

Démos chapitre « Applications linéaires » .

I Généralités

1. Définitions

2 Def. : f est une **application linéaire** de E dans F lorsque

$$f \text{ est une application de } E \text{ dans } F \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \stackrel{(*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}).$$

On dit aussi que f est un **morphisme d'espaces vectoriels**.

3 Def. équivalente : f est une application linéaire de E dans F si et ssi

$$f \text{ est une application de } E \text{ dans } F \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \alpha \in K, f(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{(**)}{=} f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ et } f(\alpha\vec{x}) \stackrel{(***)}{=} \alpha f(\vec{x}).$$

Démo : $\Rightarrow$ Hypo : f est une application de E dans F et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \stackrel{(*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

$$\text{Alors, } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \alpha \in K, f(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{(*)}{=} f(1.\vec{x} + 1.\vec{y}) \stackrel{\text{par } (*)}{=} 1.f(\vec{x}) + 1.f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ et } f(\alpha\vec{x}) = f(\alpha\vec{x} + 0\vec{y}) \stackrel{\text{par } (*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + 0f(\vec{y})$$

$$0f(\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \vec{0} = \alpha f(\vec{x}). \text{ OK}$$

$$\Leftarrow \text{Hypo : } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \alpha \in K, f(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{1}{=} f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ et } f(\alpha\vec{x}) \stackrel{2}{=} \alpha f(\vec{x}).$$

$$\text{Alors, } f \text{ est une application de } E \text{ dans } F \text{ et } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \stackrel{\text{par 1}}{=} f(\alpha\vec{x}) + f(\beta\vec{y}) \stackrel{\text{par 2}}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}). \text{ OK !}$$

4 Def. et notation :

1. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E .
2. Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire de E dans F , bijective de E sur F . Lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F , on dit que E et F sont **isomorphes**.
3. Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E sur E .
4. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K .
5. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
6. $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
7. **Isom**(E, F) l'ensemble des isomorphismes de E sur F .
8. **GL**(E) l'ensemble des automorphismes de E dit groupe linéaire.
9. E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E .

2. Règles de calcul

5 Prop. : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
2. $\forall \vec{x} \in E, f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$
3. $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m, \forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) \in E^m, f(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i)$.

Démo : Soit f une application linéaire de E dans F .

$$1) f(\vec{0}_E) = f(0.\vec{0}_E) \stackrel{\text{car } f \text{ linéaire (2)}}{=} 0.f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \text{ et } f(-\vec{x}) + f(\vec{x}) \stackrel{\text{car } f \text{ linéaire (1)}}{=} f(-\vec{x} + \vec{x}) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F. \text{ Donc, } f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}).$$

$$2) \text{ Par récurrence sur } m \text{ on prouve que } \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m, \forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) \in E^m, f(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i) \stackrel{H(m)}{=} H(m).$$

Init° : $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies car f est linéaire ((1) et (*)).

$$\text{Propag° : Soit } m \in \mathbb{N}^* \text{ et je suppose } H(m) \text{ vraie. Soit } (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \in K^{m+1}, (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m+1}) \in E^{m+1}. \text{ Alors, } f(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \vec{u}_i) = f(1.\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i + \alpha_{m+1} \vec{u}_{m+1}) \stackrel{\text{par (*) avec } \alpha=1, \beta=\alpha_{m+1}}{=} f(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i) + \alpha_{m+1} f(\vec{u}_{m+1}) \stackrel{\text{car } H(m) \text{ vraie}}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i) + \alpha_{m+1} f(\vec{u}_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i f(\vec{u}_i). \text{ OK ! Donc,}$$

$$H(m) \Rightarrow H(m+1). \text{ CCL : } \forall m \in \mathbb{N}^*, H(m) \text{ est vraie.}$$

3. Exemples

6 Exemples de référence

- l'identité sur E , $id_E: (\vec{x} \mapsto \vec{x})$, est un automorphisme de E .

$$\bullet \omega: \left(\begin{matrix} E \rightarrow F \\ \vec{x} \mapsto \vec{0}_F \end{matrix} \right) \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \omega: \left(\begin{matrix} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto \vec{0}_E \end{matrix} \right) \in \mathcal{L}(E). \omega, \text{ l'endomorphisme nul, est noté } 0 \text{ ou } 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- $h_\alpha: \left(\begin{matrix} E \rightarrow E \\ \vec{x} \mapsto \alpha\vec{x} \end{matrix} \right)$, **homothétie vectorielle** de rapport $\alpha \in K^*$, est un automorphisme de E de bijection réciproque $h_{\frac{1}{\alpha}}$.

$$\bullet \text{ Soit } A \in M_{n,p}(K). \varphi_M: \left(\begin{matrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto AX \end{matrix} \right) \text{ et } \theta: \left(\begin{matrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,q}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{matrix} \right) \text{ et } f_A: \left(\begin{matrix} K^p \rightarrow K^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{matrix} \right) \text{ tq } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ sont linéaires}$$

$$\bullet \text{ Soit } A \in M_n(K). \varphi_A: \left(\begin{matrix} M_{n,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \text{ est un endomorphisme de } M_{n,1}(K). \text{ Et } f_A: \left(\begin{matrix} K^n \rightarrow K^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{matrix} \right) \text{ tq } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est}$$

l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A . K^n et $M_{n,1}(K)$ sont parfois confondus dans les énoncés ce qui signifie que $(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \varphi_M = f_M.$$

7 Exemples déjà rencontrés

- Soit E un K -e-v de dimension n et B une base de E . $\Delta: \left(\begin{matrix} E \rightarrow M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \mapsto \text{mat}_B \vec{x} \end{matrix} \right)$ est un isomorphisme. E et $M_{n,1}(K)$ sont donc isomorphes.

- $\begin{pmatrix} M_n(K) \rightarrow K \\ M \mapsto \text{tr}(M) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ et $f: \begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{q,p}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{pmatrix}$ est un isomorphisme et $f^{-1} = f$.
- $u: \begin{pmatrix} C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ et $h: \begin{pmatrix} C^0([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^*$.
- Soit E le $\mathbb{R}$ -e.v des suites réelles convergentes. $h: \begin{pmatrix} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{pmatrix} \in E^*$. (l'opérateur « limite » est linéaire)

8 Exercices : 1) Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (2x - y + t, y - z, 3x - t + 2z)$. Montrons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

2) Soit $h: \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto (2u_n - 3u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrons que h est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3) Soit $T: \begin{pmatrix} C^0([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([0,1], \mathbb{R}) \\ f \mapsto T(f): (x \mapsto \int_x^{x^2} f(t) dt) \end{pmatrix}$. Montrons que $T \in \mathcal{L}(C^0([0,1], \mathbb{R}), C^1([0,1], \mathbb{R}))$.

4) Soit $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto X(P(X) - P(1 - X)) \end{pmatrix}$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

5) $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{pmatrix}, g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u_0 u_1, u_0 + u_1) \end{pmatrix}, h: \begin{pmatrix} K[X] \rightarrow K[X] \\ P \mapsto P(X)P(1 - X) \end{pmatrix}, k: \begin{pmatrix} F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto 2 + if(1) \end{pmatrix}$ ne sont pas linéaires.

6) $u: \begin{pmatrix} D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f \mapsto a + f' + if(1)id_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ si et seulement si a est la fonction nulle.

1) Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (2x - y + t, y - z, 3x - t + 2z)$. Montrons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$
 f est bien une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

1ère méthode : Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^4$ et a_1 et a_2 deux réels. Alors,
 $f(a_1 X_1 + a_2 X_2) = f((a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 y_1 + a_2 y_2, a_1 z_1 + a_2 z_2, a_1 t_1 + a_2 t_2))$
 $= (2(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1 y_1 + a_2 y_2) + (a_1 t_1 + a_2 t_2), (a_1 y_1 + a_2 y_2) - (a_1 z_1 + a_2 z_2) + (a_1 t_1 + a_2 t_2), 3(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1 t_1 + a_2 t_2) + 2(a_1 z_1 + a_2 z_2))$
 $= (2a_1 x_1 - a_1 y_1 + a_1 t_1 + 2a_2 x_2 - a_2 y_2 + a_2 t_2, a_1 y_1 - a_1 z_1 + a_1 t_1 + a_2 y_2 - a_2 z_2 + a_2 t_2, 3a_1 x_1 - a_1 t_1 + 2a_1 z_1 + 3a_2 x_2 - a_2 t_2 + 2a_2 z_2)$
 $= a_1(2x_1 - y_1 + t_1, y_1 - z_1, 3x_1 - t_1 + 2z_1) + a_2(2x_2 - y_2 + t_2, y_2 - z_2, 3x_2 - t_2 + 2z_2)$
 $= a_1 f(X_1) + a_2 f(X_2)$. Ainsi, f est linéaire et j'en conclus que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

2ème méthode : $\begin{pmatrix} 2x - y + t \\ y - z \\ 3x - t - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Donc $f = f_A: (x, y, z, t) \mapsto (u, v, w)$ tq $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Ainsi f est linéaire.

2) Soit $h: \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto (2u_n - 3u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrons que h est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Soit u et v dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et a et b deux complexes.

$\forall n, (h(au + bv))_n = 2(au_n + bv_n) - 3(au_{n+1} + bv_{n+1}) = a(2u_n - 3u_{n+1}) + b(2v_n - 3v_{n+1}) = a(h(u))_n + b(h(v))_n$. Donc, $h(au + bv) = ah(u) + bh(v)$. Ainsi, h est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3) Soit $T: \begin{pmatrix} C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto T(f): (x \mapsto \int_x^{x^2} f(t) dt) \end{pmatrix}$. Montrons que $T \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

- Montrons que T est une application de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles admet une primitive F sur l'intervalle $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et $\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(x)$; par conséquent, $T(f)$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Ainsi, T est une application de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Montrons que T est linéaire. Soit $(f, g) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}, T(af + bg)(x) = \int_x^{x^2} (af + bg)(t) dt = \int_x^{x^2} (af(t) + bg(t)) dt = a \int_x^{x^2} f(t) dt + b \int_x^{x^2} g(t) dt = aT(f)(x) + bT(g)(x) = (aT(f) + bT(g))(x)$. Donc, $T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$. Ainsi, T est linéaire. J'en conclus que : $T \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

3) Soit $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto X(P(X) - P(1 - X)) \end{pmatrix}$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

- Montrons que φ est une application de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Alors, ou bien $\deg(P) \leq 2n - 1$. Alors, $\deg(P(1 - X)) = \deg(P) \leq 2n - 1$. Par conséquent, $\deg(X(P(X) - P(1 - X))) = \deg(X) + \deg(P(X) - P(1 - X)) \leq 1 + \max(\deg(P), \deg(P(1 - X))) \leq 1 + (2n - 1) = 2n$; donc, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Alors, ou bien $\deg(P) = 2n$. Alors, $\deg(P(1 - X)) = \deg(P) = 2n$ et $\text{codom}(P(1 - X)) = \text{codom}(P)(\text{codom}(1 - X))^{2n} = \text{codom}(P)(-1)^{2n} = \text{codom}(P)$. Par conséquent, $P(X)$ et $P(1 - X)$ ont les mêmes termes dominants de degré $2n$, donc $\deg(X(P(X) - P(1 - X))) \leq 2n - 1$. Alors, comme précédemment, on a : $\deg(X(P(X) - P(1 - X))) \leq 2n$; donc, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Ainsi, φ est une application de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

- Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_{2n}[X]^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\varphi(aP + bQ) = X((aP + bQ)(X) - (aP + bQ)(1 - X)) = X(aP(X) - aP(1 - X) + bQ(X) - bQ(1 - X))$
 $= a(X(P(X) - P(1 - X))) + b(X(Q(X) - Q(1 - X))) = a\varphi(P) + b\varphi(Q)$. Ainsi, φ est linéaire et φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

4) $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{pmatrix}, g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u_0 u_1, u_0 + u_1) \end{pmatrix}, h: \begin{pmatrix} K[X] \rightarrow K[X] \\ P \mapsto P(X)P(1 - X) \end{pmatrix}, k: \begin{pmatrix} F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto 2 + if(1) \end{pmatrix}$ ne sont pas linéaires.

5) $u: \begin{pmatrix} D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f \mapsto a + f' + if(1)id_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ si et seulement si a est la fonction nulle. En effet, u linéaire $\Rightarrow u(\omega) = \omega$ où $\omega: (x \mapsto 0) \Rightarrow a = \omega = 0$.

Donc, " $a = 0$ " est une condition nécessaire pour que u soit linéaire. Prenons $a = 0$. Montrons que $u \in \mathcal{L}(D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$.

$\forall f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{C}), u(f) = f' + if(1)id_{\mathbb{R}} \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; donc, u est bien une application de $D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $(f, g) \in D(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2, u(af + bg) = (af + bg)' + i(af + bg)(1)id_{\mathbb{R}} = af' + bg' + i(af(1) + bg(1))id_{\mathbb{R}} = af' + bg' + aif(1) + big(1)id_{\mathbb{R}} = au(f) + bu(g)$. Donc, u est linéaire et finalement $u \in \mathcal{L}(D^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ si et seulement si $a = 0$.

4. Propriété fondamentale

9 Théorème Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .
Il existe une et une seule application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.



Démo : Faisons la démo dans le cadre général. Vous pourrez la refaire avec une base finie (c'est plus simple)

Analyse : supposons qu'il existe une application linéaire f de E vers F telle que : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$. Soit $\vec{x} \in E$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists ! (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}) \in K^n / \vec{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{e}_{i_k}$. Comme f est linéaire, $f(\vec{x}) = f(\sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{e}_{i_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} f(\vec{e}_{i_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{y}_{i_k}$.

CCL : Si une telle application linéaire existe alors elle est unique et est $(\sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{e}_{i_k} \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{y}_{i_k})$.

Synthèse : Soit $f : (\vec{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{e}_{i_k} \mapsto f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{y}_{i_k})$. Alors f est bien une application de E dans F .

Montrons que f est linéaire. Soit $(\vec{x}, \vec{t}) \in E^2$ et $(a, b) \in K^2$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists ! (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}) \in K^n, \exists ! (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_n}) \in K^n, \vec{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{e}_{i_k}$ et $\vec{t} = \sum_{k=1}^n \beta_{i_k} \vec{e}_{i_k}$. Par conséquent, $a\vec{x} + b\vec{t} = \sum_{k=1}^n (a\alpha_{i_k} + b\beta_{i_k}) \vec{e}_{i_k}$ et alors, par déf° de f ,

$f(a\vec{x} + b\vec{t}) = \sum_{k=1}^n (a\alpha_{i_k} + b\beta_{i_k}) \vec{y}_{i_k} = a \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \vec{y}_{i_k} + b \sum_{k=1}^n \beta_{i_k} \vec{y}_{i_k} = af(\vec{x}) + bf(\vec{t})$. Ainsi f est linéaire. Enfin, $\forall i \in I, \vec{e}_i = 1 \cdot \vec{e}_i$ est l'unique écriture de $\vec{e}_i$ dans B , donc par déf° de f , $f(\vec{e}_i) = 1 \cdot \vec{y}_i = \vec{y}_i$.

CCL : f est l'unique applicatino linéaire de E dans F telle que $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

10 En pratique, vous devez être capable de décrire cette unique application linéaire (Cf exercice suivant).

11 Exercice Soit $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$ tq $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, -1)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1)$. Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$.

Tout d'abord, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ car de cardinal 4 égale à dimension de $M_2(\mathbb{R})$ et libre car :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Donc le théorème 9 assure qu'il existe une seule application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$

$(-1, 0)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, -1)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Alors, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aA + b(B - A) + c(B - A) + d(D - C) = (a - c)A + (c - b)B + (b - d)(C) + dD$

Donc, $f(M) \stackrel{\text{car } f \text{ est linéaire.}}{=} (a - c)f(A) + (c - b)f(B) + (b - d)f(C) + df(D) = (a - c)(1, 0) + (c - b)(-1, 0) + (b - d)(0, -1) + d(0, 1)$ Ainsi,

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - b - 2c, 2d - b).$$

12 Exercice : Soit $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$. Pour quelles valeurs du réel a , existe-t-il un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

u et v forment une famille libre (car ils ne sont pas colinéaires) de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Donc, w est combinaison linéaire de u et v . Et plus précisément, après calcul, $w = 3u - v$. Donc pour qu'une telle application linéaire f existe, il faut que $(5, a) = f(w) = 3f(u) - f(v) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4)$ donc il faut que $a = 4$. Réciproquement, si $a = 4$, alors le théorème 9 assure qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui envoie la base (u, v) sur la famille $((2, 1), (1, -1))$. Alors $f(w) = 3f(u) - f(v) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4) = (5, a)$. Donc f convient. Donc un tel endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ existe bien.

13 Conséquence fondamentale

1. Toute application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée (définie ou décrite) par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .
2. Si deux applications linéaires de E vers F associent la même image à chaque vecteur d'une base ou d'une simple famille génératrice de E alors ces applications linéaires sont égales (partout !!).

14 Exercice : Cherchons toutes les endomorphismes de $\mathbb{R}$.

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}$ est entièrement défini par la donnée de $f(1)$ (car (1) est une base de $\mathbb{R}$). Et alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1)$. Ainsi, les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $(x \mapsto ax)$ où $a \in \mathbb{R}$.

15 Théorème Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$

Il existe une et une seule application linéaire u de E vers F telle que : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Démo : **Analyse :** supposons qu'une telle application u existe.

Alors, $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2 / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Donc, comme u est linéaire, $u(\vec{x}) = u(\vec{x}_1) + u(\vec{x}_2) = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2)$. Ainsi, si u existe alors u est

unique et vaut : $u : \left(\begin{matrix} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \in E_1 \\ \vec{x}_2 \in E_2 \end{matrix} \mapsto u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2) \right)$.

Synthèse : Soit $u : \left(\begin{matrix} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{x}_1 \in E_1 \\ \vec{x}_2 \in E_2 \end{matrix} \mapsto u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2) \right)$. $\forall \vec{x}_1 \in E_1, u_1(\vec{x}_1) \in F$ et $\forall \vec{x}_2 \in E_2, u_2(\vec{x}_2) \in F$ donc $\forall \vec{x} \in E, u(\vec{x}) \in F$.

Montrons que u est linéaire et $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Soit $(a, b) \in K^2$ et $(\vec{x}, \vec{y}) \in E$. $\exists ! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ et $\exists ! (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E_1 \times E_2 / \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$.

Donc $a\vec{x} + b\vec{y} = a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + b(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \underbrace{a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1}_{\in E_1} + \underbrace{a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2}_{\in E_2}$.

Donc, $u(a\vec{x} + b\vec{y}) = u_1(a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1) + u_2(a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2) = au_1(\vec{x}_1) + bu_1(\vec{y}_1) + au_2(\vec{x}_2) + bu_2(\vec{y}_2)$
 $= a[u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2)] + b[u_1(\vec{y}_1) + u_2(\vec{y}_2)] = au(\vec{x}) + bu(\vec{y})$.

Donc u est linéaire.

De plus, $\forall \vec{x}_1 \in E_1, \vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0}$ donc $u(\vec{x}_1) = u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{0}) = u_1(\vec{x}_1)$. Donc $u|_{E_1} = u_1$. De même, $u|_{E_2} = u_2$. Ainsi, u convient. Et d'après l'analyse, u est la seule qui convienne.

J'en conclus que $u: \left(\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \right) \mapsto u_1(\vec{x}_1) + u_2(\vec{x}_2)$ est l'unique application linéaire de E vers F telle que : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

II Opérations sur les applications linéaires

1. Opérations dans $\mathcal{L}(E, F)$

16 Théorème :

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
3. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .
4. Si f et g sont deux isomorphismes de respectivement E sur F et F sur G alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque.

Démo :

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$. Montrons que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, (\alpha f + \beta g)(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \alpha f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) + \beta g(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) \\ &\stackrel{\text{car } f \text{ et } g \text{ linéaires}}{=} \alpha[\alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})] + \beta[\alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})] \\ &= \alpha \alpha f(\vec{x}) + \beta \alpha f(\vec{y}) + \alpha \beta g(\vec{x}) + \beta \beta g(\vec{y}) \\ &= \alpha[\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})] + \beta[\alpha f(\vec{y}) + \beta g(\vec{y})] \\ &= \alpha[\alpha f + \beta g](\vec{x}) + \beta[\alpha f + \beta g](\vec{y}) \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrons que $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

$$\begin{aligned} \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, g \circ f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= g(f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y})) \stackrel{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} g[\alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})] \stackrel{\text{car } g \text{ linéaire}}{=} \alpha[g(f(\vec{x}))] + \beta[g(f(\vec{y}))] \\ &= \alpha[g \circ f](\vec{x}) + \beta[g \circ f](\vec{y}) \quad \text{OK!} \quad \text{Ainsi, } g \circ f \in \mathcal{L}(E, G). \end{aligned}$$

Notation : dans $\mathcal{L}(E, F)$, $g \circ f$ est parfois notée gf ...

3. Soit f un isomorphisme de E sur F . Donc f^{-1} est bijective de F sur E . Montrons que f^{-1} est linéaire. Soit $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$. Posons $\vec{x}_1 = f^{-1}(\vec{y}_1)$ et $\vec{x}_2 = f^{-1}(\vec{y}_2)$.

$$\text{Alors, } f^{-1}(\alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2) = f^{-1}(\alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2)) \stackrel{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} f^{-1}(f(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2))$$

$$f^{-1}(\alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \alpha_1 f^{-1}(\vec{y}_1) + \alpha_2 f^{-1}(\vec{y}_2).$$

Donc, f^{-1} est linéaire et ainsi f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

NB : C'est pour cette raison que l'on dit que les phrases : " E est isomorphe à F " ou " F est isomorphe à E " ou " E et F sont isomorphes" sont équivalentes.

4. La composée de bijections est une bijection et la composée d'applications linéaires est linéaire. Donc la composée d'isomorphismes f et g est un isomorphisme et sa bijection réciproque est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. (formule démontrée dans un chapitre précédent).

17 Théorème : $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Démo : D1) $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$

D2) $\omega: (\vec{x} \mapsto \vec{0}_F) \in \mathcal{L}(E, F)$

D3b) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$. Le théorème 16 assure que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Finalement, $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

18 Règle de calcul : Si $\alpha \in K$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $(f, h) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ alors

1. $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ (NB : l'égalité $(f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$ est vraie même si f, g, h ne sont pas linéaires)
2. $(\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f)$.

Démo : Si $\alpha \in K$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $(f, h) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g$ et $(f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g$

Mais, en général, si f et g ne sont pas linéaires, $g \circ (f + h) \neq g \circ f + g \circ h$ et $(g \circ (\alpha f)) \neq \alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f$.

Soit $\alpha \in K$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $(f, h) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. $\forall \vec{x} \in E$,

$$g \circ (f + h)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}) + h(\vec{x})) \stackrel{\text{car } g \text{ linéaire}}{=} g(f(\vec{x})) + g(h(\vec{x})) = g \circ f(\vec{x}) + g \circ h(\vec{x}) = (g \circ f + g \circ h)(\vec{x}).$$

Ainsi, $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$.

$$\text{Et } (\alpha g) \circ f(\vec{x}) = (\alpha g)(f(\vec{x})) \stackrel{\text{car } g \text{ linéaire}}{=} g(\alpha f(\vec{x})) = g \circ (\alpha f)(\vec{x}) = \alpha(g \circ f(\vec{x})) = \alpha(g \circ f)(\vec{x}). \text{ Donc, } (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f).$$

2. Opérations dans $\mathcal{L}(E)$

19 Théorème (conséquence du théorème 16) :

1. Si f et g sont deux endomorphismes de E et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $\alpha f + \beta g$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes de E .
2. Si f est un automorphisme de E alors f^{-1} est un automorphisme de E .
3. Si f et g sont deux automorphismes alors $f \circ g$ est un automorphisme de E et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
4. $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition et combinaison linéaire (addition et multiplication externe). $\mathcal{L}(E)$ est un K -e.v.
5. $GL(E)$ est stable par composition et passage à l'inverse.

20 NB : $GL(E)$ n'est pas stable par c.l. car $\text{id}_E - \text{id}_E = \vec{0}$.

$$\begin{matrix} \in GL(E) & \in GL(E) & \notin GL(E) \end{matrix}$$

21 Def. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \in \mathcal{L}(E)$. Les endomorphismes f^n de E sont les **itérés de f** .
- f est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = \underset{\substack{\text{endom.} \\ \text{nul}}}{0}$.
- Soit $P \in K[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k = a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n$.

22 Règles de calcul :

- $\forall (f, g, u, v) \in \mathcal{L}(E)^4, \forall (\alpha, \beta, a, b) \in K^4, (\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta a(g \circ u) + \beta b(g \circ v)$.
- $\forall \alpha \in K, \forall f \in \mathcal{L}(E), \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (\alpha f)^p = \alpha^p f^p$ et $id^p = id$ et $f^p f^q = f^{p+q}$ et $(f^p)^q = f^{pq}$.
- Si $P = QB + R$ où $(P, Q, R, B) \in K[X]^4$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $P(f) = Q(f)B(f) + R(f) = R(f) + B(f)Q(f)$.

23 METHODE- Exemple : si $f^2 + 2f - 3id = 0$ alors $id = \frac{1}{3}(f^2 + 2f) = \frac{1}{3}(f + 2id) \circ f = f \circ \frac{1}{3}(f + 2id)$ et j'en conclus que f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{3}(f + 2id)$.

24 Factorisation et binôme de Newton : Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors

- $\forall (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = (f + g) \circ (f + g) \circ \dots \circ (f + g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ \dots \circ g}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k \circ g^{n-k}) = (f - g) (\sum_{k=0}^n f^k g^{n-k})$.

25 Exemple Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq : $f \circ g = g \circ f$. Alors ,

$$(2f - g)^3 (5f - 4g) = (8f^3 - 12f^2g + 6fg^2 - g^3)(5f - 4g) = 40f^4 - 92f^3g + 78f^2g^2 - 29fg^3 + 4g^4.$$

26 En particulier, f et id commutent toujours puisque $f \circ id = f = id \circ f$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{L}(E), (id + f)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \text{ et } id - f^{n+1} = (id - f) \circ (\sum_{k=0}^n f^k) = (\sum_{k=0}^n f^k) \circ (id - f).$$

III Noyau et image et rang d'une application linéaire

1. Noyau d'une application linéaire.

27 Def.: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **noyau de f** noté $Ker(f)$ ou $Ker f$ est l'ensemble de tous les antécédents de $\vec{0}_F$ par f i.e. l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f vaut $\vec{0}_F$. $Ker f = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.

Autrement dit, $\vec{x} \in Ker f \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$

28 NB : Être dans le noyau de f , c'est avoir son image par f qui est nulle.

29 Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E .

Démo :D1) $Ker(f) \subset E$. **D2)** $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc $\vec{0}_E \in Ker(f)$.

D3b) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in Ker(f)^2$ et $(a_1, a_2) \in K^2$. Montrons que $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 \in Ker(f)$.

$$f(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2) \underset{\text{CAR } f \text{ linéaire}}{=} a_1 \underbrace{f(\vec{x}_1)}_{=\vec{0}_F} + a_2 \underbrace{f(\vec{x}_2)}_{=\vec{0}_F} = \vec{0}_F. \text{ Donc, } a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 \in Ker(f). \text{ Ainsi } Ker(f) \text{ est un ss-e-v de } E.$$

car $\vec{x}_1 \in Ker(f)$ car $\vec{x}_2 \in Ker(f)$

30 Def : Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Le **noyau de M** est $Ker(M) = \{X \in M_{p,1}(K) / MX = 0\} = Ker(\varphi_M)$ où $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

31 Conséquence : Soit $M \in M_n(K)$. M est inversible si et si $Ker(M) = \{0_{n,1}\}$

2. Image d'une application linéaire

32 Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'**image** de f , notée $Im(f)$ ou Imf , est l'ensemble de toutes les images par f de tous les éléments de E . $Im(f) = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x})\} = f(E)$. Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{y}$.

33 NB : Être élément de Imf , c'est être une image par f d'un élément de E .

34 Théorème Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F .

Démo :D1) $Im(f) \subset F$. **D2)** $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc $\vec{0}_F \in Im(f)$.

D3b) Soit $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in Im(f)^2$ et $(a_1, a_2) \in K^2$. Montrons que $a_1\vec{y}_1 + a_2\vec{y}_2 \in Im(f)$.

$\vec{y}_1 \in Im(f)$ donc $\exists \vec{x}_1 \in E / f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$. De même, $\vec{y}_2 \in Im(f)$ donc $\exists \vec{x}_2 \in E / f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.

$$\text{Alors } a_1\vec{y}_1 + a_2\vec{y}_2 = a_1f(\vec{x}_1) + a_2f(\vec{x}_2) \underset{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} f\left(\underbrace{a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2}_{\in E}\right). \text{ Donc, } a_1\vec{y}_1 + a_2\vec{y}_2 \in Im(f).$$

J'en conclus que $Im(f)$ est un ss-e-v de F .

35 Def : Soit $M \in M_{n,p}(K)$. L'image de M est $Im(M) = \{MX / X \in M_{p,1}(K)\} = Im(\varphi_M)$ où $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \rightarrow M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$.

36 Théorème : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice (ou une base) de E alors $f(\mathcal{F}) = (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E . Montrons que $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de Imf .

- $Im(f)$ est un K-e-v et $\forall i, f(\vec{e}_i) \in Im(f)$.
- Soit $\vec{y} \in Im(f)$. Alors $\exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{y}$. Comme $\vec{x} \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^{n+1} / \vec{x} = \sum_{k=0}^n a_k \vec{e}_{i_k}$. Alors, comme f est linéaire, $\vec{y} = \sum_{k=0}^n a_k f(\vec{e}_{i_k})$. Donc tout vecteur de $Im(f)$ est c.l. des vecteurs de $f(\mathcal{F})$. J'en déduis que $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de Imf .

37 Exercice : Soit $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = XP' - P$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Décrire $Im(f)$ et $Ker(f)$.

• $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. En effet, $\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(aP + bQ) = X(aP + bQ)' - (aP + bQ) = X(aP' + bQ') - aP - bQ = a(XP' - P) + b(XQ' - Q) = af(P) + bf(Q)$. Donc f est linéaire.

• $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$ donc le théo 36 assure que $Im(f) = vect((f(X^k))_{k \in \mathbb{N}}) = vect((k-1)X^k)_{k \in \mathbb{N}} = vect((k-1)X^k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$.
 $Im(f) \stackrel{=}{=} vect((k-1)X^k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \stackrel{=}{=} vect(X^k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$.
car le polynôme nul (pour $k=1$) est c.l. des autres polynômes de la famille génératrice *une famille reste génératrice si on multiplie ses vecteurs par des scalaires non nuls.*

• $Ker(f) = \{P \in \mathbb{R}[X] / XP' - P = 0\}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq \deg(P)$.

Alors, $P \in Ker(f) \Leftrightarrow XP' - P = 0 \Leftrightarrow X(\sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k$
 $\Leftrightarrow a_0 + \sum_{k=1}^n (1-k)a_k X^k = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1-k)a_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{1\}, a_k = 0$
par unicité des coefficients du polynôme nul

$P \in Ker(f) \Leftrightarrow P = a_1 X$. Ainsi, $Ker(f) = \{aX / a \in \mathbb{R}\} = vect\left(\underset{\text{libre car } X \neq 0}{X}\right)$. Donc (X) est une base de $Ker(f)$.

3. Rang

38 Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f , notée $rg(f)$, est, par déf°, la dimension de $Im(f)$. Donc, $rg(f) = \dim(Im(f))$.

39 Prop. : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors $rg(f) = rg((f(\vec{e}_i))_{i \in I}) = rg(f(B))$.

Démo : $rg(f) \stackrel{=}{=} \dim(Im(f)) \stackrel{\text{théo 20}}{=} \dim(vect((f(\vec{e}_i))_{i \in I})) \stackrel{=}{=} rg((f(\vec{e}_i))_{i \in I})$
par déf° du rang d'une applicatino linéaire *théo 20* *par déf° du rang d'une famille de vecteurs*

39 bis Conséquence : $rg(M) = rg(\varphi_M)$

Démo : on a montré dans le chapitre précédent que $rg(M) = rg(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de M .

Or $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{p,1}(K)$, donc le théo 20 assure que : $Im(\varphi_M) = vect\left(\underbrace{\varphi_M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{=C_1}, \underbrace{\varphi_M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{=C_2}, \dots, \underbrace{\varphi_M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=C_p}\right)$

Donc, $Im(\varphi_M) = vect((C_1, \dots, C_p))$. Et par conséquent, $rg(\varphi_M) = rg(C_1, \dots, C_p)$. Et ainsi, $rg(M) = rg(\varphi_M)$.

40 Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Démo : Si E est de dimension finie alors E possède une base B et d'après la prop. 23, $rg(f) = rg(f(B))$. Or, d'après le chapitre précédent, $rg(f(B)) \leq \text{card}(f(B)) = \text{card}(B) = \dim E$. Ainsi, $rg(f) \leq \dim(E)$. Cette inégalité reste vraie si $\dim(E) = \infty$.

Si F est de dimension finie alors $Im(f)$ étant un ss-e-v de F , $\dim(Im(f)) \leq \dim F$ i.e. $rg(f) \leq \dim(F)$. Cette inégalité reste vraie si $\dim(F) = \infty$. Ainsi, $rg(f) \leq \dim(E)$ et $rg(f) \leq \dim(F)$ donc $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

41 Théo du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $rg(f) + \dim(Ker(f)) = \dim E$ (démo plus tard)



42 Exercice : Soit E un K-e-v de dimension 4 rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. Soit l'endomorphisme f de E tel que :

$f(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{d}$, $f(\vec{c}) = \vec{a} + \vec{d}$ et $f(\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = E$?

1) Tout d'abord, $\forall \vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + t\vec{d} \in E, f(\vec{u}) \stackrel{=}{=} xf(\vec{a}) + yf(\vec{b}) + zf(\vec{c}) + tf(\vec{d})$
car f est linéaire

$$f(\vec{u}) = (x+t)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + (y+z)(\vec{a} + \vec{d}) = (x+y+z+t)\vec{a} + (x+t)\vec{b} + (x+t)\vec{c} + (x+y+z+t)\vec{d}.$$

2) D'après la proposition, $Im(f) = vect(f(\vec{a}), f(\vec{b}), f(\vec{c}), f(\vec{d})) = vect(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d})$. Or, les deux vecteurs $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d}$ ne sont pas colinéaires puisque leurs composantes $(1,1,1,1)$ et $(1,0,0,1)$ dans B ne sont pas colinéaires. Ainsi, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d})$ est une base de $Im(f)$ et j'en déduis que $rg(f) = \dim(Im(f)) = 2$. Alors le théorème du rang assure que $\dim(Ker(f)) = \dim E - rg(f) = 4 - 2 = 2$. Donc, une base de $Ker(f)$ est constitué de deux vecteurs de $Ker(f)$ non colinéaires. Or, $f(\vec{a}) = f(\vec{d})$ donc, $f(\vec{a} - \vec{d}) = \vec{0}$ (car f linéaire) et par conséquent, $\vec{a} - \vec{d} \in Ker(f)$. De même, $\vec{c} - \vec{b} \in Ker(f)$. De plus, $\vec{a} - \vec{d}$ et $\vec{c} - \vec{b}$ ne sont pas colinéaires car leurs composantes dans B : $(1,0,0,-1)$ et $(0,-1,1,0)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi,

$(\vec{a} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{b})$ est une famille libre de et maximale dans $Ker(f)$. $(\vec{a} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{b})$ est donc une base de $Ker(f)$.

Pour savoir si $Ker(f) \oplus Im(f) = E$, regardons matriciellement si la concaténation de la base de $Im(f)$ et celle de $Ker(f)$ trouvées précédemment est une base de E .

$M = mat_b(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d}, \vec{a} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $rg(M) = 4$ et ainsi M est inversible. J'en déduis que $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d}, \vec{a} - \vec{d}, \vec{c} - \vec{b})$ est une base de E et ainsi que $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

4. Noyau et image d'une composée d'applications linéaires ou des itérés d'un endom.

43 A savoir justifier : Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

1. $g \circ f = \underset{\text{endom. nul}}{0}$ si et ssi $Im(f) \subset Ker(g)$.

2. $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.

Démo : 1) $g \circ f = \underset{\text{endom. nul}}{0} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, g(f(\vec{x})) = \vec{0} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow \forall \vec{y} \in \text{Im}(f), \vec{y} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$

2) Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ donc $g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}_F) = \vec{0}_G$ Donc, $\vec{x} \in \text{Ker}(g \circ f)$. Ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(g \circ f)$. Alors, $\exists \vec{x} \in E / g \circ f(\vec{x}) = \vec{y}$ donc $\vec{y} = g(f(\vec{x}))$. Donc, $\vec{y} \in \text{Im}(g)$. Ainsi, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

44A savoir démontrer : Pour tout endomorphisme f de E et tout entier naturel k ,

1. $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ sont des ss-e-v de E .
2. $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ et $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. On dit que les deux suites de ss-e-v de E : $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante au sens de l'inclusion.
3. Si E est de dimension finie alors ces deux suites de ss-e-v de E sont (stationnaires) constantes à partir d'un même rang.
4. $f^2 = 0$ si et ssi $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$.

Démo : 1) Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f^k)$. Alors $f^k(\vec{x}) = \vec{0}$ donc, $f^{k+1}(\vec{x}) = f(f^k(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$. Ainsi, $\vec{x} \in \text{Ker}(f^{k+1})$. J'en déduis que : $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(f^{k+1})$. Alors $\exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f^{k+1}(\vec{x})$. Donc, $\vec{y} = f^k(f(\vec{x})) = f^k(\vec{t})$ avec $\vec{t} = f(\vec{x}) \in \text{Im}(f^k)$. J'en déduis que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$.

2) Ici E est de dim. finie. Soit un entier naturel k . $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ et $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Ker}(f^{k+1})$ sont des ss-e-v de E donc sont de dimension finie. Alors $0 \leq \dim(\text{Ker}(f^k)) \leq \dim(\text{Ker}(f^{k+1})) \leq \dim(E)$. J'en déduis que $(\dim(\text{Ker}(f^k)))_{k \in \mathbb{N}}$ est une

suite d'entiers naturels croissante et bornée donc convergente. Donc nécessairement, cette suite est constante à partir d'un certain rang. Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p, \dim(\text{Ker}(f^k)) = \dim(\text{Ker}(f^p))$ et par conséquent, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$ (puisque $\text{Ker}(f^p)$ ss-e-v de $\text{Ker}(f^k)$). Alors le théo. du rang assure que : $\forall k \geq p, \dim(E) - \dim(\text{Im}(f^k)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f^p))$ et ainsi, $\dim(\text{Im}(f^k)) = \dim(\text{Im}(f^p))$. J'en déduis que $\forall k \geq p, \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$ (puisque $\text{Im}(f^k)$ ss-e-v de $\text{Im}(f^p)$).

3) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, f(f(\vec{x})) = \vec{0} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \forall \vec{y} \in \text{Im}(f), \vec{y} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}f \subset \text{Ker}f$.

5. Généralisation : image directe ou réciproque d'un ss-e-v par une application linéaire.

45 Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Si G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G)$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G , est un ss-e-v de E
2. Si H est un ss-e-v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H , est un ss-e-v de F .

Démo : 1) Soit G est un ss-e-v de F . $f^{-1}(G) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) \in G\}$. Être dans $f^{-1}(G)$ c'est avoir son image par f dans G .

Montrons que $f^{-1}(G)$ est un ss-e-v de E .

D1) $f^{-1}(G) \subset E$. **D2)** $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in G$ (car G ss-e-v de F) donc $\vec{0}_E \in f^{-1}(G)$. **D3b)** Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in f^{-1}(G)$ et $(a_1, a_2) \in K^2$.

Alors $f(\vec{x}_1)$ et $f(\vec{x}_2)$ sont dans G . Donc, $a_1 f(\vec{x}_1) + a_2 f(\vec{x}_2) \in G$ car G stable par c.l. Or, $a_1 f(\vec{x}_1) + a_2 f(\vec{x}_2) = f(a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2)$ car f linéaire. Donc, $f(a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \in G$ ce qui signifie que $a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 \in f^{-1}(G)$. Ainsi $f^{-1}(G)$ est un ss-e-v de E .

2) Soit H un ss-e-v de E et $f(H) = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in H\}$. Être dans $f(H)$ c'est avoir un antécédent dans H par f .

3) Montrons que $f(H)$ est un ss-e-v de F .

D1) $f(H) \subset F$ car f est à valeurs dans F . **D2)** $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $\vec{0}_E \in H$ (car H ss-e-v de E) donc $\vec{0}_F \in f(H)$. **D3b)** Soit $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in f(H)$ et $(a_1, a_2) \in K^2$.

Alors $\exists (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in H / f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$ et $f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$. Par conséquent, $a_1 \vec{y}_1 + a_2 \vec{y}_2 = a_1 f(\vec{x}_1) + a_2 f(\vec{x}_2) = f(a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2)$. De plus, $a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 \in H$ car H stable par c.l.. Ainsi $a_1 \vec{y}_1 + a_2 \vec{y}_2 \in f(H)$. Ainsi $f(H)$ est un ss-e-v de F .

46 NB : si $G = \{\vec{0}_F\}$ alors $f^{-1}(G) = \text{Ker}(f)$ et si $H = E$ alors $f(H) = \text{Im}(f)$.

47 Def. : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un ss-e-v de E (alors $f(H)$ est un ss-e-v de E).

On dit que H est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \rightarrow H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H .

48 Exercice : Soit $u: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $u(P) = X^2 P' - 6XP$. Montrer que u induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_6[X]$.

u est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. De plus u est linéaire car $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, u(aP + bQ) = X^2(aP' + bQ') - 6X(aP + bQ) = X^2(aP' - 6XP) + X^2(bQ' - 6XQ) = au(P) + bu(Q)$.

Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Montrons que $\mathbb{R}_6[X]$ est stable par u . Soit $P \in \mathbb{R}_6[X]$.

Ou bien $\deg P < 6$. Alors $\deg XP = 1 + \deg(P) \leq 6$ et $\deg(X^2 P') = 2 + \deg(P') \leq 6$. Par conséquent,

$\deg(u(P)) \leq \max(\deg(X^2 P'), \deg(XP)) \leq 6$.

Ou bien $\deg P = 6$. Alors $P = aX^6 + T(X)$ et $\deg(T) < 6$. Donc $u(P) = X^2(6aX^5 + T'(X)) - 6X(aX^6 + T(X)) = u(T)$. Comme $\deg T < 6$, $\deg(u(T)) \leq 6$ Par conséquent, $\deg(u(P)) \leq 6$. J'en déduis que $\forall P \in \mathbb{R}_6[X], u(P) \in \mathbb{R}_6[X]$. Ainsi, $\mathbb{R}_6[X]$ est stable par u . En conséquence,

l'application f définie par $\forall P \in \mathbb{R}_6[X], f(P) = X^2 P' - 6XP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_6[X]$. **Rque :** si $\deg(P) \neq 6$ alors $\deg(u(P)) = \deg(P) + 1$.

49A savoir démontrer : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.

Alors, $f - \lambda \text{id}_E$ est un endomorphisme de E et $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$ et $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par f .

Enfin, l'endomorphisme f_λ de $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ induit par f est l'homothétie de rapport λ .

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.

1) $f - \lambda \text{id}_E$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes de E et est donc un endomorphisme de E .

2) $\vec{x} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \text{id}_E)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{x}) - \lambda \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Donc, $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$

3) Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. Alors $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ donc $f(\vec{x})$ est une c.l. de $\vec{x}$. Comme $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est un ss-e-v de E , $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par c.l.. J'en déduis que $f(\vec{x}) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. Ainsi, $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par f .

4) Enfin, $\forall \vec{x} \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E), f_\lambda(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Donc, f_λ est l'homothétie de rapport λ dans $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.

50 NB : Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors E_1 et E_2 sont stables par l'unique application linéaire u de E vers F vérifiant : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

IV Application linéaire injective et / ou surjective. Isomorphisme.

1. Injectivité

51Théo : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.



Autrement dit, une application linéaire est injective si et ssi son noyau ne contient que le vecteur nul.

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\Rightarrow$ **Hypo :** f injective. $\text{Ker}(f)$ est un ss-e-v de E (car f linéaire) et contient donc $\vec{0}_E$. Montrons que $\vec{0}_E$ est le seul vecteur de $\text{Ker}(f)$. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_F \Leftrightarrow f(\vec{0}_E)$. $\vec{x}$ et $\vec{0}_E$ ont donc la même image par f . Or f est injective donc nécessairement $\vec{x} = \vec{0}_E$. Ainsi, $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

$\Leftarrow$ **Hypo :** $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$. Montrons que f est injective. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2$ tq $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$.

Alors, $f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}_F \Leftrightarrow f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}_F$. Donc $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \text{Ker}(f)$. Or, par hypo, $\text{Ker}(f)$ ne contient que $\vec{0}_E$.

Donc, $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}_E$. Et ainsi, $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Donc, deux éléments de E de même image par f sont nécessairement égaux. J'en conclus que f est injective.

52Exemple : $f: (P \mapsto P(X+1) - P(X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ non injectif car $1 \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$. Rappel : $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

53Exercice : Montrons que l'endomorphisme $f: (P \mapsto \alpha P - XP')$ de $\mathbb{R}[X]$ est injectif si et ssi $\alpha \notin \mathbb{N}$.

54Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

1) f est injective $\Rightarrow$ pour toute famille libre $(\vec{u}_i)_{i \in [1, n]}$ de vecteurs de E , $(f(\vec{u}_i))_{i \in [1, n]}$ est une famille libre de vecteurs de F .

2) Si E de dimension finie et admet une base $(\vec{e}_i)_{i \in [1, n]}$ alors

f est injective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in [1, n]}$ est une famille libre.

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E.$$

Démo : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) $\Rightarrow$ **Hypo :** f injective. Soit $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E (on suppose que E en contient une). Montrons que $(f(\vec{u}_i))_{i \in I}$ est une famille libre dans F . Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ / $\lambda_0 f(\vec{u}_0) + \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{u}_n) = \vec{0}_F$.

Alors, $f(\lambda_0 \vec{u}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n) = \vec{0}_F$ car f linéaire. Et par conséquent, $\lambda_0 \vec{u}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \in \text{Ker}(f)$. Or f est injective donc $\text{Ker}(f)$ ne contient que $\vec{0}_E$. Donc, nécessairement, $\lambda_0 \vec{u}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}_E$. Or $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est libre, donc nécessairement, $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. Et ainsi, je

une écriture de $\vec{0}$
comme c.l. des vecteurs $\vec{u}_i$

peux conclure que $(f(\vec{u}_i))_{i \in I}$ est une famille libre.

2) $\Rightarrow$ **a) Hypo :** f injective. Montrons que $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille libre dans F . $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est libre donc d'après 1) $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille libre dans F .

b) $\Rightarrow$ a) Hypo : $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille libre dans F . Montrons que f est injective. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Alors, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$. Donc, comme f est linéaire, $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\vec{e}_i)$. Par suite, $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}$. Comme $(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est libre, $\forall i, \alpha_i = 0$. Par conséquent, $\vec{x} = \vec{0}$.

b) $\Rightarrow$ c) Hypo : $f(B) = (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ soit libre. On sait de plus que $f(B)$ est génératrice de $\text{Im}(f)$. Alors $f(B)$ est une base de $\text{Im}(f)$. Donc, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}f) = \text{card}f(B) = \text{card}(B) = \dim E$.

c) $\Rightarrow$ b) Hypo : $\text{rg}(f) = \dim E$. Donc, $\dim(\text{Im}f) = \dim E = \text{card}(B) = \text{card}f(B)$. Comme $f(B)$ est génératrice de $\text{Im}f$ et $\text{card}f(B) = \dim(\text{Im}(f))$, je peux conclure que $f(B)$ est une base de $\text{Im}(f)$. Donc $f(B)$ est libre.

55Exercice : Montrons que l'endomorphisme $f: (P \mapsto P + P')$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est injectif.

$f = \text{id} + D$ où D est la dérivation. Comme id et D sont linéaires, f est linéaire. Et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f(P) = P + P' \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $f(B) = (1, X + 1, X^2 + 2X, X^3 + 3X^2, \dots, X^n + nX^{n-1})$. Cette famille $f(B)$ est libre car échelonnée en degrés. Donc, f est injective.

2. Surjectivité

56Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}f = F$



56bisExercice : Soit $u: C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par : $\forall f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que u est injectif mais n'est pas surjective de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\forall f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u(f)$ existe bien et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc, $u(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\forall (f, g) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(af + bg)(x) = \int_0^x (af + bg)(t) dt = \int_0^x af(t) dt + \int_0^x bg(t) dt = a \int_0^x f(t) dt + b \int_0^x g(t) dt = au(f)(x) + bu(g)(x) = (au(f) + bu(g))(x)$. Donc, $u(af + bg) = (au(f) + bu(g))$.

Ainsi, $u \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(f) = \vec{0} \Rightarrow f = u(f)' = \vec{0}$. Donc, $\text{Ker}(u) = \{ \vec{0} \}$. Ainsi, u est injective.

fonction nulle

fonction nulle

fonction nulle

57Prop. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Si $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors, f surjective de E sur $F \Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .

2) Si F est de dimension finie alors, f est surjective de E sur $F \Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$.



Démo : 1) Ici E admet une famille génératrice $(\vec{e}_i)_{i \in I}$. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \text{vect}(f(\vec{e}_i))_{i \in I} = F$.

car $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ (théo 20)

2) Ici, F est de dimension finie. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \Leftrightarrow \dim(\text{Im}f) = \dim(F)$.

car $\text{Im}(f)$ est un ss-e-v de F et F est de dim. finie.

58Exercice : Montrer que $f: ((x, y, z) \mapsto (x + y, 2z - x))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ surjective mais non injective. Donner une base de $\text{Ker}(f)$.

Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$f(a_1(x_1, y_1, z_1) + a_2(x_2, y_2, z_2)) = f((a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2, a_1z_1 + a_2z_2))$

$$\begin{aligned}
&= (a_1x_1 + a_2x_2 + a_1y_1 + a_2y_2, 2(a_1z_1 + a_2z_2) - (a_1x_1 + a_2x_2)) \\
&= (a_1x_1 + a_1y_1, 2a_1z_1 - a_1x_1) + (a_2x_2 + a_2y_2, 2a_2z_2 - a_2x_2) = \\
&= a_1(x_1 + y_1, 2z_1 - x_1) + a_2(x_2 + y_2, 2z_2 - x_2) = a_1f(x_1, y_1, z_1) + a_2f(x_2, y_2, z_2). \text{ Donc } f \text{ est linéaire.} \\
&\text{De plus, } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et } f((1,0,0)) = (1,-1), f((0,1,0)) = (1,0), f((0,0,1)) = (0,2). \\
&\text{Donc } \text{Im}f = \text{vect}((1,-1), (1,0), (0,2)) \stackrel{\cong}{=} \text{vect}((1,0), (0,2)) = \text{vect}((1,0), (0,1)) \stackrel{\cong}{=} \mathbb{R}^2. \\
&\quad \text{car } ((1,-1), (1,0)) \stackrel{\cong}{=} ((1,0), (-\frac{1}{2}(0,2))) \quad \text{car } ((1,0), (0,1)) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi f est surjective et $\text{rg}(f) = 2$.

Enfin, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1$. Donc, $\text{Ker}(f)$ est donc une droite vectorielle donc $\text{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$. Et par conséquent, f n'est pas injective. En outre, $f((2,-2,1)) = (0,0)$. Donc, $(2,-2,1)$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$. Donc $((2,-2,1))$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

59 Exercice : Montrer qu'une forme linéaire est surjective si et seulement si une de ses images est non nulle.

Soit f une forme linéaire sur un K -e-v E . Alors $\text{Im}(f)$ est un ss-e-v du K -e-v K donc $\dim(\text{Im}(f)) = 0$ ou 1 . Alors,

f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = K \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(f)$ contient un vecteur non nul $\Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

3. Isomorphisme

60 Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \text{Ker}f = \{\vec{0}_E\}$ et $\text{Im}f = F$.

2. Si E est de dimension finie et $(\vec{e}_i)_{i \in [1,n]}$ est une base de E alors

f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow ((f(\vec{e}_i))_{i \in [1,n]})$ est base de $F \Leftrightarrow \dim(E) = \text{rg}(f) = \dim(F) < +\infty$.

Démo : c'est une « concaténation » des théorèmes 51, 54, 56, 57.

61 Exercice : Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

Soit $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], f(Q) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$. Alors, $f(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f = \text{id} + D + D^2 + \dots + D^n$ où D est la dérivation, donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Soit $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $f(X^k) = X^k + kX^{k-1} + \dots + k!X^{k-k} + \dots + k!X^0$. Donc, $f(B) = (f(X^k))_{k=0..n}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degrés donc est libre. De plus, $\text{card}(f(B)) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Donc, $f(B)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ admet un unique antécédent Q par f . Q est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

62 Conséquence 1 : Un isomorphisme de E sur F envoie toute base de E sur une base de F . Et l'ensemble des antécédents des vecteurs d'une base de F par un isomorphisme de E sur F est une base de E .

63 NB : Cette conséquence fournit un autre moyen de montrer qu'une famille est une base.

64 Exercice : Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose $\forall k \in [0, n], X_k = (a_0^k, a_1^k, \dots, a_n^k) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. En utilisant la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$, montrer que $f: (P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)))$ est un isomorphisme.

2. En déduire que la famille $(X_k)_{k=0..n}$ est libre dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible.

65 Conséquence 2 : Si E est de dimension finie et E et F sont isomorphes, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

Plus généralement, E et F isomorphes $\Rightarrow \dim(E) = \dim(F)$ (finie ou infinie).

66 Exercice : Soit E le ss-e-v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites p -périodiques. Soit $h: (u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}))$. Montrons que $h \in \text{Isom}(E, \mathbb{C}^p)$. En déduire $\dim E$.

h est bien une application de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^p$. Soit $(u, v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
h(\alpha u + \beta v) &= (\alpha u_0 + \beta v_0, \alpha u_1 + \beta v_1, \dots, \alpha u_{p-1} + \beta v_{p-1}) = (\alpha u_0, \alpha u_1, \dots, \alpha u_{p-1}) + (\beta v_0, \beta v_1, \dots, \beta v_{p-1}) \\
&= \alpha(u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) + \beta(v_0, v_1, \dots, v_{p-1}) = \alpha h(u) + \beta h(v). \text{ Ainsi, } h \text{ est linéaire et j'en conclus que } h \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^p).
\end{aligned}$$

De plus, $\forall Y = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{C}^p, u = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, \dots)$ est alors la seule suite de E telle que $h(u) = Y$. Donc h est bijective et finalement, h est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^p$. J'en déduis que $\dim E = \dim \mathbb{C}^p = p$.

Rq : on avait déjà déterminé cette dimension en trouvant une base de E .

67 Conséquence Si E et F sont de dimensions différentes alors il n'existe aucun isomorphisme de E sur F

et plus précisément,

si $\dim(E) > \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire injective de E vers F .

si $\dim(E) < \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire surjective de E sur F .

Démo du plus précisément :

si $\dim(E) > \dim(F)$ alors toute application linéaire f de E dans F vérifie $\text{rg}(f) \leq \dim F < \dim E$ donc $\text{rg}(f) \neq \dim E$ et f n'est pas injective.

si $\dim(E) < \dim(F)$ alors toute application linéaire f de E dans F vérifie $\text{rg}(f) \leq \dim E < \dim F$ donc $\text{rg}(f) \neq \dim F$ et f n'est pas surjective.

68 « Réciproque » : Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors E et F sont isomorphes. (faux si $\dim E = \dim F = +\infty$).

Démo : Supposons que $\dim E = \dim F < +\infty$. Considérons une base $B = (\vec{e}_i)_{i=1..n}$ une base de E et $B' = (\vec{v}_i)_{i=1..n}$ une base de F . Alors le théorème 9 assure qu'il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall i, f(\vec{e}_i) = \vec{v}_i$. Comme f envoie la base B de E vers la base B' de F , f est un isomorphisme de E sur F . Ainsi, E et F sont isomorphes.

69 Caractérisation des isomorphismes en dimension finie :

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E et F sont de même dimension finie alors :

f est un isomorphisme de E sur F

$\Leftrightarrow f$ injective

$\Leftrightarrow f$ surjective de E sur F

$\Leftrightarrow \text{rg}f = \dim E (= \dim F)$

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si E est de dimension finie alors :

f est un automorphisme de E
 $\Leftrightarrow f$ injective
 $\Leftrightarrow f$ surjective de E sur F
 $\Leftrightarrow rg(f) = \dim E (= \dim F)$



Démo : f injective $\Leftrightarrow rg(f) = \dim E \stackrel{\text{car } \dim E = \dim F}{\Leftrightarrow} rg(f) = \dim F \Leftrightarrow f$ surjective. Ainsi f injective $\Leftrightarrow f$ injective et surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

70 Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (1 - nX)P(X) + X^2P'(X)$. Montrer que $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$.

$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$

$\varphi(aP + bQ) = (1 - nX)(aP(X) + bQ(X)) + X^2(aP'(X) + bQ'(X)) = a(1 - nX)P(X) + b(1 - nX)Q(X) + aX^2P'(X) + bX^2Q'(X) = a[(1 - nX)P + X^2P'] + b[(1 - nX)Q + X^2Q'] = a\varphi(P) + b\varphi(Q)$. Donc φ est linéaire. De plus, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si $\deg P < n$ alors $\deg[(1 - nX)P(X)] = \deg(1 - nX) + \deg P \leq 1 + (n - 1) = n$ et $\deg X^2P' = \deg X^2 + \deg P' \leq 2 + (n - 2) = n$ donc, $\deg \varphi(P) \leq n$.

Si $n = \deg P$ alors $P = a_nX^n + T(X)$ tq $\deg T < n$ donc $\varphi(P) = (1 - nX)(a_nX^n + T(X)) + X^2(na_nX^{n-1} + T'(X)) = a_nX^n + \varphi(T)$ et d'après ce qui précède, $\deg \varphi(T) \leq n$. Donc, $\deg \varphi(P) \leq n$. Ainsi, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Montrons que φ est injective : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\varphi(P) = 0 \Rightarrow (1 - nX)P(X) + X^2P'(X) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2\tilde{P}'(x) + (1 - nx)\tilde{P}(x) = 0 \Rightarrow \tilde{P}$ est solution de l'ed1 $x^2y' + (1 - nx)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $a(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{n}{x}\right)$. Donc $A: (x \mapsto -\frac{1}{x} - n \ln(x))$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}^{**}$ et $e^{-A(x)} = e^{\frac{1}{x} + n \ln(x)} = e^{\frac{1}{x}}e^{\ln(x^n)} = x^n e^{\frac{1}{x}}$. Donc les solutions de l'ed1 sur $\mathbb{R}^{**}$ sont les fonctions $(x \mapsto kx^n e^{\frac{1}{x}})$ telles que $k \in \mathbb{R}^{**}$. La seule solution polynomiale est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{**}$.

Alors, $\varphi(P) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{**} P(x) = 0 \stackrel{\text{car } P \text{ a une infinité de racines donc est le polynôme nul.}}{\Rightarrow} P = 0$. Ainsi, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ et φ est injective. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et φ est

un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$, je peux conclure que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

71 Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si G est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E alors $\text{Im } f$ et G sont isomorphes.

En conséquence : Si E est de dimension finie alors $rg(f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(E)$



Démo : 1) on suppose que $\text{Ker}(f)$ admette un supplémentaire G dans E . Construisons un isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$.

Soit $u: G \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par : $\forall \vec{x} \in G, u(\vec{x}) = f(\vec{x})$. Montrons que u est un isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$.

Tout d'abord, $\forall \vec{x} \in G, \vec{x} \in E$, donc $u(\vec{x})$ existe et $u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \in \text{Im}(f)$.

Ensuite, u est linéaire car f est linéaire.

Montrons que u est injective i.e. $\text{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(u)$. Alors $\vec{x} \in G$ et $u(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \vec{0}$. Donc, $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$. Par conséquent, $\vec{x} \in G \cap \text{Ker}(f)$. Or, G et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E donc $G \cap \text{Ker}(f)$ ne contient que $\vec{0}$. Ainsi, $\vec{x} = \vec{0}$. J'en conclus que u est injective.

Montrons que u est surjective i.e. tout vecteur de $\text{Im}(f)$ admet un antécédent dans G par u . Soit $\vec{y} \in \text{Im}(f)$. Alors par def° de $\text{Im}(f)$, $\exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$. Comme $E = G \oplus \text{Ker}(f)$, $\exists (\vec{g}, \vec{k}) \in G \times \text{Ker}(f) / \vec{x} = \vec{g} + \vec{k}$.

Alors $\vec{y} = f(\vec{g} + \vec{k}) \stackrel{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} f(\vec{g}) + \underbrace{f(\vec{k})}_{=\vec{0}} = f(\vec{g}) \stackrel{\text{car } \vec{g} \in G}{=} u(\vec{g})$. Ainsi, $\vec{y}$ a un antécédent $\vec{g} \in G$ par u . Donc, u est surjective de G sur $\text{Im}(f)$.

J'en conclus que : u est isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$. Et ainsi, G et $\text{Im}(f)$ sont isomorphes.

2) Supposons maintenant E de dimension finie. Alors $\text{Ker}(f)$ étant un ss-e-v de E , a un supplémentaire dans E noté G et G , étant un ss-e-v de E , est de dimension finie et comme il existe un isomorphisme u de G sur $\text{Im}(f)$, on peut affirmer grâce à la prop 41, que $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(G)$. De plus, G et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans le K-e-v E de dimension finie ; donc, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(G) = \dim(E)$. Alors je déduis de ce qui précède que : $\dim(\text{Ker } f) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{=rg(f)} = \dim(E)$. OK !

72 Prop. : Soit E et F deux K-e-v de même dimension.

1) Si f est un isomorphisme de E sur F et H est un ss-e-v de E alors $f(H)$ et H ont la même dimension.

2) Si f est un isomorphisme de E sur F et G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G) = \{f^{-1}(\vec{y}) / \vec{y} \in G\}$ et $f^{-1}(G)$ et G ont la même dimension.

Démo : Soit f un isomorphisme de E sur F .

Si H est un ss-e-v de E alors $f|_H: \left(\begin{matrix} H \rightarrow f(H) \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{matrix}\right)$ est un isomorphisme de H sur $f(H)$ donc, $\dim(H) = \dim(f(H))$.

Si G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) \in G\}$ et $f^{-1}(G) = \{f^{-1}(\vec{y}) / \vec{y} \in G\} = \{\vec{x} \in E / \exists \vec{y} \in G, \vec{y} = f(\vec{x})\} = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) \in G\} = f^{-1}(G)$.

$f^{-1}|_G: \left(\begin{matrix} G \rightarrow f^{-1}(G) \\ \vec{y} \mapsto f^{-1}(\vec{y}) \end{matrix}\right)$ est un isomorphisme de G sur $f^{-1}(G)$ donc, $\dim G = \dim(f^{-1}(G))$.

73 Propriété du rang . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(G, E)$

1) Si g est un isomorphisme de F sur G alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.

2) Si h est un isomorphisme de G sur E alors $rg(f \circ h) = rg(f)$.

Autrement dit, le rang est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

1) $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$.

74 NB : ce résultat rappelle le résultat sur les matrices : le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.

Démo : $rg(g \circ f) = \dim(\text{Im}(g \circ f)) = \dim((g \circ f)(E)) = \dim(g(f(E))) \stackrel{\text{car } g \text{ isomorphisme + prop 55.}}{=} \dim(f(E)) = \dim(\text{Im}(f)) = rg(f)$.

$rg(f \circ h) = \dim(\text{Im}(f \circ h)) = \dim((f \circ h)(G)) = \dim(f(h(G))) \stackrel{\text{car } h \text{ isomorphisme de } G \text{ sur } E \text{ dc } h(G)=E.}{=} \dim(f(E)) = rg(f)$.