# Matrices d'une application linéaire

**1 Rappel :**

**1.** Si $\underline{E \text{ et } F}$ sont de même dimenson finie alors

$f \in Isom(E,F) \Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ et $f$ injective

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $f$ surjective de $E$ sur $F$

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $rg(f) = \dim(E) = \dim(F)$

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $f$ envoie une base de $E$ sur une base de $F$.

**2.** Si $\underline{E}$ est de dimenson finie alors

$f \in GL(E) \Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ et $f$ injective

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $f$ surjective de $E$ sur $E$

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $rg(f) = \dim(E)$

$\Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $f$ envoie une base de $E$ sur une base de $E$.

3. Si $B$ est une base finie d'un K-e-v $E$ , $\Delta : (\vec{z} \mapsto mat_B \vec{z})$ est un isomorphisme de $E$ sur $M_{p,1}(K)$ où $p = dim(E)$.

**2 Désormais, $E$ et $F$ désignent deux $K-e-v$ de dimension finie tels que $dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ et $dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$/**

# I Matrice d'une application linéaire

**3 Def :** Soit $B_1 = (\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du $K-e-v\ E$ $(dimE = p)$ et $B_2 = (\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du $K-e-v\ F$ $(dimF = n)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
La **matrice de $f$ dans les bases $B_1$ et $B_2$,** notée $mat_{B_1,B_2}(f)$, est la matrice de la famille $(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p}))$ dans la base $B_2$. Autrement dit,

$$M = mat_{B_1,B_2}(f) = mat_{B_2}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \,..\, & f(\vec{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2p} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ selon\ \vec{v}_1 \\ selon\ \vec{v}_2 \\ \cdots \\ selon\ \vec{v}_n \end{array}.$$

**4 NB** : Une telle matrice se lit donc en colonne : la colonne $k$ contient les composantes du vecteurs $f(\vec{e_k})$ dans la base $B_2$ ce qui signifie que $f(\vec{e_k}) = a_{1k}\vec{v_1} + a_{2k}\vec{v_2} + \cdots + a_{nk}\vec{v_n}$ .

**5 Exo :** 1) Montrer que $B_2 = ((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On note $B_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$ . Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
3) Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans les bases $B_2$ et $B_c$ et la matrice $M$ de $f$ dans les bases $B_1$ et $B_c$ où $B_c$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**6 Propriété fondamentale : Soit $B_1 = (\vec{e_k})_{k=1..p}$ une base du $K-e-v\ E$ et $B_2 = (\vec{v_k})_{k=1..n}$ une base du $K-e-v\ F$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.**

$$\forall \vec{x} \in E,\ \underbrace{mat_{B_2}(f(\vec{x}))}_{Y} = \underbrace{mat_{B_1,B_2}(f)}_{M} \times \underbrace{mat_{B_1}(\vec{x})}_{X} \quad i.e. \quad Y = MX .$$

**Démo de la propriété fondamentale :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2p} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Montrons que : $\forall \vec{x} \in E,\ mat_{B_2}(f(\vec{x})) = mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}(\vec{x})$. Soit $\vec{x} \in E$ *et* $X = mat_{B_1}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$; cela signifie que : $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e_k}$.

Posons $M = mat_{B_2}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \,..\, & f(\vec{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2p} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ selon\ \vec{v}_1 \\ selon\ \vec{v}_2 \\ \cdots \\ selon\ \vec{v}_n \end{array}$ i.e. $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\vec{e_k}) = a_{1k}\vec{v_1} + a_{2k}\vec{v_2} + \cdots + a_{nk}\vec{v_n}$ . Alors,

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e_k}\right) \underbrace{=}_{car\ f\ linéaire} \sum_{k=1}^{p} x_k f(\vec{e_k}) = \sum_{k=1}^{p} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{v_i}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_k a_{ik}\vec{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k a_{ik}\vec{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k a_{ik}\right)\vec{v_i}.$$

Donc, $Y = mat_{B_2}(f(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} x_k a_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} x_k a_{nk} \end{pmatrix} = MX$. OK !

**7 Exo :** Soit $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ *tel que* $mat_{B_1B_2} f = M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ où $B_1$ *et* $B_2$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $f(x,y)$. $f$ est l'application linéaire canoniquement associée à $M$ ( Cf ci-dessous) .

**8 Exemples à connaitre** : Soit $M \in M_{n,p}(K)$.

1. Si $B_1$ est une base canonique de $E$ et $B_2$ est une base canonique de $F$, **l'application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ canoniquement associé à $M$** est l'unique application linéaire de $E$ dans $F$ telle que $mat_{B_1,B_2} f = M$.
2. Si $f_M : \left( \begin{array}{c} K^p \to K^n \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \ tq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{array} \right)$ alors $M = mat_{B_1,B_2} f_M$ où $B_1$ et $B_2$ bases canoniques de $K^p$ et $K^n$.
3. Si $\varphi_M : (X \mapsto MX)$ alors $M = mat_{B_1,B_2} \varphi_M$ où $B_1$ et $B_2$ bases canoniques de $M_{p,1}(K)$ et $M_{n,1}(K)$.

**9 Conséquence** : toute matrice est la matrice d'une application linéaire !

**Démo** : 1.Posons $B_1$ et $B_2$ les bases canoniques de $K^p$ et $K^n$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$

$(y_1, \dots, y_n) = f_M\left(\left(0,0, \dots 0, \underbrace{1}_{k\text{ième composante}}, 0, \dots, 0\right)\right)$ *vérifie* l'égalité $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{C_k}_{k\text{ième colonne de } M}$. Donc $mat_{B_1,B_2}(f_M) = M$.

1.Idem pour $\varphi_M$ avec $B_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *base de* $M_{p,1}(K)$ et $B_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *base de* $M_{n,1}(K)$.

**10 Exemple :** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^4$ par : $f\big((x,y,z,t)\big) = (2x + y - t, 5x - z + 2t, t - 3x)$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ et donner sa matrice dans les bases canoniques $B_1$ *et* $B_2$ de $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$.

**11 Théorème fondamentale :** Soit $B_1 = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ une base du K-e-v $E$ et $B_2 = (\overrightarrow{v_k})_{k=1..n}$ une base du $K$-e-v $F$ et $f$ une application de $E$ dans $F$. Alors, $\nabla$: $\begin{array}{l} \mathscr{L}(E,F) \to M_{n,p}(K) \\ f \mapsto mat_{B_1,B_2} f \end{array}$ est un isomorphisme.

En particulier, une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement définie par sa matrice dans deux bases fixées et toute matrice est la matrice d'une application linéaire.

**Démo :** $\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \nabla(f) \in M_{n,p}(K)$. $\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, $\forall (a,b) \in K^2$,

$\nabla(af + bg) = mat_{B_1,B_2}(af + bg) = mat_{B_2}\left(af(\overrightarrow{e_1}) + bg(\overrightarrow{e_1}), af(\overrightarrow{e_2}) + bg(\overrightarrow{e_2}), \dots, af(\overrightarrow{e_p}) + bg(\overrightarrow{e_p})\right)$

$\underbrace{=}_{par\,\Delta} amat_{B_2}\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right) + bmat_{B_2}\left(g(\overrightarrow{e_1}), g(\overrightarrow{e_2}), \dots, g(\overrightarrow{e_p})\right) = amat_{B_1,B_2}(f) + bmat_{B_1,B_2}(g) = a\nabla(f) + b\nabla(g)$.

Donc, $\nabla$ est une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $M_{n,p}(K)$.

<u>Montrons que $\nabla$ est bijective</u>. Ne connaissant pas la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, je dois montrer que $\nabla$ est injective et surjective. Pour cela, montrons que toute matrice de $M_{n,p}(K)$ admet un unique antécédent par $\nabla$.

Soit $M \in M_{n,p}(K)$. *Alors* $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots \dots a_{2p} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{np} \end{pmatrix}$. *Posons* $\forall k \in [\![1,n]\!], \overrightarrow{w_k} = a_{1k}\overrightarrow{v_1} + a_{2k}\overrightarrow{v_2} + \dots + a_{nk}\overrightarrow{v_n}$. Alors $(\overrightarrow{w_k})_{k=1..n}$ est une famille de vecteurs de $F$. Donc d' après le chapitre précédent, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{w_k}$. Ainsi, $\exists! f \in \mathscr{L}(E,F) / \nabla(f) = M$. Ainsi, $\nabla$ est bijective. Par conséquent , comme $M_{n,p}(K)$ est de dimension finie $n \times p$, $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi de même dimension finie $n \times p = \dim(F) \times \dim(E)$.

De plus , la famille $\left(\nabla^{-1}(E_{ij})\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..p}}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$ (car tout automorphisme envoie une base sur une base). De plus , $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, *en posant* $\nabla^{-1}(E_{ij}) = f_{ij}$ , *on a* : $\forall k \in [\![1,p]\!], f_{ij}(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{kj}\vec{v}_i$. J'en déduis le théorème suivant :

**12 Théorème** : Si $E$ *et* $F$ sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie égale à $\dim(E) \times \dim(F)$.

De plus, une base de $\mathscr{L}(E,F)$ est la famille $(f_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..p}}$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \forall k \in [\![1,p]\!], f_{ij}(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{kj}\vec{v}_i$

En particulier, si $E$ est de dimension finie alors $\dim(E^*) = \dim(E)$ .

# II Matrice d'endomorphisme

**13 Def. matrice d'un endomorphisme dans une base** : Si $f$ est un endomorphisme de $E$ alors on peut considérer la même base $B = (\overrightarrow{e_k})_{k=1..p}$ de $E$ au départ et à l'arrivée et la **matrice de $f$ dans** $B$ est $mat_B f = mat_{B,B} f$.

$mat_B f = mat_B\left(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right)$. Alors , $mat_B f(\vec{x}) = mat_B f \times mat_B \vec{x}$.

**14 Exemple** : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = P + (1 - X)P'$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et déterminer la matrice de $f$ dans la base de Taylor en 1.

**15 Def. Endomorphisme canoniquement associé à une matrice :** Soit $M$ une matrice carrée d'ordre $n$ .

- $f$ est l'endomorphisme de $K^n$ canoniquement associé à la matrice $M$ lorsque $\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n, mat_{B_c}\left(f\big((x_1, \dots, x_n)\big)\right) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ **OU de manière équivalente**(d'après exemple 8) lorsque $M$ est la matrice de $f$ dans la base canonique de $K^n$ .
- Plus généralement, si $E$ est un $K$-e-v ayant une base canonique alors $f$ est l'endomorphisme de $E$ canoniquement associé à la matrice $M$ lorsque $M$ est la matrice de $f$ dans la base canonique de $E$.

**16 Exemple** : Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression de $f$.

**17 Matrice de l'identité :** Soit $B_1, B_2$ deux bases de $E$ et $\dim(E) = p$. Alors, $mat_{B_1}\, id_E = I_p$ et $mat_{B_2,B_1}\, id_E = mat_{B_1}\, B_2 = matrice\ de\ passage\ de\ B_1\ à\ B_2 = P(B_1, B_2)$.

**Démo** : Soit $B_1 = (e_1, e_2, .., e_p)$ et $B_2 = (u_1, u_2, .., u_p)$.

Alors, $\forall k \in [\![1,p]\!], id(e_k) = e_k = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{k-1} + 1e_k + 0e_{k+1} + .. + 0e_n$. Donc, $mat_{B_1}\, id_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_p$.

$\underbrace{mat_{B_1}\, B_2}_{matrice\ de\ passage\ de\ B_1\ à\ B_2.} = mat_{B_1} id(B_2) = mat_{B_2,B_1} id.$

**18 Matrice d'une homothétie :** Soit $h$ l'homothétie de $E$ de rapport $\alpha \in K^*$.

Alors dans toute base $B$ de $E$, $mat_B h = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_p$.

**Démo** : $h = \alpha Id$ donc, $mat_B h = mat_B(\alpha Id) \underbrace{=}_{car\ \nabla\ linéaire} \alpha mat_B Id = \alpha I_p$.

**19 Matrice d'un endomorphisme laissant stables deux ss-e-v supplémentaires**

Si $E_1$ et $E_2$ sont deux sous e v supplémentaires dans $E$ stables par l'endomorphisme $f$ de $E$, alors dans toute base $B$ de $E$ adaptée à la somme directe i.e. toute concaténation d'une base $B_1$ de $E_1$ et d' une base $B_2$ de $E_2$, la matrice de $f$ est la suivante : $mat_B f = \begin{pmatrix} mat_{B_1} f_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & mat_{B_2} f_2 \end{pmatrix}$ où $f_1$ est l'endomorphisme de $E_1$ induit par $f$ et $f_2$ est l'endomorphisme de $E_2$ induit par $f$.

**Démo** : Notons $B$ la concaténation de la base $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_r})$ de $F$ et de la base $B_2 = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, .., \vec{u_s})$. de $G$.
Alors $\forall k \in [\![1,r]\!], f(\vec{e_k}) = f_1(\vec{e_k}) \in F$ donc $f(\vec{e_k})$ est c.l. des vecteurs de $B_1$: $f(\vec{e_k}) = \sum_{i=1}^{r} a_{ik}\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{r} a_{ik}\vec{e_i} + \sum_{i=1}^{s} 0\vec{u_i}$.
De même, $\forall k \in [\![1,s]\!], f(\vec{u_k}) = f_2(\vec{u_k}) \in G$ donc $f(\vec{u_k})$ est c.l. des vecteurs de $B_2$: $f(\vec{u_k}) = \sum_{i=1}^{s} b_{ik}\vec{u_i} = \sum_{i=1}^{r} 0\vec{e_i} + \sum_{i=1}^{s} b_{ik}\vec{u_i}$. Alors,

$$mat_B f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & & 0 \\ \vdots & \blacksquare & \vdots & & (0) & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & (0) & & \vdots & \blacksquare & \vdots \\ 0 & & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mat_{B_1} f_1 & (0) \\ (0) & mat_{B_2} f_2 \end{pmatrix}.$$

# III Lecture matricielle du noyau, de l'image et du rang. Iso(auto)morphisme.

Soit $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_p})$ base de $E$ et $B_2 = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, .., \vec{v_n})$. base de $F$ .

## 1. Rang , image et noyau de $f$

**20** NB : le théorème du rang s'applique toujours lorsque $f$ est décrit matriciellement puisque $E$ est de dimension finie.

**21 Théorème :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Alors, $rg(f) = rg(M)$.

**Démo :** $rg(f) \underbrace{=}_{chap\ application\ linéaire} rg((f(\vec{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}) \underbrace{=}_{chap\ e.v\ de\ dim finie} rg(mat_{B_2}(f(\vec{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}) \underbrace{=}_{def 3} rgM$ .

**22 Théorème** : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$ . Les colonnes de $M$ sont les composantes dans $B_2$ des vecteurs d'une famille génératrice de $Im(f)$.

**Démo :** $Imf = vect\ ((f(\vec{e_i}))_{i\in\{1,..,p\}}$. Or, les colonnes de la matrice $M$ sont les composantes des vecteurs $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_p})$ dans la base $B_2$.

**23 Théo :** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Soit $\vec{x} \in E$ et $X = mat_{B_1}\vec{x}$ .
Alors $\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow \underbrace{MX = 0}_{système\ linéaire} \Leftrightarrow X \in KerM$

**Démo** : Soit $\vec{x} \in E$ tq $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k}$ . Alors, $X = mat_{B_1}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ .

$$\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta\ bijective} mat_{B_2}(f(\vec{x})) = mat_{B_2}(\vec{0}) \underset{prop\ 3}{\Longleftrightarrow} mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}(\vec{x}) = (0) \Leftrightarrow \underbrace{MX = 0}_{système\ linéaire} \Leftrightarrow X \in Ker(M)$$

Donc, $Kerf = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k} \,/ x_1, ., x_p\ scalaires\ et\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases} \right\}$ où $M = (a_{ij})$.

**24 Exo :** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$. Donnons une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$.

**25 Méthode « tout en 1 » pour obtenir** $\boldsymbol{rang\ de\ f\ , base\ de\ Imf\ et\ base\ de\ Kerf}$ **.**

1. J'échelonne $M$ en COLONNES : $M \sim_C R$, $R$ échelonnée.
2. J'en déduis
   a) $rgM$ puis la dimension de $Ker(f)$ grâce au théorème du rang.
   b) une base de $Im(f)$ grâce aux colonnes non nulles de $R$.
   c) une base de $Ker(f)$ grâce aux colonnes nulles de $R$.

**26 Exo :** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R}))$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X], et\ M_2(\mathbb{R})\ est\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(1)\ , f(X)\ et\ f(X^2)\ et\ f(3X - X^2 + 2)$.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

**27 Exo ( le retour) :** Soit $u: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $u(P) = P + (1 - X)P'$. Montrer que $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_3[X]$.

**28 Exo :** Soit $E$ un espace vectoriel et $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e}_4)$ une base de $E$ .

Soit $u$ un endomorphisme de $E$ tel que la matrice de $u$ par rapport à cette base $B$ est : $M = mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Soit $\vec{x}$ un élément de $E$ . Déterminer $u(\vec{x})$.
2. Donner le rang de $u$, une base de $Im(u)$, une base de $Ker(u)$ en fonction des vecteurs de la base $B$.

## 2. $f$ isomorphisme ? – $f$ automorphisme ?

**29 Théorème** : ICI $\underline{\boldsymbol{dimE = dimF}} < +\infty$ Soit $B_1, B_2$ des bases respectivement de $E$ et $F$.

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. $f est\ un\ isomorphisme\ de\ E\ sur\ F \Leftrightarrow M$ inversible$\Leftrightarrow f$ injective$\Leftrightarrow f$ surjective.
2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = mat_{B_1}(f)$ . $\underbrace{f \in GL(E)}_{f\ est\ un\ automorphisme\ de\ E}$ $\Leftrightarrow M$ inversible$\Leftrightarrow f$ injective$\Leftrightarrow f$ surjective.

**Démo** : $dim(E) = dim(F) < +\infty\ et\ f \in \mathscr{L}(E,F)$ .
Donc $f\ isomorphisme \Leftrightarrow f\ surjective \Leftrightarrow f\ injective \Leftrightarrow Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow MX = 0\ admet\ 0\ comme\ unique\ solution \Leftrightarrow Ker(M) = \{0\} \Leftrightarrow M\ inversible$.
De même, pour un endomorphisme $f$ de $E$.

**30 Exo** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ .Soit $f : (P \mapsto \alpha P - XP')$. Pour quelles valeurs de $\alpha$, $f$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ?

**31 Exo** Soit $E$ l'espace vectoriel engendré par $f_1 : (x \mapsto 1), f_2 : (x \mapsto sin(x))\ et\ f_3 : (x \mapsto sin(2x))$.

1) Déterminer la dimension de $E$.
2) Soit $u: E \to \mathbb{R}^3$tel que : $u(f) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Montrer que $u$ est linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

**32 Conséquence** : Soit $E$ un K-e-v de dimension finie et $B$ une base de $E$.
$f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = mat_B(f)$ et $\lambda \in K$.
$\exists \vec{x} \in E \backslash \{\overrightarrow{0_E}\} / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\} \Leftrightarrow M - \lambda I$ non inversible .

**Démo :** $\exists \vec{x} \in E \backslash \{\overrightarrow{0_E}\} / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E \backslash \{\overrightarrow{0_E}\} / (f - \lambda \mathrm{id})(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\} \Leftrightarrow f - \lambda Id_E$ non injective
$\Leftrightarrow mat_B(f - \lambda Id_E)$non inversible$\Leftrightarrow M - \lambda I$ non inversible.

**33Théo** : ICI $\underline{\boldsymbol{dimE = dimF}} < +\infty$
$f \in Isom(E,F) \Leftrightarrow$il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = id_F \Leftrightarrow$ il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = id_F$.

# IV <u>Opérations sur les matrices d'applications linéaires.</u>

**34Théorème** Soit $E, F\ et\ G$ des K-e-v de dimension finie et $B_1$ base de $E$ et $B_2$ base de $F$ et $B_3$ base de $G$.

1) (Rappel) Si $(f\ , g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\alpha\ , \beta) \in K^2$ alors $mat_{B_1,B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha\ mat_{B_1,B_2}(f) + \beta\ mat_{B_1,B_2}(g)$.
2) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = mat_{B_2,B_3}(g) \times mat_{B_1,B_2}(f)$. $(**)$
3) $Si\ \ fest\ un$ isomorphisme de $E\ sur\ F$ alors $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \left(mat_{B_1,B_2}(f)\right)^{-1}$.

$(**)$ **c'est de là que provient la définition compliquée du produit matriciel !**

**Démo** :1) $\nabla$ : $(f \mapsto mat_{B_1,B_2}(f))$ est linéaire donc, pour tous $(f\ , g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\alpha\ , \beta) \in K^2$, $mat_{B_1,B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha\ mat_{B_1,B_2}(f) + \beta\ mat_{B_1,B_2}(g)$.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ Posons $B_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_p})$ base de $E$ et $B_2 = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, .., \vec{v_n})$ base de $F$ et $B_3 = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, .., \vec{w_m})$ base de $G$.
Notons $A = mat_{B_1,B_2}(f) = (a_{ij}), B = mat_{B_2,B_3}(g) = (b_{ij})$ et $C = mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = (c_{ij})$. Alors,
$\forall k \in [\![1,p]\!], f(\vec{e_k}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{v_i}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], g(\vec{v_i}) = \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\vec{w_j}$ .
Donc, $\forall k \in [\![1,p]\!], g\big(f(\vec{e_k})\big) = g(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} g(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\vec{w_j}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ik}b_{ji}\vec{w_j}) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ji}\vec{w_j})$
$g\big(f(\vec{e_k})\big) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ji})\vec{w_j}$. Donc, $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,m]\!], c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ji} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ik} = (BA)_{jk}$. Ainsi, $C = BA$.
3) Soit $f \in Isom(E,F)$. Alors $f^{-1} \in Isom(F,E)$ et $mat_{B_2,B_1}(f^{-1})$ et $mat_{B_1,B_2}(f)$ sont inversibles, d'après le théo....
Montrons que $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \big(mat_{B_1,B_2}(f)\big)^{-1}$.
$I_p \underbrace{=}_{ex} mat_{B_1,B_1}(id_E) \underbrace{=}_{\text{par def. de } f^{-1}} mat_{B_1,B_1}(f^{-1} \circ f) \underbrace{=}_{d'après\ 2)} mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) \times mat_{B_1,B_2}(f)$. Donc, $mat_{B_2,B_1}(f^{-1}) = \big(mat_{B_1,B_2}(f)\big)^{-1}$.

**35 Cas particulier d'un endomorphisme :** Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ et $B$ une base de $E$.
**1.** $mat_B(f \circ g) = mat_B(f)\, mat_B(g)$
**2.** $\forall k \in \mathbb{N},\ mat_B(f^k) = \big(mat_B(f)\big)^k$.
**3.** $mat_B(f)$ est inversible $\Leftrightarrow f$ est un automorphisme de $E$ et $mat_B(f^{-1}) = \big(mat_B(f)\big)^{-1}$.

**Démo** 1) Posons $H(k)$: « $mat_B(f^k) = \big(mat_B(f)\big)^k$». **Init° :** $H(0)$ vraie car « $mat_B(f^0) = mat_B(id) = I_p = \big(mat_B(f)\big)^0$.
**Propag° :** Soit $k \in \mathbb{N}$. Je suppose que $H(k)$ est vraie.
Alors $mat_B(f^{k+1}) = mat_B(f^k \circ f) \underbrace{=}_{\text{théo } 27.2} mat_B(f^k) \times mat_B(f) \underbrace{=}_{\substack{\text{par hypo.}\\ \text{de récurrence}}} \big(mat_B(f)\big)^k \times mat_B(f) = \big(mat_B(f)\big)^{k+1}$. Donc, $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
**CCL :** $\forall k \in \mathbb{N}, H(k)$ est vraie.
2) Si $mat_B(f)$ est inversible alors $f$ est un automorphisme de $E$ d'après le théo 30 et $mat_B(f^{-1}) = \big(mat_B(f)\big)^{-1}$ d'après le théo 29.3.

**36 Exo :** Soit $E$ un $K$-e-v rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tq $f(\vec{a}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} - 4\vec{c}$, $f(\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ et $f(\vec{c}) = 5\vec{a} - \vec{b} - 5\vec{c}$.
Montrer que $\text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2) = E$.

**37 Exo** Soit $E = \{\big(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)\big) / P$ et $Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$ et $\forall f \in E, \Psi(f) = f'$.
1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie et en déterminer une base $B$.
2. Montrer que $\Psi$ est un automorphisme de $E$.
3. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $\Psi^2 + Id_E$. En déduire que $\Psi^4 + 2\Psi^2 + Id_E$ est l'application nulle de $E$.

# V Formules de changement de bases

**38Rappel :** Formule de changement de bases pour un vecteur ou une famille de vecteurs : Si $B$ et $B'$ sont deux bases de $E$ et $\vec{x} \in E$ et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $E$ alors

$$mat_{B'}\vec{x} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=\text{matrice de}\\ \text{passage de } B' \text{à } B}} \times mat_B\vec{x} \qquad \text{et} \qquad mat_{B'}\mathscr{F} = \underbrace{mat_{B'}B}_{\substack{=\text{matrice de}\\ \text{passage de } B' \text{à } B}} \times mat_B\mathscr{F}.$$

**39 Théorème de formule de changement de base** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ .
Soit $B_1$ et $B_1{}'$ deux bases de l'espace vectoriel $E$ et $B_2$ et $B_2{}'$ deux bases de l'espace vectoriel $F$ .
Soit $M = mat_{B_1,B_2}(f)$ et $M' = mat_{B_1',B_2'}(f)$
Soit $P = mat_{B_1}B_1'$ la matrice de passage de $B_1$ à $B_1{}'$ et $Q = mat_{B_2}B_2'$ la matrice de passage de $B_2$ à $B_2'$ .
Alors, $mat_{B_1',B_2'}(f) = mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}B_1'$ ie. $M' = Q^{-1}MP$.

**Démo :** $mat_{B_1',B_2'}(f) = mat_{B_1',B_2'}(id_F \circ (f \circ id_E)) \underbrace{=}_{\text{théo}} mat_{B_2,B_2'}id_F \times mat_{B_1',B_2}(f \circ id_E)$
$\underbrace{=}_{\text{théo}} mat_{B_2,B_2'}id_F \times \big(mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1',B_1}(id_E)\big) \underbrace{=}_{\text{exemple}} mat_{B_2'}B_2 \times mat_{B_1,B_2}(f) \times mat_{B_1}B_1'$ .

**40 Retour sur l'exo 7** : si on applique la formule de changement de bases, on obtient :
$\underbrace{mat_{B_1,B_c}f}_{=M} = \underbrace{mat_{B_c}B_c}_{=I} \times \underbrace{mat_{B_2,B_c}f}_{=D} \times \underbrace{mat_{B_2}B_1}_{P}$ et on répond ainsi à la dernière question de cet exemple sans calcul.

**41** On peut alors <u>re</u>démontrer le résultat suivant : si $M \in M_{n,p}(K), P \in GL_n(K)$ et $Q^{-1} \in GL_p(K)$ alors $rg(Q^{-1}MP) = rg(M)$
**Démo :** Soit $M \in M_{n,p}(K), P \in GL_n(K)$et $Q \in GL_p(K)$. Donc, il existe $B_1$ et $B_1'$ bases de $K^n$et $B_2$ et $B_2'$ bases de de $K^n$tq $P = mat_{B_1}B_1'$ et et $Q = mat_{B_2}B_2'$ .
Soit $f \in \mathscr{L}(K^p, K^n)$ tel que $M = mat_{B_1,B_2}(f)$. Posons $M' = Q^{-1}MP$.Alors d'après la formule de changement de bases $M' = mat_{B_1',B_2'}(f)$.
Donc $rg(M') = rg(f) = rg(M)$.

**42 Cas d'un endomorphisme** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $B$ et $B'$ deux bases de l'espace vectoriel $E$. Soit $P = mat_B B'$ la matrice de passage de $B$ à $B'$.
Soit $M = mat_B(f)$ et $M' = mat_{B'}(f)$.
Alors, $mat_{B'}(f) = mat_{B'}B \times mat_B(f) \times mat_B B'$ ie. $M' = P^{-1}MP$.

**Démo :** il suffit d'appliquer le théo38 en prenant $B_1 = B_2$ et $B_1' = B_2'$ .

**43 Def.** $M$ et $M'$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice $P$ inversible telle que $M' = P^{-1}MP$.

**44 Théo :** $M$ et $M'$ sont semblables sietssi $M$ et $M'$ sont deux matrices d'un même endomorphisme .

**45 Exo :** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est semblable à $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire les puissances de $A$ .

# VI Matrice d'une projection , d'une symétrie vectorielle.

**46 Théo :** Soit $f \in \mathscr{L}(E), B$ une base de $E$ et $M = mat_B(f)$ .

**1.** $f$ est une projection vectorielle$\Leftrightarrow M^2 = M$.

**2.** $f$ est une symétrie vectorielle$\Leftrightarrow M^2 = I$.

**47 Théo :** Soit $f \in \mathscr{L}(E), B$ une base de $E$.

**1.** $f$ est une projection vectorielle $\Leftrightarrow$ il existe une base $B$ de $E$ telle que $mat_B(f) = diag(\underbrace{1,..,1}_{r=rg(p)},0,..,0)$.

Dans ce cas, $Im(f)$ est l'espace engendré par les $r$ premiers vecteurs de $B$ d'image non nulle et $Ker(f)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de $B$, ceux d'image nulle.

**2.** $f$ est une symétrie vectorielle $\Leftrightarrow$ il existe une base $B$ de $E$ telle que $mat_B(f) = diag(\underbrace{1,..,1}_{r=rg(p)},-1,..,-1)$.

Dans ce cas, $Ker(f - id_E)$ est l'espace engendré par les $r$ premiers vecteurs de $B$ et $Ker(f + id_E)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de $B$.

**48 Exo** Soient $S = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $P = S + Q$

1) Reconnaitre les endomorphismes $s$ $et$ $q$ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à $S$ $et$ $Q$.
2) Déterminer une base B dans laquelle $mat_B(s)$ $et$ $mat_B(q)$ sont diagonales.
3) Qui est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{p}$ canoniquement associé à $\boldsymbol{P}$ ?
4) Montrer que pour tout entier naturel $n$ et pour tous réels $a$ $et$ $b$, $(ap + bq)^n = a^n p + b^n q$ .
5) Montrer $que$ : $ap + bq$ est un automorphisme si et ssi $a$ $et$ $b$ sont non nuls. Déterminer $(ap + bq)^{-1}$ le cas échéant.