{B}}\vec{x}$ est combinaison linéaire des matrices $mat_{\mathscr{B}}\overrightarrow{v_k}$. Et dans ce cas, les coefficients des combinaisons linéaires sont les mêmes.

Démo : 1) $\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(K),\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+..+x_n\overrightarrow{e_n}$ est l'unique vecteur de E tel que $X=mat_B\vec{x}=\Delta(\vec{x})$.
Donc Δ $est\ bijective.$
2)Si $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+..+x_n\overrightarrow{e_n}$ et $\vec{y}=y_1\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}+..+y_n\overrightarrow{e_n}$
alors $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=(\alpha x_1+\beta y_1)\overrightarrow{e_1}+(\alpha x_2+\beta y_2)\overrightarrow{e_2}+..+(\alpha x_n+\beta y_n)\overrightarrow{e_n}$;
donc, $mat_{\mathscr{B}}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\vdots\\\alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\alpha mat_{\mathscr{B}}\vec{x}+\beta mat_{\mathscr{B}}\vec{y}$.
3)Posons $\forall k,\overrightarrow{v_k}=\sum_{i=1}^n\alpha_{ik}\overrightarrow{e_i}$ .Alors

$$\vec{x}=\sum_{k=1}^p b_k\overrightarrow{v_k}\Leftrightarrow\vec{x}=\sum_{k=1}^p b_k\left(\sum_{i=1}^n\alpha_{ik}\overrightarrow{e_i}\right)\Leftrightarrow\vec{x}=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^p b_k\alpha_{ik}\right)\overrightarrow{e_i}\Leftrightarrow mat_B\vec{x}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^p b_k\alpha_{1k}\\\sum_{k=1}^p b_k\alpha_{2k}\\\vdots\\\sum_{k=1}^p b_k\alpha_{nk}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow mat_B\vec{x}=\sum_{k=1}^p b_k\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\\alpha_{2k}\\\vdots\\\alpha_{nk}\end{pmatrix}\Leftrightarrow mat_B\vec{x}=\sum_{k=1}^p b_k\,mat_B\vec{v}_k.$$

51 Théorème Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{V}$ une famille de vecteurs de E.
$\mathscr{V}$ est une base de E ssi $mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V}$ est inversible . Et le cas échéant, $(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})^{-1} = mat_{\mathscr{V}}\mathscr{B}$

Démo : Soit $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n})$ base d'un K-e-v E de dimension finie n .et $\mathscr{V} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p})$ une famille de vecteurs de E .
Tout d'abord si $p = card(\mathscr{V}) \neq n = card(\mathscr{B}) = dim(E)$ alors $\mathscr{V}$ ne peut pas être une base de E. Désormais $p = n$.
$\Rightarrow$ Hypo : $\mathscr{V}$ est une base de E.Montrons que : $P = mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V} = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est inversible.
On sait que : $\forall k \in [\![1,n]\!]\ \vec{v_k} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}$. De plus $\mathscr{V}$ est une base de E donc tout vecteur de $\mathscr{B}$ est $c.l.$ des vecteurs de $\mathscr{V}$. Donc, $\forall j \in [\![1,n]\!], \exists! (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \in K^n / \vec{e_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{v_k}$.
Alors $\vec{e_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}.) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{kj}p_{ik}\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}p_{ik}\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}p_{ik})\vec{e_i}$.
Mais, $\vec{e_j} = 0\vec{e_1} + \ldots + 0\vec{e_{j-1}} + 1\vec{e_j} + 0\vec{e_{j+1}} + \ldots + 0\vec{e_n}$ est la seule manière d'écrire le vecteur comme $c.l.$ des vecteurs de $\mathscr{B}$.
Par conséquent, $\forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} a_{kj}p_{ik} = \begin{cases} 1 si\ i = j \\ 0\ si\ i \neq j \end{cases}$ $(*)$.
Or, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}p_{ik}$ est le coefficient ligne i et colonne j de PA où $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = mat_{\mathscr{V}}\mathscr{B}$.
Donc, $(*)$signifie que $PA = I$. J'en déduis que P est inversible et $P^{-1} = A = mat_{\mathscr{V}}\mathscr{B}$.
$\Leftarrow$Hypo : $P = mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V} = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est inversible. Montrons que $\mathscr{V}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n tq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{v_k} = \vec{O}$.
On sait que$\forall k \in [\![1,n]\!]\ \vec{v_k} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}$ .Donc, $\vec{O} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{v_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i})$.
Or, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_k p_{ik}\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ik}\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ik})\vec{e_i}$.
Donc, $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ik})\vec{e_i} = \vec{O}$ **$\leftarrow$une écriture de $\vec{O}$ comme $c.l.$ de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}$.** Comme $\mathscr{B}$ est libre, nécessairement,
$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ik} = 0$. Cela revient à dire que $P\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$. Comme P est inversible, on en déduit que $\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$.
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. Ainsi, $\mathscr{V}$ est libre. Comme $card(\mathscr{V}) = n$ est libre, j'en déduis que $\mathscr{V}$ est une base de E.

52 Exemple : Cherchons pour quelles valeurs du réel a, la famille $\mathscr{F} = \left(\underbrace{(a,1,2,3)}_{X_1}, \underbrace{(0,a,4,3)}_{X_2}, \underbrace{(0,1,a,3)}_{X_3}, \underbrace{(0,1,2,3a)}_{X_4}\right)$ est -elle libre ?

Cette famille $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$.
Donc $\mathscr{F}$ est libre ssi $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ssi $M = mat_B\,\mathscr{F}$ est inversible où B est la base canonique de $\mathbb{R}^4$ssi $det(M) \neq 0$.
$Soit\ B = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$..
Alors, $(a,1,2,3) = a(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 2(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1))\ et\ mat_B X_1 = \begin{pmatrix}a \\ 1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix}$. $De\ même, mat_B X_2 = \begin{pmatrix}0 \\ a \\ 4 \\ 3\end{pmatrix}, mat_B X_3 =$
$..et\ mat_B X_4 = \cdots$.. Donc, $M = mat_B\mathscr{F} = \begin{pmatrix}a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 4 & a & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3a\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}a^+ & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 4 & a & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3a\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 3 & 3 & 3a\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}0 & 1^- & 0 \\ 4-a^2 & a & 2-a \\ 3(1-a) & 3 & 3a-3\end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix}4-a^2 & 2-a \\ 3-3a & 3a-3\end{vmatrix} = -a(2-a)(3-3a)\begin{vmatrix}2+a & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix} =$$

$det(M) = -a(2-a)(3-3a)(-3-a) = 3a(a+3)(a-2)(a-1)$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est libre ssi $a \notin \{0,1,2,-3\}$.

53 Exemple : Montrer que la famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ 2i & -1+i\end{pmatrix}}_{=A}, \underbrace{\begin{pmatrix}i & -2i \\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{=B}\right)$ est libre et la compléter pour constituer une base de $M_2(\mathbb{C})$.
$A\ et\ B$ ne sont clairement pas colinéaires donc (A,B) est libre dans $M_2(\mathbb{C})$.
Soit $B_c = \left(\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}^{=E_{11}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}^{=E_{12}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}^{=E_{21}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}^{=E_{22}}\right)$ la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$.

$Alors, A = -1E_{11} + 2E_{12} + 2iE_{21} + (-1+i)E_{22}$ et $B = iE_{11} - 2iE_{12} + 2E_{21} + 1E_{22}$. Donc, $M = mat_{B_c}(A,B) = \begin{pmatrix}-1 & i \\ 2 & -2i \\ 2i & 2 \\ -1+i & 1\end{pmatrix}$.
$M \underset{C_2 \leftarrow C_2 + iC_1}{\sim_c} \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2i & 0 \\ -1+i & -i\end{pmatrix}$. Donc $M' = \begin{pmatrix}-1 & i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & 1 & 0 \\ 2i & 2 & 0 & 1 \\ -1+i & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + iC_1}{\sim_c} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 1 \\ -1+i & -i & 0 & 0\end{pmatrix}$. Ainsi, M'est inversible.
Or ; $M' = mat_{B_c}(A, B, E_{12}, E_{21})$. J'en déduis que la famille (A, B, E_{12}, E_{21}) est une base de $M_2(\mathbb{C})$.

54 Méthode (Cf exemples ci-dessus) : Grâce à ce théorème 51, on peut donc
- Démontrer qu'une famille est une base.
- Compléter facilement une famille libre par des vecteurs d'une base.
- Trouver un ss-e-v supplémentaire d'un ss-e-v donnée (Cf plus tard).

55 Déf. : Si B_1 et B_2 sont deux bases de E alors $mat_{B_1} B_2$ est appelée la **matrice de passage** de la base B_1 à la base B_2 et $(mat_{B_1} B_2)^{-1} = mat_{B_2} B_1$

56 Théo : Formule de changement de base pour les vecteurs
Soit B_1 et B_2 deux bases de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E .
Notons $P = mat_{B_1}B_2$, $X_1 = mat_{B_1}(\vec{v})$ et $X_2 = mat_{B_2}(\vec{v})$.
Alors , $mat_{B_1}(\vec{v}) = mat_{B_1}B_2 \times mat_{B_2}(\vec{v})$ i.e . $X_1 = PX_2$.

Démo : Posons $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$ et $B_2 = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n})$ et $P = mat_{B_1}B_2 = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de E et $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = mat_{B_1}(\vec{v})$ et $X_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = mat_{B_2}(\vec{v})$.

On a donc, $\forall k \in [\![1,n]\!]\ \vec{u_k} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e_i}$ et $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} b_k\vec{u_k}$.
Alors, $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} b_k(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\vec{e_i}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}b_k\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}b_k\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}b_k)\vec{e_i}$. Alors par unicité de l'écriture de $\vec{v}$ comme c.l. des vecteurs de la base B_1=, $\forall i, a_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}b_k$. Cela se traduit matriciellement par : $X_1 = PX_2$.

57 Exemple : Soit $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$une base d'un K-e-v E . Soit $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}, \vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ $\vec{E}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$est –elle une base de E? Si oui, quelles sont les composantes de $\vec{n} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ dans cette nouvelle base ?

1) $M = mat_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ puis \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$. Donc M est inversible et par conséquent $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E. Alors M est matrice de passage de B à B' i.e. $M = mat_B B'$.

2) $mat_{B'}(\vec{n}) = mat_{B'}B \times mat_B(\vec{n}) = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underbrace{=}_{M^{-1} = \frac{1}{detM}(com(M))^T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ -4x - 4y + 5z \\ 7x + 6y - 8z \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{n} = (x + y - z)\vec{u} + (-4x - 4y + 5z)\vec{v} + (7x + 6y - 8z)\vec{w}$.

3. Ss-e-v dans un e-v de dimension finie .

58 Théo : Soit E un K-e-v de dimension finie. Tout ss-e-v F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Démo :Soit E un K-e-v de dimension finie et F un ss-e-v de E non réduit à $\{\vec{O}\}$. Donc F contient un vecteur $\vec{x}$ *non nul*.Notons n la dimension de E. Toute famille libre de vecteurs de F est une famille libre de vecteurs de E puisque $F \subset E$. Donc une telle famille libre est de cardinal inférieur à n. Considérons $C = \{card(\mathscr{L}) / \mathscr{L}$ famille libre de vecteurs de $F\}$. Alors C est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ majorée par n et non vide car $\mathscr{L}' = (\vec{x})$ est une famille libre de vecteurs de F donc card $\mathscr{L}' = 1 \in C$. Donc C admet un plus grand élément noté p et $p \leq n$ (car toute famille libre est de cardinal inf à n). Il existe donc une famille $\mathscr{L}$ libre de vecteurs de F ayant exactement p vecteurs. Cette famille est nécessairement génératrice de F. En effet si $\mathscr{L}$ n' est pas génératrice de F alors F contient un vecteur qui n'est pas $c.l.$ des vecteurs de $\mathscr{L}$et par conséquent la famille formée par ce vecteur et les vecteurs de $\mathscr{L}$ serait une famille libre de vecteurs de F et de cardinal $p + 1$ ce qui est impossible car $p = \max(C)$). Ainsi, $\mathscr{L}$ est une base de F. Alors $dim(F) = p \leq n$. De plus, $n = p \Leftrightarrow \mathscr{L}$ est libre et maximale dans $E \Leftrightarrow \mathscr{L}$est une base de $E \Leftrightarrow F = E$.

59 Exemple : Les ss-e-v de l'ensemble P des vecteurs du plan sont des ss-e-v de dimension 0, 1 ou 2, ce sont donc : $\{\vec{O}\}$, les droites vectorielles engendrées par un vecteur non nul du plan et le plan tout entier.
Les ss-e-v de l'ensemble E des vecteurs de l'espace géométrique sont des ss-ev de dimension 0, 1 ,2 ou 3 ce sont donc : $\{\vec{O}\}$, les droites vectorielles engendrées par un vecteur non nul de E , les plans vectoriels engendrés par deux vecteurs de E non colinéaires et E tout entier.

60 Théorème : Soit F et G deux ss-e-v d'un K-e-v E.
Soit $B_1 = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p})$ une base du ss-e-v F de E et $B_2 = (\vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ une base du ss-e-v G de E alors
- F et G sont en somme directe si et ssi $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ est libre.
- F et G sont supplémentaires dans E si et ssi $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ est une base de E. Dans ce cas, E est de dimension finie et $dimE = dimF + dimG$.

Démo : 1) $\Rightarrow Hypo$: $F \cap G = \{\vec{O}\}$. Montrons que $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ est libre.

$$a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p} + b_1\vec{g_1} + \dots + b_q\vec{g_q} = \vec{O} \Rightarrow \underbrace{a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p}}_{\in F} = \underbrace{-b_1\vec{g_1} - \dots - b_q\vec{g_q}}_{\in G} \Rightarrow \begin{cases} a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p} \in F \cap G \\ -b_1\vec{g_1} - \dots - b_q\vec{g_q} \in F \cap G \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car\ F \cap G\ ne \\ contient\ que\ \vec{O}}} \begin{cases} a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p} = \vec{O} \\ -b_1\vec{g_1} - \dots - b_q\vec{g_q} = \vec{O} \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car\ B_1 et B_2 \\ sont\ libres}} \begin{cases} a_1 = \dots = a_p = 0 \\ b_1 = \dots = b_q = 0 \end{cases}$$ J'en déduis que $(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ est libre.

$\Leftarrow Hypo$: $U = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q})$ est libre. Montrons que $F \cap G = \{\vec{O}\}$. $\vec{O} \in F \cap G$ (car $F \cap G$ est un ss-e-v de E)

$$\vec{x} \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} \vec{x} \in F \\ \vec{x} \in G \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car\ B_1 base\ de\ F \\ et\ B_2 base\ de\ G}} \begin{cases} \vec{x} = a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p} \\ \vec{x} = b_1\vec{g_1} + \dots + b_q\vec{g_q} \end{cases} \Rightarrow a_1\vec{f_1} + \dots + a_p\vec{f_p} - (b_1\vec{g_1} + \dots + b_q\vec{g_q}) = \vec{O}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ U\ est\ libre}} \begin{cases} a_1 = \dots = a_p = 0 \\ b_1 = \dots = b_q = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{O}$$

Ainsi, $F \cap G = \{\vec{O}\}$.

2)On sait déjà que $vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q) = F + G$.

F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow F + G = E$ et F et G sont en somme directe.

$\Leftrightarrow\ vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q) = E$ et $(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q) libre.$

$\Leftrightarrow\ U = (\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q)$ base de E.

$\Rightarrow E$ est de dimension finie et $dim(E) = card(U) = p + q = dim(F) + dim(G)$.

61 conséquence : Si F et G sont deux ss-e-v supplémentaires dans un K-e-v de dimension infinie, alors F ou/et G est de dimension infinie.

62 Théorème : Soit E un K-e-v de dimension finie. Tout ss-e-v de E de dimension finie admet un supplémentaire dans E .

Démo : Soit F un ss-e-v non nul du K-e-v E de dimension finie n. On pose $p = dim(F) \geq 1$. Soit $B_1 = (\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p)$ une base de F. Alors B_1 est une famille libre de vecteurs de E. Donc, le théorème de complétion assure que l'on peut compléter B_1 par une famille B_2 de vecteurs de E bien choisis. La famille B qui réunit les vecteurs de $B_1 et\ B_2$ est alors une base de E. Je pose alors $G = vect(B_2)$. Alors B_2 est une base de G (car B_2 , extraite de B , est libre et, par déf°, génératrice de G). Alors le théorème 60 assure que F et G sont supplémentaires dans E.

Si $F = \{\vec{O}\}$ alors l'unique supplémentaire de F dans E est E.

63 Méthode : Soit F un ss-e-v de E alors $p = dimF \leq dimE = n$. Pour construire un supplémentaire dans E du ss-e-v $F\ de\ E$, il suffit de:

1) compléter une base de F , qui est une famille libre de vecteurs de E , par $(n-p)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de E afin d'obtenir une base de E . Ces $n-p$ vecteurs forment alors une famille libre.
2) définir , G le ss-e-v de E engendré par ces $n-p$ vecteurs . Ces $n-p$ vecteurs forment alors une base de G
3) conclure , en utilisant le théo60 , que G est un supplémentaire de F dans E .

64 Exemple : Soit $F = \{A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2} \in M_3(\mathbb{R}) / \forall i \in [\![1,3]\!], \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 0\}$. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ supplémentaire de F dans $M_3(\mathbb{R})$.

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} / \forall k \in [\![1,3]\!], (a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3 et\ a_k + b_k + c_k = 0\right\}.$$

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -a_1-b_1 \\ a_2 & b_2 & -a_2-b_2 \\ a_3 & b_3 & -a_3-b_3 \end{pmatrix} / \forall k \in [\![1,3]\!], (b_k, a_k) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$F = \left\{a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_1} + b_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_1} + a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_2} + b_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2} + a_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A_3} + b_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=B_3} / \forall k \in [\![1,3]\!], (b_k, a_k) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$F = vect(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)$. Ainsi F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.De plus, $U_1 = (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)$ est génératrice de F. Montrons que U_1 est libre. Soit $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) \in \mathbb{R}^6$tels que $a_1A_1 + b_1B_1 + a_2A_2 + b_2B_2 + a_3A_3 + b_3B_3 = O$.

Alors $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -a_1-b_1 \\ a_2 & b_2 & -a_2-b_2 \\ a_3 & b_3 & -a_3-b_3 \end{pmatrix} = O$. Donc, $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$. Donc, U_1 est libre.

Ainsi, $U_1 = (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)$ est une base de F. Ainsi, $dimF = card(U_1) = 6$.

Complétons matriciellement la famille libre U_1 pour obtenir une base de $M_3(\mathbb{R})$.

Soit $B_c = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23,}E_{31}, E_{32}, E_{33})$ $la\ base\ canonique\ de\ M_3(\mathbb{R})$.

Soit $M = mat_{B_c}(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est échelonnée, complétons par trois colonnes bien choisies de sorte de conserver cet échelonnement et d'obtenir une matrice inversible.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = mat_{B_c}(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, E_{33}, E_{13}, E_{23,})$ est inversible. Donc,

$(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, E_{33}, E_{13}, E_{23,})$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$. Posons alors $G = vect(E_{33}, E_{13}, E_{23,})$.Alors le théorème 60 assure que G est un supplémentaire de F dans $M_3(\mathbb{R})$.

65 Prop. : Soit E un K-e-v de dimension finie.
1) Si F et G sont deux sous-e-v de E supplémentaires dans E alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
2) Si F et G sont deux sous-e-v quelconques de E alors $dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$.

Démo : 1) déjà démontré (théo60).
2) Soit F et G deux ss-e-v de E. Travaillons dans le K-e-v $F+G$.
$F \cap G$ est un ss-e-v de F et F est de dimension finie. Donc, $F \cap G$ admet un supplémentaire H dans F.
Montrons que G et H sont supplémentaires dans $F+G$.
H est un ss-e-v de F et F est un ss-e-v de $F+G$ donc, H est un ss-e-v de $F+G$. G est aussi un ss-e-v de $F+G$.
Montrons que $G \cap H = \{\vec{O}\}$. $\vec{O} \in G \cap H$. Montrons que $\vec{O}$ est le seul vecteur de $G \cap H$. Soit $\vec{x} \in G \cap H$.
Alors $\vec{x} \in H$ donc $\vec{x} \in F$.De plus, $\vec{x} \in G$ donc $\vec{x} \in F \cap G$. Mais alors $\vec{x} \in H \cap (F \cap G)$. Or $F \cap G$ et H sont supplémentaires dans F. Donc $H \cap (F \cap G)$= $\{\vec{O}\}$. Et ainsi, $\vec{x} = \vec{O}$. J'en conclus que $G \cap H = \{\vec{O}\}$.
Montrons que $G + H = F + G$. $H \subset F$ $donc$, $G + H \subset F + G$.Montrons que $F + G \subset G + H$.
Soit $\vec{x} \in F+G$. Alors il existe $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$ tq : $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$. Or, $F \cap G \oplus H = F$.Donc, il existe $\vec{t} \in F \cap G$ et $\vec{h} \in H$ tq : $\vec{f} = \vec{t} + \vec{h}$. Alors,
$\vec{x} = \underbrace{\vec{t}}_{\in F\cap G \subset G} + \underbrace{\vec{h}}_{\in H} + \underbrace{\vec{g}}_{\in G} = \underbrace{\vec{h}}_{\in H} + \underbrace{\vec{t} + \vec{g}}_{\in G} \in H + G$. Ainsi, $F + G \subset G + H$.

66 Prop.: Soit E un K-e-v de dimension finie et F et G deux sous-e-v de E.
F et G sont supplémentaires dans E si et ssi $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
si et ssi $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démo : 1) F et G sont supplémentaires dans E $\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $F + G = E$.
$\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim(F+G) = \dim(E)$.
$\Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$.
$\Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
$\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
2) F et G sont supplémentaires dans E $\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $F + G = E$.
$\Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0$ et $\dim(F+G) = \dim(E)$.
$\Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 0$ et $\dim(F+G) = \dim(E)$.
$\Leftrightarrow \dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) = 0$ et $F + G = E$.

67Exemple : un hyperplan H dans un K-e-v de dimension n est un $ss-e-v$ de E de dimension $n-1$ et
Si H est un hyperplan de E alors : $vect(\vec{a})$ est un supplémentaire de H dans E sietssi $\vec{a} \notin H$.

Démo : Soit E un K-e-v de dimension finie n.
1) Un hyperplan H de E est est un ss-e-v dont un supplémentaire est une droite D.
Alors $dimH + dimD = dimE$ i.e. $dimH = dimE - dimD = n - 1$.
2) Soit $\vec{a} \in E$ non nul et $D = vect(\vec{a})$.Alors, $\dim(D) + \dim(H) = 1 + (n-1) = n$. Par conséquent,
$vect(\vec{a}) \oplus H = E \underbrace{\Leftrightarrow}_{prop66} vect(\vec{a})$ et H sont en somme directe $\Leftrightarrow H \cap vect(\vec{a}) = \{\vec{O}\} \Leftrightarrow \vec{a} \notin H$.

III Rang d'une famille de vecteurs.

68 Définition : Soit $\mathcal{V} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})$ une famille de vecteurs d'un e.v E .(E n'est pas forcément de dimension finie)
Le **rang de** $\mathcal{V}$, noté $rg(\mathcal{V})$, est la dimension du sous –espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}$.
Autrement dit , $rg(\mathcal{V}) = dim(vect(\mathcal{V}))$

69 Exemple : retour sur l'exemple 37 .Déterminer $rg((f_k)_{k=0..6})$où $f_0 = 1, f_1 : (x \to cosx), f_2 : (x \to sinx), f_3 : (x \to cos^2x), f_4 : (x \to sin^2x), f_5 : (x \to \cos(2x))$, $f_6 : (x \to sin2x)$.
$rg((f_k)_{k=0..6}) = \dim(vect((f_k)_{k=0..6}))$. Or, on a montré que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$ est une base de $vect((f_k)_{k=0..6})$. J'en déduis que $rg((f_k)_{k=0..6}) = card(B) = 5$.

70 Prop. : Soit $\mathcal{V} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})$ une famille de vecteurs d'un e.v E .
1) $rg(\mathcal{V}) \le p = card(\mathcal{V})$.
2) Si E est de dimension finie n alors $rg(\mathcal{V}) \le \min(dimE , card(\mathcal{V}))$.

Démo :1) $\mathcal{V} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})$ est une famille génératrice de $vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})$ donc, $card(\mathcal{V}) \ge \dim(vect\ \mathcal{V}) = rg(\mathcal{V})$.
2) Si E est de dimension finie alors $vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})$ est un ss-e-v de E donc $dim(vect(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_p})) \le \dim(E)$ i.e. $rg(\mathcal{V}) \le dimE$. Alors, en appliquant 1),on a : $rg(\mathcal{V}) \le \min(dimE , card(\mathcal{V}))$.

71 Prop. : Soit $\mathcal{V}$ une famille de vecteurs d'un e.v E .
1) $\mathcal{V}$ est libre si et ssi $rg(\mathcal{V}) = card(\mathcal{V})$
<u>Si, de plus, E est de dimension finie</u> , alors
2) $\mathcal{V}$ est génératrice de E si et ssi $rg(\mathcal{V})$= $dimE$
3) $\mathcal{V}$ est base de E si et ssi $rg(\mathcal{V})$= $card\ \mathcal{V} = dimE$

Démo : 1)Soit $V = \ vect\ (\mathscr{V})$.
$\mathscr{V}$ libre$\Leftrightarrow$ $\mathscr{V}$ base de V $\Rightarrow dimV$=card ($\mathscr{V}$)$\Rightarrow$ $\mathscr{V}$ est génératrice de V et minimal$e$ $\Rightarrow$ $\mathscr{V}$ base de $V \Rightarrow$ $\mathscr{V}$ libre.

2) $\mathscr{V}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow V = E \Leftrightarrow dimV = dimE \Leftrightarrow rg(\mathscr{V}) = dimE$.

3) D'après 1) et 2), on peut affirmer que $\mathscr{V}$ est base de E si et ssi $rg(\mathscr{V}) = card\ \mathscr{V} = dimE$.

72 Théorème : Si E est un K-e-v de dimension finie alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille $\mathscr{V}$ de vecteurs de E ,

$$rg(\mathscr{V}) = rg(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V})$$

Démo :1ère étape : $Soit\ M = (C_1|C_2| \ldots . |C_p) \in M_{n,p}(K)$. Montrons que $\underbrace{rg(M)}_{\substack{=nbre\ de\ pivots \\ de\ la\ matrice\ erc \\ équivalente\ par\ colonne\ à\ M}} = \underbrace{rg(C_1, C_2, .., C_p)}_{\substack{=dimension\ du\ ss-e-v\ F \\ de\ M_{n,1}(K) engendré \\ par\ (C_1, C_2, .., C_p)}}$.

Il existe une unique matrice R échelonnée réduite par colonne telle que $M \sim_c R$.
Alors $rg(M) = rg(R)$ =nbre de pivots de $R = r$.
Posons $R = (C_1'|C_2'| \ldots . |C_p')$.Alors $C'_{r+1}, .., C'_p$ sont nulles.De plus, R est obtenue en effectuant sur M une suite d'opérations élémentaires ($op1$),$op2$) et $op3$)) sur ces colonnes .Or, $op1$),$op2$) et $op3$) n'altèrent pas le caractère générateur d'une famille, donc $(C_1', C_2', .., C_p')$ est encore génératrice de $F = vect(C_1, C_2, .., C_p)$. Or $(C_1', C_2', .., C_p')$est échelonnée et $C'_{r+1}, .., C'_p$ sont nulles donc, $(C_1', C_2', .., C_r')$ est libre car échelonnée sans colonne nulle et encore génératrice de F (car les $p - r$ dernières colonnes nulles sont $c.l$ des r premières) . Par conséquent, $\dim(F) = r$. J'en conclus que $\dim(F) = rg(M)$ i.e. $rg(C_1, C_2, .., C_p) = rg(M)$.
2ème étape. E est de dimension finie n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{V}$ une famille de p vecteurs de E.
Soit $M = mat_{\mathscr{B}}\mathscr{V} = (C_1|C_2| \ldots . |C_p)$ où $C_k = mat_{\mathscr{B}}\overrightarrow{v_k}$
On sait que : $\overrightarrow{v_k}$ est $c.l.$ des autres vecteurs de $\mathscr{V}$ sietssi $C_k$est $c.l.$ des autres colonnes de M. Donc, les relations de dépendances linéaires entre les vecteurs de $\mathscr{V}$ sont les mêmes qu'entre les colonnes de M.Ainsi, on otera le même nombre de vecteur à pour obtenir une base de $vect(\mathscr{V})$ que de colonnes à la famille $(C_1, C_2, .., C_p)$ pour obtenir une base de $F = vect(C_1, C_2, .., C_p)$. J'en déduis que $rg(\mathscr{V}) = \dim(F)$. Or d'après la première étape, $\dim(F) = rg(M)$.
Ainsi, $rg(\mathscr{V}) = rg(M)$.

69 Méthode : pour connaitre le rang de $\mathscr{V}$, il suffit d'extraire de $\mathscr{V}$ une base de $vect(\mathscr{V})$: on étudie les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs de $\mathscr{V}$, on élimine ceux qui sont combinaison linéaire d' autres linéairement indépendants . Alors le rang de $\mathscr{V}$ est le nombre de vecteurs restants.

Exo70 :Déterminer le rang de V $= ((1,1,2,3), (1, -3,2,0), (4,0,8,9), (1,0,3, -1), (2, -6,4,9))$ et donner une base de vect(V)
Exo71 : Déterminer le rang de V = $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$où $f_0 = \mathrm{ch}$, $f_1 = \mathrm{sh}$, $f_2 = \exp$, $f_3 : (x \mapsto ch(2x))$, $f_4 : (x \mapsto sh^2(x))$et extraire une base de vect(V) .