

Applications linéaires.

Dans tout le chapitre, E et F sont deux K - espaces vectoriels

Les applications linéaires sont des applications entre espaces vectoriels qui vérifient certaines propriétés de conservation des combinaisons linéaires. **1 Rappel :**

- Une application f de E dans F est **injective** (ou injective sur E)
 - lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E .
 - lorsque deux éléments de E ayant la même image par f sont égaux
 - lorsque deux éléments de E distincts ont deux images distinctes.
- Une application f de E dans F est **surjective** (ou surjective de E sur F) lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E i.e. lorsque $f(E) = F$.
- Une application f de E dans F est **bijjective** (ou bijective de E sur F)
 - lorsque f est injective et surjective de E sur F
 - lorsque tout élément de F a exactement un antécédent par f dans E
 - lorsqu'il existe une application g de F sur E telle que : $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.
 Dans ce cas, on définit $g = f^{-1} : F \rightarrow E$ telle que $\forall y \in F, f^{-1}(y) =$ l'unique antécédent de y par f .
- Si f est une application de E dans F et A est un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F alors
 - $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ est l'**image directe** de A par f et contient toutes les images par f de tous les éléments de A
 - $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$ est l'**image réciproque** de B par f et contient tous les antécédents de tous les éléments de B .
 - $f|_A$, la restriction de f à A , est l'application définie sur A par : $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$.

I Généralités

1. Définitions

2 Def. : f est une **application linéaire** de E dans F lorsque

$$f \text{ est une application de } E \text{ dans } F \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) \stackrel{(*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}).$$

On dit aussi que f est un **morphisme d'espaces vectoriels**.

3 Def. équivalente : f est une application linéaire de E dans F si et ssi

$$f \text{ est une application de } E \text{ dans } F \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \alpha \in K, f(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{(**)}{=} f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ et } f(\alpha \vec{x}) \stackrel{(***)}{=} \alpha f(\vec{x}).$$

4 Def. et notation:

- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E
- Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire de E dans F , bijective de E sur F . Lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F , on dit que E et F sont **isomorphes**.
- Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E sur E .
- Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K .
- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F .
- $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E dit groupe linéaire.
- E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E .

2. Règles de calcul

5 Prop. : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- $\forall \vec{x} \in E, f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$
- $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m, \forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) \in E^m, f(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i).$

3. Exemples

6 Exemples de référence

- l'identité sur E , $id_E: (\vec{x} \mapsto \vec{x})$, est un automorphisme de E .
- $\omega: \begin{pmatrix} E \rightarrow F \\ \vec{x} \mapsto \vec{0}_F \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E, F)$. ω , l'endomorphisme nul, est noté O ou $O_{\mathcal{L}(E, F)}$.
- $h_\alpha: \begin{pmatrix} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto \alpha \vec{x} \end{pmatrix}$, homothétie vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$, est un automorphisme de E de bijection réciproque $h_{\frac{1}{\alpha}}$.
- Soit $A \in M_{n,p}(K)$. $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto AX \end{pmatrix}$ et $f: \begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,q}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{pmatrix}$ sont linéaires.
- Soit $A \in M_n(K)$. $\varphi_A: \begin{pmatrix} M_{n,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $M_{n,1}(K)$. Et $f_A: \begin{pmatrix} K^n \rightarrow K^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$ tq $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A . K^n et $M_{n,1}(K)$ sont parfois confondus dans les énoncés ce qui signifie que $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\varphi_M = f_M$.

7 Exemples déjà rencontrés

- Soit E un K -e-v de dimension n et B une base de E . $\Delta: \begin{pmatrix} E \rightarrow M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \mapsto \text{mat}_B \vec{x} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. E et $M_{n,1}(K)$ sont donc isomorphes.
- $f: \begin{pmatrix} M_n(K) \rightarrow K \\ M \mapsto \text{tr}(M) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$. (la trace est linéaire)
- $f: \begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{q,p}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{pmatrix}$ est un isomorphisme et $f^{-1} = f$. (la transposition est linéaire)
- $u: \begin{pmatrix} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. (la dérivation est linéaire)
- $h: \begin{pmatrix} C^0([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$. (l'opérateur intégral est linéaire)
- Soit E le $\mathbb{R}$ -e-v des suites réelles convergentes. $h: \begin{pmatrix} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{pmatrix} \in E^*$. (l'opérateur « limite » est linéaire)

8 Exercices : 1) Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (2x - y + t, y - z, 3x - t + 2z)$. Montrons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

2) Soit $h: \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto (2u_n - 3u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrons que h est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3) Soit $T: \begin{pmatrix} C^0([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([0,1], \mathbb{R}) \\ f \mapsto T(f): (x \mapsto \int_x^1 f(t) dt) \end{pmatrix}$. Montrons que $T \in \mathcal{L}(C^0([0,1], \mathbb{R}), C^1([0,1], \mathbb{R}))$.

4) Soit $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto X(P(X) - P(1 - X)) \end{pmatrix}$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

5) $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{pmatrix}$, $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u_0 u_1, u_0 + u_1) \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} K[X] \rightarrow K[X] \\ P \mapsto P(X)P(1 - X) \end{pmatrix}$, $k: \begin{pmatrix} F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto 2 + if(1) \end{pmatrix}$ ne sont pas linéaires.

6) $u: \begin{pmatrix} D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f \mapsto a + f' + if(1)id_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ si et seulement si $a = 0$.

4. Propriété fondamentale

9 Théorème Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une et une seule application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

10 En pratique, vous devez être capable de décrire cette unique application linéaire (Cf exercice suivant).

11 Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$ tq $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, -1)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1)$.

Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$.

12 Exercice : Soit $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$. Pour quelles valeurs du réel a , existe-t-il un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

13 Conséquence fondamentale

1. Toute application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée (définie ou décrite) par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .

2. Si deux applications linéaires de E vers F associent la même image à chaque vecteur d'une base ou d'une simple famille génératrice de E alors ces applications linéaires sont égales (partout !!).

14 Exercice : Cherchons tous les endomorphismes de $\mathbb{R}$.

15 Théorème Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$

Il existe une et une seule application linéaire u de E vers F telle que : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

II Opérations sur les applications linéaires

1. Opérations dans $\mathcal{L}(E, F)$

16 Théorème :

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
3. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .
4. Si f et g sont deux isomorphismes de respectivement E sur F et F sur G alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque.

Notation : dans $\mathcal{L}(E, F)$, $g \circ f$ est parfois notée gf

17 Théorème : $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

18 Règle de calcul: Si $\alpha \in K$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $(f, h) \in \mathcal{F}(E, F)^2$ alors

1. $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ (NB : l'égalité $(f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$ est vraie même si f, g, h ne sont pas linéaires)
2. $(\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f)$.

2. Opérations dans $\mathcal{L}(E)$

19 Théorème :

1. Si f et g sont deux endomorphismes de E et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes de E .
2. Si f est un automorphisme de E alors f^{-1} est un automorphisme de E .
3. Si f et g sont deux automorphismes alors $f \circ g$ est un automorphisme de E et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
4. $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition et combinaison linéaire (addition et multiplication externe). $\mathcal{L}(E)$ est un K -e.v.
5. $GL(E)$ est stable par composition et passage à l'inverse.

20 NB : $GL(E)$ n'est pas stable par c.l. car $\underbrace{id_E}_{\in GL(E)} - \underbrace{id_E}_{\in GL(E)} = \underbrace{0}_{\notin GL(E)}$.

21 Def. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \in \mathcal{L}(E)$. Les endomorphismes f^n de E sont les **itérés de f** .
2. f est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = \underbrace{0}_{\substack{\text{endom.} \\ \text{nul}}}$.
3. Soit $P \in K[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k = a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n$.

22 Règles de calcul :

- 1) $\forall (f, g, u, v) \in \mathcal{L}(E)^4, \forall (\alpha, \beta, a, b) \in K^4, (\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta a(g \circ u) + \beta b(g \circ v)$.
- 2) $\forall \alpha \in K, \forall f \in \mathcal{L}(E), \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (\alpha f)^p = \alpha^p f^p$ et $id^p = id$ et $f^p f^q = f^{p+q}$ et $(f^p)^q = f^{pq}$.
- 3) Si $P = QB + R$ où $(P, Q, R, B) \in K[X]^4$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $P(f) = Q(f)B(f) + R(f) = R(f) + B(f)Q(f)$.

23 METHODE- Exemple : si $f^2 + 2f - 3id = 0$ alors $id = \frac{1}{3}(f^2 + 2f) = \frac{1}{3}(f + 2id) \circ f = f \circ \frac{1}{3}(f + 2id)$ et j'en conclus que f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{3}(f + 2id)$.

24 Factorisation et binôme de Newton: Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $\underbrace{f \circ g = g \circ f}_{f \text{ et } g \text{ commutent}}$, alors

1. $\forall (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = (f + g) \circ (f + g) \circ \dots \circ (f + g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ g \circ \dots \circ g}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k \circ g^{n-k}) = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k g^{n-k})$.

25 Exemple Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq : $f \circ g = g \circ f$. Alors,

$$(2f - g)^3(5f - 4g) = (8f^3 - 12f^2g + 6fg^2 - g^3)(5f - 4g) = 40f^4 - 92f^3g + 78f^2g^2 - 29fg^3 + 4g^4.$$

26 En particulier, f et id commutent toujours puisque $f \circ id = f = id \circ f$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{L}(E), (id + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \text{ et } id - f^{n+1} = (id - f) \circ (\sum_{k=0}^n f^k) = (\sum_{k=0}^n f^k) \circ (id - f).$$

III Noyau et image et rang d'une application linéaire

1. Noyau d'une application linéaire.

27Def.: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **noyau de f** noté $\text{Ker}(f)$ ou $\text{Ker}f$ est l'ensemble de tous les antécédents de $\vec{0}_F$ par f i.e. l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f vaut $\vec{0}_F$. $\text{Ker}f = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.
Autrement dit, $\vec{x} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$

28NB : Être dans le noyau de f , c'est avoir son image par f qui est nulle.

29Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E .

30Def : Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Le **noyau de M** est $\text{Ker}(M) = \{X \in M_{p,1}(K) / MX = 0\} = \text{Ker}(\varphi_M)$ où $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

31Conséquence : Soit $M \in M_n(K)$. M est inversible si et si $\text{Ker}(M) = \{0_{n,1}\}$

2. Image d'une application linéaire

32Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'**image de f** , notée $\text{Im}(f)$ ou $\text{Im}f$, est l'ensemble de toutes les images par f de tous les éléments de E . $\text{Im}(f) = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in E; \vec{y} = f(\vec{x})\} = f(E)$. Autrement dit, $\vec{y} \in \text{Im}f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{y}$.

33NB : Être élément de $\text{Im}f$, c'est être une image par f d'un élément de E .

34Théorème Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F .

35Def : Soit $M \in M_{n,p}(K)$. L'image de M est $\text{Im}(M) = \{MX / X \in M_{p,1}(K)\} = \text{Im}(\varphi_M)$ où $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

36Théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice (ou une base) de E alors $f(\mathcal{F}) = (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

37Exemple : Soit $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = XP' - P$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Décrire $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

3. Rang

38Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f , notée $\text{rg}(f)$, est, par déf°, la dimension de $\text{Im}(f)$. Donc, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$

39Prop. : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors $\text{rg}(f) = \text{rg}((f(\vec{e}_i))_{i \in I}) = \text{rg}(f(B))$.

40Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

41Théo du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}f) = \dim E$ (démonstration plus tard)

42Exercice : Soit E un K-e-v de dimension 4 rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. Soit l'endomorphisme f de E tel que :
 $f(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{d}$, $f(\vec{c}) = \vec{a} + \vec{d}$ et $f(\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$?

4. Noyau et image d'une composée d'applications linéaires ou des itérés d'un endom.

43A savoir justifier : Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

1. $g \circ f = \underset{\substack{\text{endom.} \\ \text{nul}}}{0}$ si et si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

2. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

44A savoir démontrer : Pour tout endomorphisme f de E et tout entier naturel k ,

- $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ sont des ss-e-v de E .
- $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ et $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. On dit que les deux suites de ss-e-v de E : $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante au sens de l'inclusion.
- Si E est de dimension finie alors ces deux suites de ss-e-v de E sont (stationnaires) constantes à partir d'un même rang.
- $f^2 = 0$ si et si $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$.

5. Généralisation : image directe ou réciproque d'un ss-e-v par une application linéaire.

45Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}\langle G \rangle$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G , est un ss e v de E
2. Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H , est un ss e v de F .

46NB : si $G = \{\vec{0}_F\}$ alors $f^{-1}\langle G \rangle = \text{Ker}(f)$ et si $H = E$ alors $f(H) = \text{Im}(f)$.

47Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un ss e v de E (alors $f(H)$ est un ss e v de E).

On dit que H est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \rightarrow H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H .

48Exercice : Soit $u: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $u(P) = X^2 P' - 6XP$. Montrer que u induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_6[X]$.

49A savoir démontrer : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.

Alors, $f - \lambda \text{id}_E$ est un endomorphisme de E et $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$ et $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par f . Enfin, l'endomorphisme f_λ de $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ induit par f est l'homothétie de rapport λ .

50NB : Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors E_1 et E_2 sont stables par l'unique application linéaire u de E vers F vérifiant : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

IV Application linéaire injective et / ou surjective. Isomorphisme.

1. Injectivité

51Théo : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$. 

Autrement dit, une application linéaire est injective si et ssi son noyau ne contient que le vecteur nul.

52Exemple : $f: (P \mapsto P(X+1) - P(X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ non injectif car $1 \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$. Rappel : $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

53Exercice : Montrons que l'endomorphisme $f: (P \mapsto \alpha P - XP')$ de $\mathbb{R}[X]$ est injectif si et ssi $\alpha \notin \mathbb{N}$.

54Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

- 1) f est injective $\Rightarrow$ pour toute famille libre $(\vec{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de vecteurs de E , $(f(\vec{u}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille libre de vecteurs de F .
- 2) Si E de dimension finie et admet une base $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ alors
 f est injective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ soit une famille libre.
 $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E$.

55Exercice : Montrons que l'endomorphisme $f: (P \mapsto P + P')$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est injectif.

2. Surjectivité

56Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$ 

Exercice : Soit $u: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par : $\forall f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), u(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que u est injectif mais n'est pas surjective de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

57Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) Si $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors, f surjective de E sur $F \Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .
- 2) Si F est de dimension finie alors, f est surjective de E sur $F \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$. 

58Exercice : Montrer que $f: (x, y, z) \mapsto (x + y, 2z - x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ surjective mais non injective. Donner une base de $\text{Ker}(f)$.

59Exercice : Montrer qu'une forme linéaire est surjective si et ssi une de ses images est non nulle.

3. Isomorphisme

60Théo. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$ et $\text{Im} f = F$. 
2. Si E est de dimension finie et $(\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de E alors
 f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow ((f(\vec{e}_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket})$ est base de $F \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f) = \dim(F) < +\infty$.

61Exercice : Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

62 Conséquence 1 : Un isomorphisme de E sur F envoie toute base de E sur une base de F . Et l'ensemble des antécédents des vecteurs d'une base de F par un isomorphisme de E sur F est une base de E .

63 NB : Cette conséquence fournit un autre moyen de montrer qu'une famille est une base.

64 Exercice : Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, X_k = (a_0^k, a_1^k, \dots, a_n^k) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. En utilisant la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$, montrer que $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que la famille $(X_k)_{k=0, \dots, n}$ est libre dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible.

65 Conséquence 2 : Si E est de dimension finie et E et F sont isomorphes, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$. Plus généralement, E et F isomorphes $\Rightarrow \dim(E) = \dim(F)$ (finie ou infinie).

66 Exercice : Soit E le ss-e-v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites p -périodiques. Soit $h: \begin{pmatrix} E \rightarrow \mathbb{C}^p \\ u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{pmatrix}$. Montrons que $h \in \text{Isom}(E, \mathbb{C}^p)$. En déduire $\dim E$.

67 Conséquence Si E et F sont de dimensions différentes alors il n'existe aucun isomorphisme de E sur F et plus précisément,
si $\dim(E) > \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire injective de E vers F .
si $\dim(E) < \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire surjective de E sur F .

68 « Réciproque » : Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors E et F sont isomorphes. (faux si $\dim E = \dim F = +\infty$).

69 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. **Si E et F sont de même dimension finie** alors :

- f est un isomorphisme de E sur F
- $\Leftrightarrow f$ injective
 - $\Leftrightarrow f$ surjective de E sur F
 - $\Leftrightarrow \text{rg} f = \dim E (= \dim F)$

70 Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (1 - nX)P(X) + X^2 P'(X)$. Montrer que $\varphi_n \in GL(\mathbb{R}_n[X])$.

71 Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si G est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E alors $\text{Im} f$ et G sont isomorphes.

En conséquence : **Si E est de dimension finie** alors $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker} f) = \dim(E)$

72 Prop. : Soit E et F deux K -e-v de même dimension.

- 1) Si f est un isomorphisme de E sur F et H est un ss-e-v de E alors $f(H)$ et H ont la même dimension.
- 2) Si f est un isomorphisme de E sur F et G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G)$ et G ont la même dimension.

73 Propriété du rang . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, E)$

1) Si g est un isomorphisme de F sur G alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

2) Si h est un isomorphisme de G sur E alors $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f)$.

Autrement dit, le rang est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

1) $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

74 NB : ce résultat rappelle le résultat sur les matrices : le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.

VI Projection et symétrie vectorielles.

75 Déf. : Soient E un K -e-v et F et G deux ss e v de E supplémentaires dans E .

Pour chaque $\vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G / \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$, on pose alors $p(\vec{x}) = \vec{x}_F$ et $q(\vec{x}) = \vec{x}_G$ et $s(\vec{x}) = \vec{x}_F - \vec{x}_G$

L'application p ainsi définie est appelée la **projection vectorielle** sur F parallèlement à G (ou de direction G) et q est la projection sur G de direction F . Les projections p et q sont dites associées à la somme directe $F \oplus G = E$.

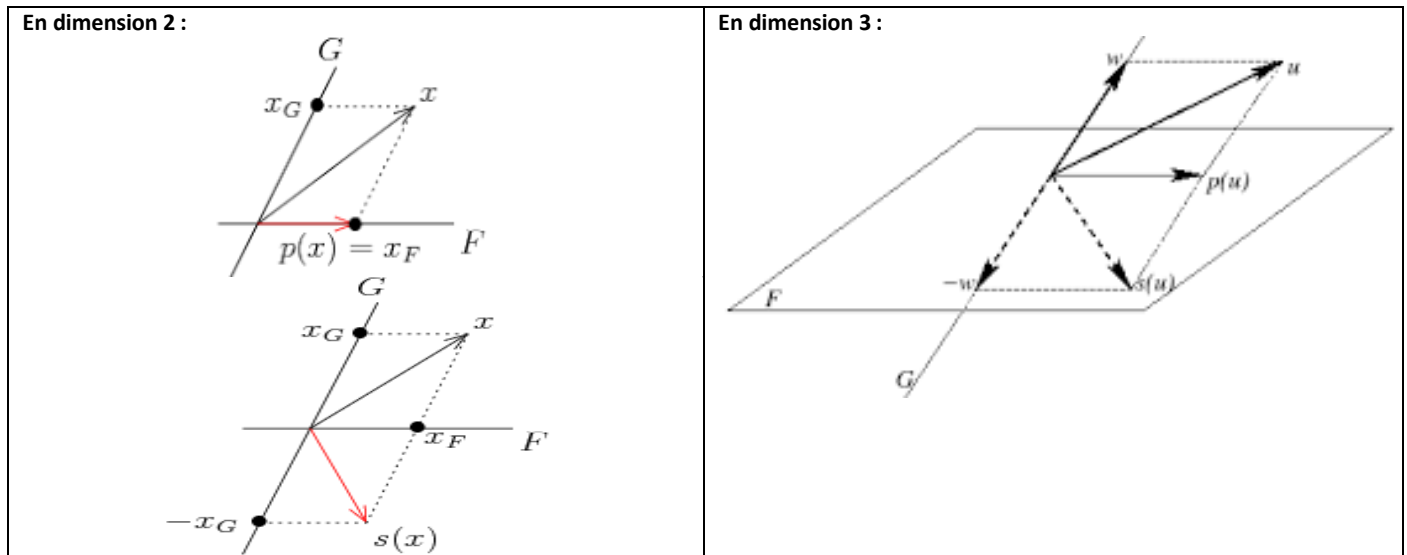
L'application s ainsi définie est appelée la **symétrie vectorielle** par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

$p(\vec{x})$ est le **projeté** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G et $q(\vec{x})$ est le projeté de $\vec{x}$ sur G parallèlement à F .

$s(\vec{x})$ est le **symétrique** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G

L'espace F sur lequel p projette et l'espace G parallèlement auquel p projette sont les **éléments caractéristiques** de p , de q et de s .

76 Illustration :



77 Propriétés : Soient E un K -e-v et F et G deux ss e v de E supplémentaires dans E et p et q les projections associées à la somme et s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G directe $F \oplus G = E$: p projection sur F parallèlement à G et q projection sur G parallèlement à F . Alors,

- $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p(\vec{x}) + q(\vec{x})$ est la décomposition de $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
- $p + q = Id_E$ et $s = p - q = 2p - Id_E = Id_E - 2q$.
- p, q et s sont des endomorphismes de E . p est l'unique endomorphisme de E tel que $p|_F = Id_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$ et s est l'unique endomorphisme de E tel que $s|_F = Id_F$ et $s|_G = -Id_G$.
- $q \circ p = 0$ (et $p \circ q = 0$)
- $p^2 = pop = p$ (et $q^2 = q \circ q = q$) et $s \circ s = Id_E$
- $F = Im(p) = Ker(p - Id) = \{\text{vecteurs fixes par } p\} = Ker(q)$ et $G = Ker(p) = Im(q)$
- $F = Ker(s - Id_E) = \{\text{vecteurs fixes par } s\}$ et $G = Ker(s + Id_E) = \{\vec{x} \in E / s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$
- $Im(p) \oplus Ker(p) = E$ (et $Im(q) \oplus Ker(q) = E$) et $Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E) = E$

NB : si p est une projection alors p est la projection sur $Im p$ et parallèlement à $Ker p$: $Im p$ et $Ker p$ sont les éléments caractéristiques de la projection p . Si s est une symétrie alors s est la projection par rapport à $Ker(s - Id_E)$ et parallèlement à $Ker(s + Id_E)$: $Ker(s - Id_E)$ et $Ker(s + Id_E)$ sont les éléments caractéristiques de la symétrie s .

78 Caractérisation Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

- f est une projection (0)
 $\Leftrightarrow f$ est la projection sur $Im(f)$ et parallèlement à $Ker(f)$ (1)
 $\Leftrightarrow f \circ f = f$ (2)
 $\Leftrightarrow Im f \oplus Ker f = E$ et $\forall \vec{y} \in Im f, f(\vec{y}) = \vec{y}$ (ie. $f|_{Im(f)} = id_{Im(f)}$) (3)
- f est une symétrie (0)
 $\Leftrightarrow f$ est la symétrie par rapport à $Ker(f - Id_E)$ et parallèlement à $Ker(f + Id_E)$ (1)
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f + Id_E)$ est une projection (2)
 $\Leftrightarrow f \circ f = Id_E$ (3)
 $\Leftrightarrow Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E) = E$ (4)

VII Formes linéaires et hyperplans.

79 Rappel-Def : Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans K . E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E .

80 Def : Un hyperplan de E est un ss-e-v de E lorsque H admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E .

81 Théorème : Soit H un ss-e-v de E .

H est hyperplan de $E \Leftrightarrow$ tout vecteur $\vec{u} \in E \setminus H$ vérifie : $vect(\vec{u}) \oplus H = E \Leftrightarrow H$ est le noyau d'une forme linéaire.

82 Théorème : On suppose que E est de dimension finie et $B = (\vec{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de E .

H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \dim H = (\dim E) - 1$

$\Leftrightarrow$ il existe $a_1, a_2, \dots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que $H = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \mid \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i a_i = 0}_{\text{équation de } H \text{ dans } B} \right\}$.

VIII Equations linéaires.

83 Introduction :

1. Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,1}(K)$ et (S) le système d'équations linéaires : $AX = B$ où $X \in M_{p,1}(K)$ est l'inconnue. Soit $\varphi_A : (X \mapsto AX)$. φ_A est linéaire et $(S) : \varphi_A(X) = B$ et $(SH) : \varphi_A(X) = 0$. Donc, $Sol(SH) = Ker(\varphi_A)$. Et lorsque (S) est compatible, les solutions de (S) sont sommes d'une solution de (SH) et d'une solution particulière de (S) i.e. sommes d'un vecteur de $Ker(\varphi_A)$ et d'une solution particulière de (S) .

2. Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I et $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Soit $\varphi : \left(\begin{array}{c} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y \mapsto y' + ay \end{array} \right)$. Alors $Ker(\varphi) = Sol(EH)$ et $Sol(E) = \{f_0 + h \mid h \in Ker(\varphi)\}$ où f_0 est une solution particulière de (E) .

84 Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{b} \in F$. Notons (e) l'équation $f(\vec{x}) = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$. f étant linéaire, (e) est une équation linéaire. On note (eh) l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ d'inconnue $\vec{x}$ élément de E , équation homogène associée à (e) .

Alors, $Ker(f)$ est l'ensemble des solutions de (eh) .

Ou bien, $\vec{b} \in Im(f)$. Alors (e) admet une solution particulière $\vec{v}$ et les solutions de (e) sont les vecteurs $\vec{v} + \vec{h}$ tels que $\vec{h} \in Ker(f)$ i.e. les solutions de (e) sont tous les vecteurs sommes d'une solution particulière $\vec{v}$ et d'une solution de l'équation linéaire homogène associée à (e) .

Ou bien, $\vec{b} \notin Im(f)$. Alors (e) n'a pas de solution.

85 Applications aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants:

Soit a et b deux réels et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et E l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.

Notons H l'ensemble des suites h réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

Démontrons les deux résultats suivants admis dans le chapitre « Suites particulières ».

1) S'il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors $E = \{v + h \mid h \in Ker(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H .

2) $H = \{(\alpha(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e.c)} > 0$ et r_1 et r_2 sol^o distinctes de $(e.c)$.

$H = \{(\alpha + \beta n)(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e.c)} = 0$ et r_0 sol^o de $(e.c)$.

$H = \{(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))\rho^n \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e.c)} < 0$ et $r_1 = \rho e^{i\theta}$ sol^o de $(e.c)$.

1) Soit $\varphi : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto (u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right)$. Alors E est l'ensemble des suites réelles u solutions de $\varphi(u) = v$ et $H = Ker(\varphi)$.

Montrons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

$$\begin{aligned} \forall (u, z) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\alpha u + \beta z) &= ((\alpha u_{n+2} + \beta z_{n+2}) + a(\alpha u_{n+1} + \beta z_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta z_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_{n+2} + a\alpha u_{n+1} + b\alpha u_n + \beta z_{n+2} + a\beta z_{n+1} + b\beta z_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_{n+2} + a\alpha u_{n+1} + b\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (\beta z_{n+2} + a\beta z_{n+1} + b\beta z_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \alpha(u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(z) \end{aligned}$$

Donc, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Ainsi, E est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que : si E est non vide i.e. il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors $E = \{v + h \mid h \in Ker(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H .

2) Donnons une base et la dimension de H .

Je vais trouver la dimension de H sans et pour trouver une base de H en utilisant un isomorphisme.

- Tout d'abord H est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle est élément de H et si h et g sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\forall n \in \mathbb{N}, (xh_{n+2} + yg_{n+2}) + a(xh_{n+1} + yg_{n+1}) + b(xh_n + yg_n) = x(h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n) + y(g_{n+2} + ag_{n+1} + bg_n) = 0$ donc $xh + yg \in H$.

- Pour trouver la dimension et une base on va construire un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H .

Soit $\Gamma : H \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $\Gamma(h) = (h_0, h_1)$.

Γ est bien définie et linéaire car si h et g sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\Gamma(xh + yg) = (xh_0 + yg_0, xh_1 + yg_1) = (xh_0, xh_1) + (yg_0, yg_1) = x(h_0, h_1) + y(g_0, g_1) = x\Gamma(h) + y\Gamma(g)$.

Γ est bijective car $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une et une seule suite h telle que : $h_0 = a, h_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

Ainsi, Γ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H . Donc, $\dim H = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Donc, une base de H est une famille libre formée de deux vecteurs de H .

- Cherchons les suites géométriques complexes NON NULLES vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$. Soit $r \in \mathbb{C}^*$.

$$(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (r^2 + ar + b) \underbrace{r^n}_{\neq 0 \text{ car } r \neq 0} = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

Ainsi, $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H \Leftrightarrow r \text{ sol}^o \text{ de } ax^2 + bx + c = 0$.

- Posons $(e.c) : ax^2 + bx + c = 0$.

Ou bien $\Delta_{(e,c)} > 0$. Alors (e, c) a deux solutions réelles distinctes : r_1 et r_2 et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont éléments de H . Comme $r_1 \neq r_2$, $((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre et ainsi, $((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de H . En particulier, les suites éléments de H sont toutes les c. l. de $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e,c)} = 0$. Alors (e, c) a une seule solution : le réel $r_0 = -\frac{b}{2a}$ et H ne contient qu'une seule suite géométrique non nulle : $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons que $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)r_0^{n+2} + a(n+1)r_0^{n+1} + bnr_0^n = (n+2)r_0^{n+2} + a(n+1)r_0^{n+1} + bnr_0^n = nr_0^n \left[\underbrace{r_0^2 + ar_0 + b}_{=0} \right] + r_0^n \left[\underbrace{2ar_0 + b}_{=0} \right] = 0.$$

Donc, $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$.

Montrons que $((nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_0^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\alpha(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n, \alpha nr_0^n + \beta r_0^n = 0 \Rightarrow \beta = 0$ et $(\alpha + \beta) r_0^n = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Ainsi, $((nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_0^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre et maximale dans H donc est une base de H . En particulier, les suites éléments de H sont toutes les c. l. de $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e,c)} < 0$. Alors (e, c) a deux solutions complexes conjuguées et non réelles : r_1 et r_2 et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont complexes et vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$. Posons, $r_1 = \rho e^{i\theta}$. On a donc,

$\forall n \in \mathbb{N}, \rho^{n+2} e^{i(n+2)\theta} + a\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta} + b\rho^n e^{in\theta} = 0$ i.e.

$\forall n \in \mathbb{N}, \rho^{n+2} (\cos((n+2)\theta) + i\sin((n+2)\theta)) + a\rho^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)) + b\rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = 0 + i0$.

Donc, par unicité des parties réelle et imaginaire du complexe nul,

$\forall n \in \mathbb{N}, \rho^{n+2} \cos((n+2)\theta) + a\rho^{n+1} \cos((n+1)\theta) + b\rho^n \cos(n\theta) = 0$ et $\rho^{n+2} \sin((n+2)\theta) + a\rho^{n+1} \sin((n+1)\theta) + b\rho^n \sin(n\theta) = 0$. } Donc, les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ sont éléments de H .

Montrons que $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\alpha(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} + \beta(\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \forall n, \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta) = 0$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \left(\alpha \cos(\theta) + \beta \frac{\sin(\theta)}{\rho} \right) \rho = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

pour $n=0$ puis 1 $\neq 0 \text{ car } r_1 \notin \mathbb{R}$ $\neq 0 \text{ car } r_1 \notin \mathbb{R}$

Ainsi, $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille libre et maximale dans H et est donc une base de H . En particulier, les suites éléments de H sont toutes les c. l. de $(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

CCL : $H = \{\alpha(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e,c)} > 0$ et r_1 et r_2 sol° distinctes de (e, c) .

$H = \{(\alpha + \beta n)(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}} / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e,c)} = 0$ et r_0 sol° de (e, c) .

$H = \{(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))\rho^n / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ si $\Delta_{(e,c)} < 0$ et $r_1 = \rho e^{i\theta}$ sol° de (e, c) .