Corrigé du DL 7

Exercice

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que u est bornée . Désormais, on supposera que $u_0 \in [0,1]$.
2. Montrer que u a une seule limite possible de u . On note α cette unique limite possible.
3. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
4. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. En déduire la convergence de u de deux manières :
   a) Grâce à un encadrement de $|u_n-\alpha|$. b) Grâce aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

1. $Df=\mathbb{R}\, et\, \forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+2}, ab\leq\frac{a+b}{2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, en\, posant\, a=1\, et\, b=e^x, 0<e^x\leq\frac{1+e^{2x}}{2}$ donc $0<f(x)\leq\frac{1}{2}$.

Autrement dit, $f(\mathbb{R})\subset]0,\frac{1}{2}[$. Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in]0,\frac{1}{2}[$. La suite u est donc bornée. Désormais, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0,1]$.

2. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in[0,1]$, les limites possibles de u sont réelle et sont dans $[0,1]$.

De plus, f étant continue sur $[0,1]$.les limites possibles de u sont les points fixes de f dans $[0,1]$.Posons $g(x)=f(x)-x. g$ est continue et dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x\in[0,1], g'(x)=f'(x)-1=\frac{e^x(1+e^{2x})-2e^xe^{2x}}{(1+e^{2x})^2}-1=\underbrace{\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}}_{=f'(x)}-1=\frac{e^x-e^{3x}-1-2e^{2x}-e^{4x}}{(1+e^{2x})^2}$

Donc $g'(x)$ est du signe de $e^x-e^{3x}-1-2e^{2x}-e^{4x}$. Or, en posant $X=e^x\geq1$,
$e^x-e^{3x}-1-2e^{2x}-e^{4x}=-(X^4+X^3+2X^2-X+1)=-(X^4+X^3+X^2+X(X-1)+1)<0$. Donc g est strictement décroissante et donc injective. g s'annule donc au plus une fois sur $[0,1]$. De plus, $g(0)=f(0)=\frac{1}{2}\, et\, g(1)=f(1)-1\leq\frac{1}{2}-1<0$. Comme g est continue, le TVI assure que g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$Je déduis de tout ce qui précède que g s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$en un réel α. Ainsi, α est l'unique point fixe de f sur $[0,1]$et donc l'unique limite possible de u.

3. $\forall x\in[0,1], f'(x)=\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}<0$ donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire. Comme, de plus, elles sont bornées car extraites de u qui est bornée, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

4. $\forall x\in[0,1], |f'(x)|=\left|\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}\right|=\frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}|f(x)|\underbrace{=}_{car\, f(x)\geq0}\frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}f(x)$.

Or, $|1-e^{2x}|\leq|1|+|e^{2x}|=1+e^{2x}=|1+e^{2x}|$ Donc $\frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}\leq1\, et$ comme $f(x)\geq0, \frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}f(x)\leq f(x)$.

De plus, $f(x)\leq\frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}f(x)\leq\frac{1}{2}$ et finalement, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

5. a) L'égalité des accroissements finis permet donc d'affirmer que sur $[0,1]$, f est $\frac{1}{2}-$lischitzienne ; autrement dit,
$\forall(x,y)\in[0,1]^2, |f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$. Alors $\forall n, |f(u_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ i.e. $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

Ensuite, je montre facilement par récurrence que $\forall n,\ |u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|(**)$. En effet ,
$|u_0-\alpha|=\frac{1}{2^0}|u_0-\alpha|$ et $\forall n$, $(|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|\Rightarrow\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}|u_0-\alpha|\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car\\|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|}}|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}|u_0-\alpha|)$.

Comme $0<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|=0$. Alors l'inégalité $(**)$ permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

$Rque$: $\forall n, |u_0-\alpha|\leq1\ (car\ (u_0,\alpha)\in[0,1]^2\ )$ donc $\forall n, |u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}$.

b) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f\circ f$ qui est continue sur $[0,1]$. Donc les limites de ces deux suites sont des points fixes de $f\circ f$.

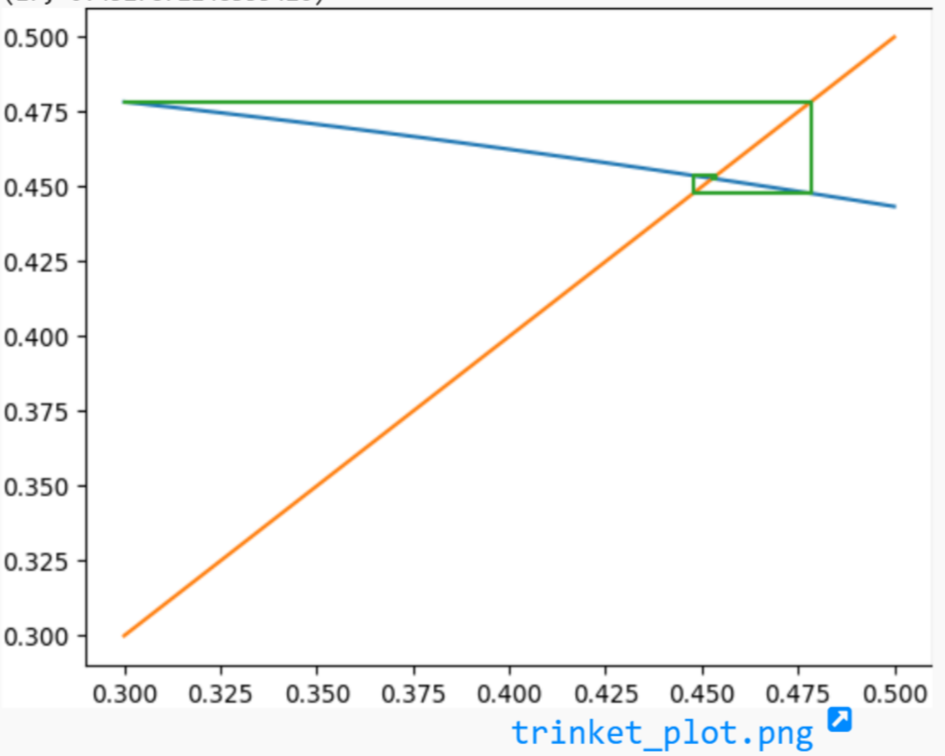
Posons $h(x)=f\circ f(x)-x$. Alors, h est dérivable sur $[0,1]\ et\ \forall x\in[0,1], h'(x)=f'(x)f'(f(x))-1$. Or, $\forall x\in[0,1], f(x)\in[0,1]et\ f'(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]donc\ f'(f(x))\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et par conséquent $f'(x)f'(f(x))\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$. Donc $\forall x\in[0,1], h'(x)<0$. H est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ donc injective et s'annule au plus une fois sur $[0,1]$. Or, $h(\alpha)=f(f(\alpha))-\alpha\underbrace{=}_{\substack{car\\f(\alpha)=\alpha}}f(\alpha)-\alpha\underbrace{=}_{\substack{car\\f(\alpha)=\alpha}}0$. Ainsi, α est l'unique racine de h sur $[0,1]$ et par conséquent l'unique point fixe de $f\circ f$. J'en conclus que α est la limite de (u_{2n}) et $de\ (u_{2n+1})$. Ces deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de u ayant la même limite, la suite u converge aussi vers α.

6. Du python :
   A. Définir la fonction f.
   B. Ecrire un programme python prenant en entrée un réel a et un entier naturel n et renvoyant le terme de rang n de la suite vérifiant $u_0=a\ et\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$
   C. Sur un même dessin, représenter f et id sur l'intervalle $[0.2,0.6]$.
   D. Ecrire un programme python nommé esc (pour escalier ou escargot) tel que :
      - en entrée : un réel a et un entier naturel n.
      - en réponse : le dessin de l'escargot ou l'escalier représentant les n premiers points de l'escargot ou l'escalier représentant la suite u. (Cf ci-dessous)
   E. Exécuter votre programme en prenant $a=0.3$ et $n=10$.
   F. Ecrire un programme python nommé $approx$ tel que :
      - en entrée : un réel a et un réel strictement positif noté $epsilon$
      - en réponse : le couple (n,v) où
        - n est le plus petit entier tel que u_n soit une valeur approchée de α à $epsilon\ près$ où u est la suite telle que : $u_0=a\ et\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$
        - v est une valeur approchée de sa limite α à $epsilon\ près$.
   G. Exécuter votre programme en prenant $a=0.3$ et $epsilon=0.00001$.

4. from pylab import *

```python
def f(x):
  return(exp(x)/(1+exp(2*x)))

A=0.3
B=0.5
n=100
X=[A+i*(B-A)/n for i in range(n+1)]
Y=[f(x) for x in X]
plot(X,Y)
show()
plot(X,X)
show()

def u(a,n):
  u=a
  for i in range(n):
    u=f(u)
  return(u)

def esc(a,n):
  X=[]
  Y=[]
  for i in range (n):
    X+=[u(a,i),u(a,i+1)]
    Y+=[u(a,i+1),u(a,i+1)]
  plot(X,Y)
print(esc(0.3,10))
show()

def approx(a,epsilon):
  i=0
  while 1/(2**i)>epsilon :
    i=i+1
  return i,u(a,i)
print(approx(0.3,0.00001))
```

```
(17, 0.4527872148355426)
```



PROBLEME 1 Une équation fonctionnelle

On rappelle que $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

On note $E=\left\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\underbrace{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)}_{(**)}\right\}$.

On note F l' ensemble des éléments $f\in E$ tels que f ne soit pas la fonction nulle et f s' annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 1 Exemples et premières propriétés des éléments de E.

1. Quelles sont les fonctions constantes éléments de E ?
2. Déterminer une fonction élément de F.
3. Démontrer que ch est élément de $E\backslash F$.
4. Montrer que si f est un élément de E et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $(x\mapsto f(\alpha x))$ est élément de E.
5. Soit f un élément de E.
   a. Montrer que $f(0)=0\ ou\ 1$.
   b. Montrer que si $f(0)=0$ alors f est identiquement nulle.
   c. Montrer que si $f(0)=1$ alors f est paire.

1. Soit λ un réel et $f:(x\mapsto\lambda)$.

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=\lambda+\lambda=2\lambda\ et\ 2f(x)f(y)=2\lambda^2$. Alors, f est solution de notre problème sietssi $2\lambda=2\lambda^2$ sietssi $\lambda-\lambda^2=0$ sietssi $\lambda(1-\lambda)=0$ sietssi $\lambda=0\ ou\ \lambda=1$.

Ainsi, les fonctions constantes éléments de E sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

2. La fonction cos est élément de F car cos est continue sur $\mathbb{R}$, s'annule en $\frac{\pi}{2}$ mais ne s'annule pas partout et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)+\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)\quad=2\cos(x)\cos(y).$$

3. La fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$, ne s'annule jamais donc $ch\notin F$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}+\frac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}=\frac{1}{2}e^x(e^y+e^{-y})+\frac{1}{2}e^{-x}(e^{-y}+e^y)=\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^x\right)(e^{-y}+e^y)=\ \mathrm{ch}(x)(2\,\mathrm{ch}(y)).$$

Donc, $h\in E$.

4. Soit f un élément de E et $\alpha\in\mathbb{R}$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall(X,Y)\in\mathbb{R}^2, f(X+Y)+f(X-Y)=2f(X)f(Y)\ (**)$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $g_\alpha:(x\mapsto f(\alpha x))$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$g_\alpha(x+y)+g_\alpha(x-y)=f(\alpha(x+y))+f(\alpha(x-y))=f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y)\underset{\substack{on\ applique(**)\\ avec\ X=\alpha x\ et\ Y=\alpha y}}{\underbrace{=}}2f(\alpha x)f(\alpha y)=2g_\alpha(x)g_\alpha(y).$$

Donc $g_\alpha\in E$.

5. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall(X,Y)\in\mathbb{R}^2, f(X+Y)+f(X-Y)=2f(X)f(Y)$ $(**)$

a) Alors, en prenant $X=Y=0$ et $f(0+0)+f(0-0)=2f(0)f(0)$. Donc $f(0)\big(1-f(0)\big)=0$ et finalement $f(0)\in\{0,1\}$.

b) Supposons ici que $f(0)=0$. Alors $\forall X\in\mathbb{R}, f(X)+f(X)=2f(X)f(0)=0\ i.e.\ 2f(X)=0$. Donc $\forall X, f(X)=0$. f est donc la fonction nulle.

c) Supposons que $f(0)=1$. Alors $\forall Y\in\mathbb{R}, f(0+Y)+f(0-Y)=2f(0)f(Y)=2f(Y). Donc\ f(-Y)=f(Y)$. Ainsi f est paire.

PARTIE 2 Description complète de E et F.

Soit f un élément de E tel que : $f(0)=1$.

6. Justifier qu'il existe un réel $r>0$ tel que : $\forall x\in[0,r], f(x)>\frac{1}{2}$. En déduire que $\int_0^r f(x)dx>0$.
7. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du$.
8. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, 2f(x)\int_0^r f(y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du+\int_{x-r}^{x} f(v)dv$.
9. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer qu'il existe un réel $c>0$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}, cf'(x)=f(x+r)-f(x-r)$.
12. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$.
13. En déduire tous les éléments de E qui vérifient $f(0)=1$.
14. Quels sont les éléments de E et ceux de F ?

On montre ici que tout fonction continue, telle que $f(0)=1$ et vérifiant $(**)$ est de classe C^∞.

f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0)=1$ et $\forall(X,Y)\in\mathbb{R}^2, f(X+Y)+f(X-Y)=2f(X)f(Y)\,(**)$.

6. f est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Prenons $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Il existe un réel r>0 tel que $\forall x\in[-r,r], |f(x)-1|\le\frac{1}{2}$ $i.e. -\frac{1}{2}\le f(x)-1\le\frac{1}{2}$. Donc $\forall x\in[0,r],\ \frac{1}{2}\le f(x)$.

Alors, $\int_0^r \frac{1}{2}dx\le\int_0^r f(x)dx$ donc, $0<\frac{r}{2}\le\int_0^r f(x)dx$.

7. Soit $x\in\mathbb{R}$. $(y\mapsto f(x+y))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur [0,r]. Par suite $\int_0^r f(x+y)dy$ existe.

$$\int_0^r f(x+y)dy \underset{\substack{CV\\ u=x+y\\ du=dy\\ y=0\Leftrightarrow u=x\\ y=r\Leftrightarrow u=x+r}}{=} \int_x^{x+r} f(u)du.$$

De même, $(y\mapsto f(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par suite, $\int_0^r f(x-y)dy \overset{\substack{CV\\ u=x-y\\ du=-dy}}{=} \int_x^{x-r} f(u)(-du)=\int_{x-r}^{x} f(u)du$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy=\int_x^{x+r} f(u)du\ \ et\ \ \int_0^r f(x-y)dy=\int_{x-r}^{x} f(u)du$.

8. Soit $x\in\mathbb{R}$. $(y\mapsto 2f(y)f(x))$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,r]$.

De plus, $\forall y\in[0,r], f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. Donc $\int_0^r f(x+y)dy+\int_0^r f(x-y)\,dy=\int_0^r 2f(x)f(y)\,dy$. Alors d'après 7 ., $\int_x^{x+r} f(u)du+\int_{x-r}^{x} f(u)du=2f(x)\int_0^r f(y)dy$ et par Chasles, $\int_{x-r}^{x+r} f(u)du=2f(x)\int_0^r f(y)dy$.

9. f étant continue sur $\mathbb{R}$, f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Comme $\rho=\int_0^r f(y)dy\neq 0$, je peux affirmer , en utilisant 6., que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\rho}\int_{x-r}^{x+r} f(u)du=\frac{1}{\rho}[F(x+r)-F(x-r)]$(⁂).

F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $(x\mapsto F(x+r))$ et $(x\mapsto F(x-r))$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. J'en déduis que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

10. Alors F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, en utilisant (⁂) , je conclus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

Init : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Propag : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, en utilisant (⁂) , je conclus que f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

CCL : pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

11. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\rho}[F(x+r)-F(x-r)]$donc $f'(x)=\frac{1}{\rho}[F'(x+r)-F'(x-r)]=f(x)=\frac{1}{\rho}[f(x+r)-f(x-r)]$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}, \rho f'(x)=f(x+r)-f(x-r)$.

12. Alors, $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\frac{1}{\rho}[f'(x+r)-f'(x-r)]=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}[f(x+r+r)-f(x+r-r)]-\ \frac{1}{\rho}[f(x-r+r)-f(x-r-r)]\right]$

$\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\frac{1}{\rho^2}\ [2f(x)+f(x-2r)-f(x+2r)]=\frac{1}{\rho^2}\ [2f(x)+2f(x)f(2r)]$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$ où $\lambda=\frac{2(1+f(2r))}{\rho^2}$.

13. Cherchons tous les éléments de E vérifiant $f(0)=1$.

D'après ce qui précède , si f est élément de E telle que $f(0)=1$, alors f est donc solution d'une équation différentielle d'ordre 2 homogène et à coefficients constants dont l'équation caractéristique est : $(e.c): r^2-\lambda=0$ et dont le discriminant est $\Delta=4\lambda$.

1er cas $\lambda<0$. Posons $\omega=\sqrt{|\lambda|}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$. Alors $a=f(0)=1$ et $\omega b=f'(0)=\frac{1}{\rho}[f(r)-f(-r)] \underset{car\ f\ est\ paire}{=} 0$. Donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\cos(\omega x)$.

2èmz cas $\lambda=0$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a+bx$. Alors $a=f(0)=1\ et\ \omega b=f'(0)=0$. Donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=1$.

3ème cas $\lambda>0$. Posons $\omega=\sqrt{\lambda}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a\,\mathrm{ch}(\omega x)+b\,\mathrm{sh}(\omega x)$. Alors $a=f(0)=1\ et\ \omega b=0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\mathrm{ch}(\omega x)$.

CCL : les éléments de E qui valent 1 en 0 sont donc de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))\ ou\ (x\mapsto 1)$

Réciproquement, chacune des fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x\mapsto 1)$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$ est élément de E car cos et ch sont éléments de E alors d'après 4., $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$sont éléments de E. De plus, chacune de ces fonctions vaut 1 en 0. Ainsi, ces fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x\mapsto 1)$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$ sont les fonctions recherchées.

14. Les éléments de E sont donc toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))\ ou (x\mapsto 1)$ ou $(x\mapsto 0)$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$.

autrement dit, E est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x)), (x\mapsto\mathrm{ch}(\omega x))$ ou $(x\mapsto 0)$ tq $\omega\in\mathbb{R}$(car pour $\omega=0, \forall x, \mathrm{ch}(\omega x)=\mathrm{ch}(\omega x)=1$).

Parmi ces éléments de E, les éléments qui s'annulent sans être toutes nulles sont les fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x))$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$.

Ainsi, F est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto\cos(\omega x))$ tq $\omega\in\mathbb{R}^*$.

PARTIE 3 On se propose de décrire F par une autre méthode.

Soit f un élément de F. On note $U = \{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x) = 0\}$.

15. **PRELIMINAIRE** : Soit $a > 0$, on note $D_a = \{a\frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}\}$.
Nous allons montrer, dans cette question, que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D_a.
Soit x un réel.
    a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n}$.
    b. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que : $0 \le x - a\frac{p_n}{2^{q_n}} \le \frac{1}{n}$.
    c. En déduire que x est la limite d'une suite d'éléments de D_a.

15.a. $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n} \Leftrightarrow an \le 2^{q_n} \Leftrightarrow \ln(a) + \ln(n) \le q_n \ln(2) \Leftrightarrow \frac{\ln(a)+\ln(n)}{\ln(2)} \le q_n$.

Posons $q_n = \left\lfloor \frac{\ln(a)+\ln(n)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$. Ainsi, il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \le \frac{1}{an}2^{q_n}$.

b. $0 \le x - a\frac{p_n}{2^{q_n}} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow p_n \le 2^{q_n}\frac{x}{a} \le p_n + \frac{2^{q_n}}{an}$. Posons $p_n = \left\lfloor 2^{q_n}\frac{x}{a} \right\rfloor$. Alors, $p_n \le 2^{q_n}\frac{x}{a} < p_n + 1 \le p_n + \frac{1}{an}2^{q_n}$. Ainsi, p_n convient.

c. Posons $\forall n > 0, d_n = a\frac{p_n}{2^{q_n}} \in D_a$. Alors $\forall n > 0, 0 \le x - d_n \le \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = x$.

16. **BORNE SUP DE U**
    a. Montrer que U admet une borne inférieure finie notée a.
    b. Montrer ~~par l'absurde~~ que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.
    c. Montrer que $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

16 f est continue sur $\mathbb{R}$ non toute nulle donc $f(0) = 1$ et f paire et f s'annule au moins une fois
et $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ (**).
a. $U = \{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x) = 0\}$.
$U \subset \mathbb{R}^{+*} \subset \mathbb{R}$. De plus, comme f est élément de F, f s'annule au moins une fois donc U est non vide. Enfin, U est minoré par 0. Ainsi, U admet une borne inférieure finie notée a.
b. f est continue en a donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Comme a est la borne inférieure de U, il existe une suite (u_n) d'éléments de U de limite a.
Alors le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$. Or, $\forall n, u_n \in U$ donc $f(u_n) = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$. J'en déduis par unicité de la limite que $f(a) = 0$. De plus, $\forall n, u_n > 0$ donc $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ge 0$. De plus, $f(0) = 1 \ne 0 = f(a)$.
Ainsi, $a \ne 0$ et finalement, $f(a) > 0$.
c. $f(0) = 1\ et\ f(a) = 0$. De plus, $a = \inf(U)$ donc tout réel inférieur à a n'appartient pas à U $i.e.$ f ne s' annule pas sur $[0, a[$. Comme f est continue, f ne change pas de signe sur $[0, a[$. Comme $f(0) = 1$, $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

17. **QUI EST f ?**
On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}\ et\ g : (x \mapsto \cos(\omega x))$.
    a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.
    b. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
    c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)$.
    d. En déduire que $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.
    e. En déduire que $f = g$.
    f. Retrouver alors tous les éléments de F.

a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Prenons $X = \frac{a}{2^{q+1}} = Y$ dans (**). Alors $f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ i.e. $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

b. Comme g vérifie aussi (**), $\forall q \in \mathbb{N},\ g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$. Montrons par récurrence sur q que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

Init : $f(a) = 0 = g(a)$.

Propag : Soit $q \in \mathbb{N}$. Je suppose que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$. Alors $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right] \underbrace{=}_{\substack{car \\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)}} \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1\right] = \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

Comme $\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[, f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0\ et\ \frac{\pi}{2a}\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$. J'en déduis que $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.

CCL : J'en conclus, par le théorème de récurrence simple, que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrons par récurrence double sur p que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \underbrace{f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)}_{H_p}$.

$f\left(a\frac{0}{2^q}\right) = f(0) = g(0) = g\left(a\frac{0}{2^q}\right)$ et $f\left(\frac{a}{2}\right) = g\left(\frac{a}{2}\right)$ d'après b. Donc $H_0\ et\ H_1$ sont vraies

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $H_p\ et\ H_{p-1}$ sont vraies . Alors

$$f\left(a\frac{p+1}{2^q}\right) = f\left(\frac{ap}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) \overset{\substack{par\ (**) \\ avec\ X = \frac{ap}{2^q}\ et\ Y = \frac{p}{2^q}}}{\widehat{=}} 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{ap}{2^q} - \frac{a}{2^q}\right)$$

$$= 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \underbrace{=}_{\substack{car\ H_{p-1}, H_p\ et\ H_1 \\ sont\ vraies}} 2g\left(\frac{ap}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \overset{\substack{par\ (**) \\ avec\ X = \frac{ap}{2^q} \\ et\ Y = \frac{p}{2^q}}}{\widehat{=}} g\left(a\frac{p+1}{2^q}\right).$$

J'en conclus, par le théorème de récurrence double, que $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

En considérant l'ensemble D_a défini au 15. En prenant $a = InfU$, je peux affirmer que $\forall d \in D_a, f(d) = g(d)$.

d. Soit x un réel. Il existe une suite (d_n) d'éléments de D_a telle que $\lim_{n\to+\infty} d_n = x$. Alors $\forall n, f(d_n) \overset{\blacksquare}{=} g(d_n)$. Et comme f et g sont continues en x, $\lim_{n\to+\infty} f(d_n) = f(x)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} g(d_n) = g(x)$. Alors, en passant à la limite dans ■, je peux conclure que $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$.

e. Les éléments de F sont donc de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$. Réciproquement, nous savons que toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$ sont éléments de F. Ainsi, $F = \{(x \mapsto \cos(\omega x)) / \omega \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

Problème 2 Autour des accroissements finis généralisés

PARTIE I Accroissements finis généralisés

Soit a et b deux réels tq $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Justifier que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Indication : utiliser la fonction $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$ où K est une constante à bien choisir !

1. Comme $\boldsymbol{g}$ est continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$, le théorème de Rolle affirme que : $\boldsymbol{g(a) = g(b) \Longrightarrow}$ $\boldsymbol{g' s' annulesur}\ ]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.

Alors par contraposée, puisque g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, $g(a) \neq g(b)$.

2. Soit $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$ où K est une constante que l'on va choisir de sorte que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.

φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = 0$. Donc prenons K tel que $\varphi(b) = 0$ i.e. $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Alors le théorème de Rolle assure qu' il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ *i.e.* $f'(c) - Kg'(c) = 0$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

PARTIE II Règle de (monsieur) l'Hôpital

3. **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit a et b deux réels tq $a < b$.

Soit f et g sont deux fonctions dérivables *sur* $]a, b[$ *et* telles que : $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

4. En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.
5. **Une application pratique :** calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$ *de deux manières* .
6. **Une application plus théorique :** Soit $f \in C^\infty([0,1[, \mathbb{R})$.

On définit la fonction $h : [0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

a. Démontrer que h est de classe C^1 sur $[0,1[$.
b. Exprimer pour $x \in]0,1[$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.
c. En déduire que h est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et déterminer $h^{(n)}(0)$. On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

3. Soit $x \in]a, b[$. Soit $\tilde{f} : \left(t \mapsto \begin{cases} f(t) & si\ t \in]a, x] \\ 0 & si\ t = a \end{cases}\right)$ *et* $\tilde{g} : \left(t \mapsto \begin{cases} g(t) & si\ t \in]a, x] \\ 0 & si\ t = a \end{cases}\right)$.

$\tilde{f}$ est continue en a car $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\tilde{f}$ est continue et dérivable sur $]a, x]$ puisque f est continue et dérivable sur $]a, b[$ et $]a, x] \subset]a, b[$. Et $\forall t \in]a, x], \tilde{f}'(t) = f'(t)$. Idem pour $\tilde{g}$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, $\tilde{g}'(= g')$ ne s'annule pas sur $]a, x[$. Alors l'égalité des accroissements finis généralisés assure qu'il existe $c_x \in]a, x[$ tel que : $\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}$ *i.e.* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Ainsi, pour tout réel $x \in]a, b[$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.

Comme $c_x \in]a, x[$, $\lim_{x\to a} c_x = a$ et par composition, $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$. Et ainsi, je peux conclure que $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

4. Soit $f : \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g : (x \mapsto x)$. Alors f et g sont deux fonctions dérivables *sur* $]0,1[$ *et* telles que :

$\lim_{x\to 0} f(x) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0\ et \\ \left(x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ et $g' : (x \mapsto 1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[, \frac{f(x)}{g(x)} = xsin\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x = 0\ et \\ \left(x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0$.

Mais $\forall x \in]0,1[, \frac{f'(x)}{g'(x)} = f'(x) = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrons que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Pour cela, trouvons deux suites positives et de limite nulle et dont leurs suites images par f' ont des limites différentes.

Comme $\lim_{x\to 0} 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} x = 0\ et \\ \left(x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ bornée}} 0$, cherchons (u_n) et (v_n) telles que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$ *et* $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = -1$.

$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1 \Leftarrow \frac{1}{u_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = -1 \Leftarrow \frac{1}{v_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Posons $\forall n, u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ *et* $v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$ *et* $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = -1$. Donc par composition, $\lim_{n\to+\infty} 2u_n sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0 = \lim_{n\to+\infty} 2v_n sin\left(\frac{1}{v}\right)$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} f'(u_n) = 1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f'(v_n) = -1$.

J'en déduis par contraposée de la caractérisation séquentielle de la limite que f' (= $\frac{f'}{g'}$) n'a pas de limite en 0.

CCL : Soit f et g sont deux fonctions dérivables *sur* $]a,b[$ *et* telles que : $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et Alors $(\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L)$ mais la réciproque de cette implication est fausse.

5. calculons $\lim_{x\to 0} \frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$

1ère méthode : Posons $f(x) = cos(2x) - 1$ *et* $g(x) = 5x^2 + 6x^3$. f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 10x + 18x^2 = 18x\left(x + \frac{5}{9}\right)$ et $g''(x) = 10 + 36x$. Donc g' *et* g'' ne s'annulent pas sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\sin(2x)$. Donc, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g'(x)$. On peut donc appliquer la règle de l'Hôpital à f' et g' puis f et g.

$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4\cos(2x)}{10+36x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$ donc la règle de l'Hôpital assure que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$ et cette même règle permet de conclure que $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$.

2ème méthode : $\frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3} \underbrace{\sim_0}_{\substack{car \\ \cos(t)-1\sim_0 t \\ et \lim_{x\to 0} 2x=0}} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)^2}{5x^2} = -\frac{2}{5}$. Donc $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{2}{5}$.

6. Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$ et $h : [0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

a. Posons $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \underbrace{(f(x) - f(0))}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v(x)}$

u et v sont de classe C^∞ sur $]0,1[$ donc τ est de classe C^∞ sur $]0,1[$ donc h l'est aussi et $\forall x \in]0,1[, h'(x) = \tau'(x) = \frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}$.

$h'(x) = \frac{x(f'(0)+xf''(0)+o_0(x))-(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)-f(0))}{x^2} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o_0(1)$. Donc $\lim_{x\to 0} h'(x) = 0$. Alors le critère de classe C^1 assure que h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$ et h est de classe C^1 sur $[0,1[$.

b. $\forall x \in]0,1[, h(x) = \underbrace{(f(x) - f(0))}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v(x)}$. Comme u et v sont de classe C^∞ sur $]0,1[$, Leibniz assure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$,

$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$

$h^{(n)}(x) = \frac{(f(x)-f(0))(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ car $v^{(K)}(x) = \frac{(-1)^K K!}{x^{K+1}}$ et $u^{(K)}(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & si\ K = 0 \\ f^{(K)}(x) & si\ K \geq 1 \end{cases}$.

b. Appliquons le critère de classe C^∞.

h est de classe C^∞ sur $]0,1[$, est continue en 0. Il reste à prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in]0,1[, h^{(n)}(x) = \frac{(f(x)-f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!x^k}{x^{n+1}}$.

Posons $N(x) = (f(x) - f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!\,x^k$ et $D(x) = x^{n+1}$.

N et D sont dérivables sur $]0,1[$. D est continue en 0 donc $\lim_{x\to 0} D(x) = D(0) = 0^{n+1} \underbrace{=}_{car\ n+1>0} 0$.

N est continue en 0 donc $\lim_{x\to 0} N(x) = N(0) = (f(0) - f(0))(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)(-1)^{n-k}(n-k)! \underbrace{0^k}_{=0\ car\ k\geq 1} = 0$.

Et, $\forall x \in]0,1[$, $D'(x) = (n+1)x^n \neq 0$.

On peut donc tenter d'appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer $\lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)}$.

$\forall x \in]0,1[, D'(x) = (n+1)x^n$.

et $N'(x) = f'(x)(-1)^n n\,! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)\,!\binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}(x)x^k + f^{(k)}(x)kx^{k-1}\right]$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)!\binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)x^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(n-k)\,!\binom{n}{k} f^{(k)}(x)kx^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-(k-1)}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}_{a_k} - \underbrace{(-1)^{n-(k-1)}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}}_{a_{k-1}}}_{somme\ télescopique} = f'(x)(-1)^n n! + a_n - a_0$

$N'(x) = f'(x)(-1)^n n! + (-1)^{n-n}\frac{n!}{n!} f^{(n+1)}(x)x^n - (-1)^n \frac{n!}{0!} f^{(1)}(x)x^0 = f^{(n+1)}(x)x^n$.

Alors $\frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x)x^n}{(n+1)x^n} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)}$. Donc, comme $f^{(n+1)}$est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0, $\lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)}$. Alors, la règle de l'Hôpital assure que $\lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)} \in \mathbb{R}$.

Le critère de classe C^∞permet alors de conclure que h est de classe C^∞ sur [0,1[et $\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(n)}(0)\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)}$.

PARTIE III Une autre généralisation des accroissements finis

7. Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.
Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a, b[$, à valeurs réelles et telles que :

- u et v sont continues sur $[a, b[$
- u et v sont dérivables sur $]a, b[$
- $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$.

Montrer en étudiant les fonctions $u + v$ et $u - v$ que : $\forall x \in [a, b[, |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

7. Posons $g = u + v$ et $h = u - v$. Alors g et h sont continues sur $[a, b[$ et dérivables sur $]a, b[$ puisque u et v le sont.
Et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = u'(x) + v'(x)$ et $h'(x) = u'(x) - v'(x)$.
Or, $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$ $i.e.$ $-v'(x) \leq u'(x) \leq v'(x)$ donc $g'(x) \geq 0$ et $h'(x) \leq 0$. Alors, g est croissante et h est décroissante sur $[a, b[$. Donc $\forall x \in [a, b[,\ g(x) \geq g(a)\ et\ h(x) \leq h(a)$ i.e. $u(x) + v(x) \geq u(a) + v(a)\ et\ u(x) - v(x) \leq u(a) - v(a)$.
Ainsi, $\forall x \in [a, b[,\ -(v(x) - v(a)) \leq\ u(x) - u(a) \leq v(x) - v(a)$. Ce la signifie que $\forall x \in [a, b[,\ |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

8. **APPLICATION** : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.

b. En déduire , en utilisant la généralisation des accroissements finis, que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.

c. Justifier que : $\exists B \geq A / \forall x \geq B, |f(x)| \leq \varepsilon$.

d. Qu'en déduit-on sur f ?

8. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.

a. Soit $\varepsilon > 0$. h est dérivable sur $[a\,; +\infty[$ et $\forall x \geq a, h'(x) = \big(f'(x) + f(x)\big)e^x$ donc $\lim_{x\to+\infty} h'(x)\, e^{-x} = 0$.

Alors $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)e^{-x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i.e. $|h'(x)|e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.

b. Alors en utilisant 7. avec $u(x) = h(x)$ et $v(x) = \frac{\varepsilon}{2} e^x$ sur $[A, +\infty[$, j' obtiens : $\forall x \geq A, |h(x) - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$.

Donc, $\forall x \geq A, |f(x)e^x - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$ donc $|f(x)e^x| - |h(A)| \leq |f(x)e^x - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$.

Ainsi, $\forall x \geq A,\ e^x|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A + |h(A)|$ et alors, puisque $e^x > 0$, $\forall x \geq A,$ $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x} + |h(A)|e^{-x} \underset{car\ \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x} > 0}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.

c. $|h(A)|\ étant\ une\ constante,\ \lim_{x\to+\infty} |h(A)|e^{-x} = 0$. Donc, $\exists C \geq 0 / \forall x \geq C, \big||h(A)|e^{-x}\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $B = \max(A, C)$. Alors , $B \geq A$ et $\forall x \geq B, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

d. Nous pouvons alors conclure que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

FIN