TD 19

Applications linéaires.

Ex 1 Sont-elles linéaires ? Si oui, trouver une base du noyau et une base de l'image.

1. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P(2)P'(1)$.
2. u définie sur $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $u(f) = f' + 2f$.
3. Soit $D = \text{diag}(a, b)$ où a et b complexes fixés et u définie sur $M_2(\mathbb{C})$ par : $u(M) = DM^T$.
4. Ψ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\Psi((x, y)) = (x - 3y, 2x^2 - y)$.
5. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + XP' + 1$.
6. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + P'(1)X$.
7. u définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $u(f) = 2f(0)f''$.
8. Ψ définie sur $\mathbb{R}^4$ par : $\Psi((x, y, z, t)) = 4y - x + t$.

Réponses : N, O, N, O, N, N, O, N, O

Ex 2 Montrer que f est linéaire et déterminer $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$ et $\text{rg} f$. f est-elle injective ? surjective ? f est-elle un endomorphisme ? automorphisme ? un isomorphisme ? une forme linéaire ?

1. Soit $\varphi : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $\varphi(f) = g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x t f(t) dt$.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ convergente}\}$ et φ définie sur E par : $\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\varphi(P) = P'(2) + 4P^{(3)}(2)$.
4. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^4$ par $\varphi(x, y, z, t) = (2x - y + t, x - 2y, t - 2x + y)$
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ application définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX - XA$.
6. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = \text{tr}(M)$.
7. Soit φ application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - \text{tr}(M)I$.
8. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - M^T$.

Les questions surlignées en vert (gris) peuvent être traitées avec les matrices d'applications linéaires étudiées au chapitre suivant.

Ex 3 1. Soit E un K -e-v de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $u(\vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{c}$, $u(\vec{b}) = 3\vec{b}$ et $u(\vec{c}) = -4\vec{a} + 4\vec{c}$. Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que $\text{ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
- b. Soit p la projection sur $\text{Ker} f$ et parallèlement à $\text{Im} f$ et q la projection associée. Déterminer $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$.

Ex 4 1. Déterminer l'unique forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que : $f((1, 1, 1)) = 0$, $f((2, 0, 1)) = 1$ et $f((1, 2, 3)) = 4$.

2. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $\text{vect}((1, 0, 0), (1, 1, 1))$. Déterminer $\text{Im} f$.

3. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est H ?

Ex 5 Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $u^2(P)$, en fonction de P .
3. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.
4. Soit la symétrie s par rapport à $\text{Im}(u)$ et parallèlement à $\text{Ker}(u)$. Déterminer $s(a + bX + cX^2 + dX^3)$.

Ex 6 Soit u définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et une base de $\text{Ker}(u)$.
3. Soit $Q \in \text{Im}(u)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Ex 7 Pour tout polynôme P , $\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
3. En déduire que φ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ noté g . g est-il un automorphisme ? Déterminer ses image et noyau.

Ex 8 Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E

1. Montrer que $\varphi : E^* \rightarrow K^n$ définie par : $\varphi(f) = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est un isomorphisme. Qu'en déduit-on sur E^* ?
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $e_k^* : E \rightarrow K$ telle que : $e_k^*(\vec{x}) =$ la composante de $\vec{x}$ selon $\vec{e}_k$ dans B .
Montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* .

3. Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1+\cos^2(t)} dt$.
Montrer que $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P) = \lambda_0 P(a_0) + \lambda_1 P(a_1) + \dots + \lambda_{n-1} P(a_{n-1})$.

Ex 9 Soit F et G deux ss-e-v de E . Soit $\varphi: F \times G \rightarrow E$ telle que : $\varphi((\vec{x}, \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y}$. Montrer que φ est linéaire. Décrire son noyau et son image. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective puis surjective puis bijective.

Ex 10 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit a et b deux scalaires distincts.

1. Montrer que : $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \text{ker} f = \{\vec{0}\}$
2. Montrer que : $\text{Im} f^2 = \text{Im} f \Leftrightarrow \text{Im} f + \text{Ker} f = E$.
3. Démontrer que $\text{Ker}(f - a \cdot \text{id})$ et $\text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$ sont stables par f et en somme directe.

Ex 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe un entier naturel p non nul vérifiant $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Montrer que : $\mathcal{B} = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
2. Si E est de dimension finie n , comparer n et p . Que dire de $\mathcal{B}$ si $p = n$?

Ex 12 Soit E un K-e-v et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 + 6f - 7\text{id} = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1} en fonction de f et id .
2. Montrer que : $(f - \text{id}) \circ (f + 7\text{id}) = 0$. En déduire que $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Im}(f + 7\text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$.
3. Démontrer enfin que $\text{Ker}(f + 7\text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}) = E$.
4. Montrer que $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Ker}(f - \text{id})$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Ker}(f - \text{id})$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{id})$ et q l'autre projection associée.
  - a. Montrer que $f = -7p + q$.
  - b. En déduire que $f^n = (-7)^n p + q$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme d'un K-e-v E tel que $f^3 = f$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .

Ex 14 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si F et G sont deux ss-e-v de E stables par f alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par f .
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$ alors $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f .

Ex 15 Soit $f \in E^*$ telle que f non nulle.

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $\vec{a} \in E \setminus \text{Ker}(f)$. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{vect}(\vec{a}) = E$. Que peut-on alors dire de $\text{Ker}(f)$?

Ex 16 Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ telle que : $v \circ u = \text{id}_E$. Montrer que $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u)$.

Ex 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un K-e-v E de dimension finie n .

1. Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . Montrer que : $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} / u(\vec{e}_{i_0}) \neq 0$.
2. Montrer que :
  - $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
  - $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u - v)$.

Ex 18 Soit E de dimension finie n . Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$

1. On suppose ici que : $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.
2. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u^2 = 0$ et $2\text{rg}(u) = n$.
3. On suppose ici que $u^2 + 2u = 0$. Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E et que u induit un automorphisme sur $\text{Im}(u)$.

4. On suppose que $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u)$. Montrer que :
$$\begin{cases} \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u) \\ \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \\ \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E \end{cases}$$

Ex 19 Soit E de dimension finie n .

1. a. Montrer que les suites $(\text{Im}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires.
b. Soit p le plus petit entier tel que $\text{Im}(u^p) = \text{Im}(u^{p+1})$. Montrer que $\forall k \geq p, \text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p)$.
c. Montrer que $\text{Im}(u^p) \oplus \text{Ker}(u^p) = E$.

Ex 20 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On étudie sur des cas particuliers les solutions de l'équation (eq) : $(f + \text{id})^{2n} = \text{id}$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

1. Déterminer les homothéties vectorielles sur E qui sont solutions de (eq)
2. Soit s une symétrie. Exprimer $(s + \text{id}_E)^{2n} - \text{id}_E$ en fonction de s et id_E . En déduire les symétries solutions de (eq).
3. Déterminer les projections vectorielles de E solutions de (eq).

Ex 21 Soit E un K -e-v et u un vecteur de E et p un projecteur et s une involution dans E .

1. Résoudre l'équation $x + p(x) = u$ d'inconnue x élément de E .
2. Résoudre l'équation $x + s(x) = u$ d'inconnue x élément de E .

Ex 22 Soit p et q deux projecteurs d'un K -e-v E pas forcément associés tels que $Im(p) = Im(q)$ et $q \circ p = p \circ q$.
Montrer que $p = q$.

Ex 23 A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Exemples. Déterminer $T(f)$ dans les cas suivants :

$$1. f(t) = t^2 \cos(4t^3 - 5) \qquad 3. f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

$$2. f(t) = \cos(2t) \sin^3(t)$$

Partie II : Etude de T sur E_n . Soit n un entier naturel. On note E_n , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T . On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T .
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n .
4. Déterminer tous les réels λ pour lesquels il existe un élément $P \in E_n$ non nul et vérifiant $T_n(P) = \lambda P$.
5. Pour chaque valeur de λ déterminé précédemment, déterminer une base de $Ker(T_n - \lambda Id_{E_n})$.

Partie III : Etude de T dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$ d'inconnue y .
2. Etudier la continuité de $T(f)$ en 0.
3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker(T - \frac{1}{2} Id)$.

Ex 24 Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que Δ induit sur $\mathbb{R}_2[X]$ un endomorphisme u .
3. Déterminer une base de $Ker(u)$ et une base de $Im(u)$. Qu'en déduit-on sur u ?
4. Montrer que si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que : $\forall n, \deg(P_n) = n$ alors tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire (finie) des polynômes P_n ; on dit que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
5. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$. Δ est-elle injective ? surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$?
6. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.
7. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
8. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P = \sum_{n=0}^p (\Delta^n(P))(0) H_n$.
9. Montrer que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$ puis $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.
10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \frac{1}{n!} X(X-1)(X-2) \dots (X-n+1)$.

Ex 25 Soit Ψ l'application qui, à une fonction f , associe sa dérivée f' .

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Soit E l'ensemble des fonctions de la forme $(x \mapsto \tilde{P}(x) \cos(x) + \tilde{Q}(x) \sin(x))$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie et déterminer sa dimension.
  4. Montrer que E est stable par Ψ . On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ . On note Id_E l'application identité sur E .
  5. Déterminer $Ker(D)$. En déduire que D est un automorphisme de E .
  6. Déterminer, selon les valeurs du réel λ , le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
  7. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
  8. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E .
  9. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D .
- On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2 .
10. Vérifier que V est stable par composition.
  11. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta D^2$ tel que α et β scalaires distincts.
  12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
  13. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_E$.
  14. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2 + Id_E)^2$.
  15. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.