TD 20

Matrices d'une application linéaire .

Ex 0 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f^2 est combinaison linéaire de f et $id_{\mathbb{R}_2[X]}$. En déduire $f^n\ tq\ n \in \mathbb{N}$..

Ex 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1}.
2) Montrer que $\ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})^2 \oplus Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

3 Montrer qu'il existe une base $B' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $A' = mat_{B'}f = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) En déduire $A^n\ tq\ n \in \mathbb{N}$.

Ex 2 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

a. Décrire $f((x, y, z))$.
b. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est surjective.
c. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas bijective.

Ex 3 Soit E un K-e-v de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$.

1) Justifier qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f a ses deux premières colonnes nulles.
2) Montrer qu'il existe $a \in K$ tq : $f^2 = af$.

Ex 4 Soit $a_1, a_2, .., a_n$des réels et $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (\tilde{P}(a_1), \tilde{P}(a_2), .., \tilde{P}(a_n)) \end{pmatrix}$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme si et ssi $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts.
b) Désormais $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts. On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$. Montrer que $B = (L_1, L_2, .., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
c) Quelles sont les composantes dans B d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
d) En déduire la matrice de passage de B à B_c la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
e) Montrer que la matrice de Vandermonde associée à $a_1, a_2, .., a_n$ si et ssi $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts.

Ex 5 Soient $f_1: (x \mapsto e^{-x})$, $f_2: (x \mapsto xe^{-x})$, $f_3: (x \mapsto x^2e^{-x})$ et E le sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par ces trois applications .$\forall f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$.

1. Déterminer $dimE$. On note $B = (f_1,\ f_2,\ f_3)$.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Ecrire la matrice A de φ dans B.
3. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire, pour tout entier n , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g: (x \mapsto (3 - 2x + 8x^2)e^{-x})$.
5. $\forall f \in E$, on pose $\Gamma(f) = f + f'$. Justifier que Γ est un endomorphisme de E et donner une base de $Ker\Gamma\ et\ Im\Gamma$.
6. Soit $h: (x \mapsto (2 + 2x)e^{-x})$. Trouver les solutions de l'équation $f' + f = h$.

Ex 6 Soit$E$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
2. On pose $\forall u \in E$, $\Phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que Φ est une bijection de E sur $\mathbb{R}^3$. En déduire la dimension de E.
3. On pose $\forall i \in \{1,2,3\}, \varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Justifier que $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $E\ et$ expliciter les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.
4. Soit d l'application définie sur E par : $\forall u \in E$, $d(u) = w$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1}$.
   4.a. Montrer que $d \in \mathscr{L}(E)\ et$ déterminer la matrice de d dans B.
   4.b. Calculer $d^k\ tel\ que\ k \in \mathbb{N}$. En déduire que d est un automorphisme de E et exprimer d^{-1} en fonction de d.
   4.c. Déterminer $D = Ker(d - Id_E)$.
   4.d. Soit $F = vect(\varepsilon_3 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$. Montrer que $F \oplus D = E$
   4.e. Montrer que F est stable par d.

4.d. Justifier qu'il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ex 7 Soit $Q_k = (X+1)^k(X-2)^{n-k}$ et f l'application définie par : $f(P) = (X-2)P' - P$

1. Montrer que $B' = (Q_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les matrices de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans B'.
4. Quelle relation y-a-t-il entre ces matrices ?
5. Décrire $Ker\, f$ et Imf.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $Kerf$, Imf $et\ rgf$.
2. Montrer que $Ker(f^2)\ et\ Ker(f-id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e.qu' il existe P inversible telle que $A = P^{-1}TP$.
4. En déduire les puissances de A.

Ex 9 Soit E un K-e_v de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 \neq 0\ et\ f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Application :** Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 10 Monter que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 11 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé et $\varphi: (P \mapsto (X-a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big))$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique de E puis sa matrice dans la base de Taylor $B = (1, (X-a), (X-a)^2, .., (X-a)^n)$.
2. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?
3. Déterminer le noyau et l'image de φ et le rang de φ.

Ex 12 Soit $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X].)\ tel\ que\ \forall k \in \{0, .., n\}, \Phi(X^k) = X^{n-k}$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. et $f: (P \mapsto P')$.

1. Montrer que $\boldsymbol{\Phi}$ est une involution. Décrire ses éléments caractéristiques.
2. En déduire que $\boldsymbol{\Phi}$ est bijective et décrire $\boldsymbol{\Phi^{-1}}$.
3. Posons $g = \boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\Phi}$. Déterminer la matrice A de g dans B
4. Posons $h = g + f$.Montrer que :$\forall P \in E, h(P) = nXP - (X^2-1)P'$
5. Justifier que $C = ((X-1)^k(X+1)^{n-k})_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de h dans cette base.
6.

Ex 13 Soit u: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \end{pmatrix}$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que : $Ker(u - \lambda id)$ contient un vecteur non nul **si et ssi** $\lambda \in \{0,3\}$.
3. Justifier que $Ker(u)\ et\ Ker(u - 3id)$ sont supplémentaires dans E.
4. En déduire que $u\ est$ la composée de deux endomorphismes simples.

Ex 14 Soit $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base d'un K-e-v E et $D = \{4\alpha\vec{\jmath} + \alpha\vec{k} / \alpha \in \mathbb{R}\}\ et\ P = \{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} / a + b + c = 0\}$.
Soit p la projection sur D et parallèlement à P et s la symétrie par rapport à P et parallèlement à D.

1. Ecrire la matrice de p dans une base bien choisie de telle sorte que cette matrice soit diagonale.
2. Puis écrire la matrice de p dans B puis celle de s dans cette même base.

Ex 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 2 & & \vdots \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & 2 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n .Calculer A^n.

Ex 16 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{ij}| < \frac{1}{n}$.
Démontrer par l'absurde que la matrice $I_n + A$ est inversible. (on pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A)

Ex 17 $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X+1)$.

1. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa matrice inverse.
3. Soit $a_0, .., a_n, b_0, .., b_n$ des réels tels que : $b_p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a_j$. Exprimer $a_0, .., a_n$en fonction de $b_0, .., b_n$.

Ex 18 Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & a\binom{1}{0} & a^2\binom{2}{0} & \cdots & a^n\binom{n}{0} \\ 0 & -\binom{1}{1} & -a\binom{2}{1} & \cdots & -a^{n-1}\binom{n}{1} \\ & 0 & \binom{2}{2} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & (-1)^n\binom{n}{n} \end{pmatrix}$. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Ex 19 Soit $\underline{E \text{ de dimension finie } n.}$ Soit u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq O$ et $u^n = O$ i.e. u est nilpotent d'indice n.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que : $B = (\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$ base de E.
b. Ecrire les matrices de $u, u^2, .., u^{n-1}$ dans la base B.
c. En déduire que $\{g \in L(E) / u \circ g = g \circ u\} = vect(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

Ex 20 soit E un K-e-v de dimension 3.

1. Soit u un endomorphisme de E et soient i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $Ker\ (u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j\ (x)$.

a. Montrer que $Im(w) \subset Ker\ (u^i)$.
b. En déduire que $dim(Ker\ u^{i+j}) \leq dim(Ker\ (u^i)\ ) + dim(Ker\ (u^j)\ )$

2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $rg(u) = 2$

a. Montrer que $dim(Ker\ u^2) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $rg(u) = 1$

a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$
b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker\ (u\ )$tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille $(\ b, u(b)\ , c)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Ex 21 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f définie sur E par $f(P) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.

On note $f^0 = id_E$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m\ fois.}$. On note B=$(1, X, X^2, .., X^n)$ la base canonique de E.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\deg(f(X^k))$et $codom(f(X^k))$.La matrice M de $f$dans B est -elle triangulaire ? diagonale? Préciser sa diagonale.
3. Démontrer que f est un automorphisme de E .
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $Ker(f - \lambda id) \neq \{O\}$ <u>si et ssi</u> $\lambda \in \{\frac{1}{2^k} / k \in [\![0, n]\!]\}$.
5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et Q_k un polynôme non nul de $Ker\left(f - \frac{1}{2^k} id\right)$,c'est-à-dire : $Q_k \neq 0$ et $f(Q_k\ ) = \frac{1}{2^k} Q_k$.
   a. Démontrer que : $\deg\ (Q_k) = k$.
   b. Démontrer que $si\ k \neq 0$ alors $\int_0^1 \widetilde{Q_k}(t)dt = 0$.
6. Montrer que la famille $B' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base de E. Désormais on prendra $Q_0(X) = 1$.
7. Ecrire la matrice D de f dans cette base B'. Quelle relation y-a-t-il entre D et M ?
8. Soit $P \in E$, de composantes $(a_0, a_1, .., a_n)$ dans B'.
   a. Soit $m \in \mathbb{N}$. Décrire matriciellement f^met exprimer $f^m(P)$ en fonction de $a_0, a_1, .., a_n, Q_0, Q_1, \dots, Q_n$.
   b. En déduire que : $\lim\limits_{m \to +\infty} \widetilde{f^m(P)}\ (1) = a_0 = \int_0^1 \tilde{P}(t)dt$ (n étant fixé).
9. Soit $P \in E$. Démontrer par récurrence sur m que : $\forall m \in \mathbb{N}, f^m(P) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m - 1} P\left(\frac{X+k}{2^m}\right)$.
10. Redémontrer alors grâce au cours d'intégration que $\lim\limits_{m \to +\infty} \widetilde{f^m(P)}\ (1) = \int_0^1 \tilde{P}(t)dt$.