Corrigé TD 19 Applications linéaires.

Ex 1 Sont-elles linéaires ? Si oui, trouver une base du noyau et une base de l'image.

1. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P(2)P'(1)$.
2. u définie sur $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) par$: $u(f) = f' + 2f$.
3. u définie sur $M_n(\mathbb{C}) par$: $u(M) = \det(M)$.
4. $Soit\ D = diag(a,b)$ où a et b complexes fixés et u définie sur $M_2(\mathbb{C})$ par : $u(M) = DM^T$.
5. Ψ définie sur $\mathbb{R}^2 par$: $\Psi\big((x,y)\big) = (x - 3y, 2x^2 - y)$.
6. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + XP' + 1$.
7. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + P'(1)X$.
8. u définie sur $C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) par$: $u(f) = 2f(0)f''$.
9. Ψ définie sur $\mathbb{R}^4$ par : $\Psi\big((x,y,z,t)\big) = 4y - x + t$.

Réponses : N,O,N,O,N,N,O,N,O

Ex 2 Montrer que f est linéaire et déterminer $Kerf$, Imf et rgf. f est-elle injective ? surjective ? f est-elle un automorphisme ? un isomorphisme ?

1. Soit $\varphi : C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par : $\varphi(f) = g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u\ convergente\}\ et$ φ définie sur E par : $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\varphi(P) = P'(2) + 4P^{(3)}(2)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ application définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX - XA$.
5. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = tr(M)$.
6. Soit φ application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - tr(M)I$.
7. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - M^T$.

En vert, les questions pour lesquelles on peut utiliser les matrices d'application linéaire.
■ les exercices corrigés en classe…
Pensez aussi à regarder tous les exemples et exercices traités dans le cours.

■**Ex 3** 1.Soit E un K-e-v de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3},)$ et $u \in L\ (E)$ telle que :
$u(\vec{e_1}) = 4\vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 4\vec{e_3}, u(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}\ et\ u(\vec{e_3}) = 5\vec{e_1} - \vec{e_2} - 5\vec{e_3}$.

a. Déterminer le rang de u.
b. $Ker(u)\ et\ Im(u)$ sont -ils supplémentaires dans E ?
c. $Ker(u^2)\ et\ Im(u^2)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

2. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à J la matrice carrée d'odre 3 dont tous les coefficients valent 1.
a. Montrer que $ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.
b. Soit p la projection sur $Kerf$ et parallèlement à Imf et q la projection associée. Déterminer $p(x,y,z)\ et\ q(x,y,z)$.

■**Ex 4**

1. Déterminer l'unique forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$telle que: $f\big((1,1,1)\big) = 0, f\big((2,0,1)\big) = 1\ et\ f\big((1,2,3)\big) = 4$.
3. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $vect\big((1,0,0),(1,1,1)\big)$.
4. Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est H ?

Ex 5 Soit u définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$..
2. Montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $u^2(P)$. Montrer que $Im(u) = Im(u^2)$.
4. Déterminer $s(A + bX + cX^2 + dX^3)$ où s est la symétrie par rapport à $Im(u)$ et parallèlement à $Ker(u)$.

■**Ex 6** Soit u définie par :$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer une base de $Im(u)$ et une base de $Ker(u)$.
3. Soit $Q \in Im(u)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $u(P) = Q\ et\ P(0) = P'(0) = 0$.

Ex 7 Pour tout polynôme P, $\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
3. En déduire que φ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}[X]$sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Justifier que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ noté g . g est-il un automorphisme ?
5. Déterminer l'image et le noyau de g .
6. Montrer que $g - \lambda id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera (comment appelle t-ton ces valeurs ?).
7. Pour ces valeurs particulières, déterminer le noyau de $g - \lambda id$.

Ex 8 Soit $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_n})$ une base de E

1. Montrer que $\varphi: E^* \to K^n$ définie par : $\varphi(f) = (f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), .., f(\overrightarrow{e_n}))$ est un isomorphisme. Qu'en déduit-on sur E^*?
2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ $e_k{}^*$ l'application définie sur E par : $e_k^*(\vec{x}) = la\ composante\ de\ \vec{x}\ selon\ \overrightarrow{e_k}\ dans\ B$.

Montrer que $(e_1^*, e_2^*, .., e_n^*)$ est une base de E^*.

3. Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{1+cos^2(t)} dt$.

Montrer que $\exists(\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P) = \lambda_0 P(a_0) + \lambda_1 P(a_1) + .. + \lambda_{n-1} P(a_{n-1})$.

Ex 9 Soit $F\ et\ G$ deux ss-e-v $de\ E$. Soit $\varphi: F \times G \to E$ telle que : $\varphi\big((\vec{x}, \vec{y})\big) = \vec{x} + \vec{y}$. Montrer que $\varphi\ est\ linéaire$. Décrire son noyau et son image. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective puis surjective puis bijective.

- Soit $\overrightarrow{x_1}\ et\ \overrightarrow{x_2}\ deux\ vecteurs\ de\ F$, $\overrightarrow{y_1}\ et\ \overrightarrow{y_2}\ deux\ vecteurs\ de\ G, a_1\ et\ a_2\ deux\ scalires.$

$\varphi\Big(\big(a_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}) + a_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})\big)\Big) = \varphi\big((a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2}, a_1\overrightarrow{y_1} + a_2\overrightarrow{y_2})\big) = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + a_1\overrightarrow{y_1} + a_2\overrightarrow{y_2} = a_1(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}) + a_2(\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{y_2}) = a_1\varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}) + a_2\varphi(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$. Donc, $\varphi\ est\ linéaire.$

- $Ker(\varphi)$?

$\varphi\big((\vec{x}, \vec{y})\big) = \vec{x} + \vec{y} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \in F \cap G\ et\ \vec{x} \in F \cap G$. Donc $Ker(\varphi) = (F \cap G) \times (F \cap G)$.

Par conséquent, φ est injective sietssi $Ker(\varphi) = \{(\vec{0}, \vec{0})\} \Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{O}\}$.

- $Im(\varphi)$?

$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G, \varphi\big((\vec{x}, \vec{y})\big) = \vec{x} + \vec{y} \in F + G$. Donc $Im(\varphi) \subset F + G$.

Si $(\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G, \vec{x} + \vec{y} = \varphi\big((\vec{x}, \vec{y})\big)$ donc $F + G \subset Im(\varphi)$. $Ainsi\ Im(\varphi) = F + G$.

Par conséquent, φ est surjective sietssi $Im(\varphi) = E\ sietssi\ F + G = E$.

Ainsi φ est isomorphisme sietssi $\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{\vec{O}\} \end{cases} \Leftrightarrow F \oplus G = E$

■**Ex 10** Soit $f \in$L (E) . Soit $a\ et\ b$ deux scalaires distincts.

1. Montrer que : $Kerf = Kerf^2 \Leftrightarrow Imf \cap kerf = \{\vec{O}\}$
2. Montrer que : $Imf^2 = Imf \Leftrightarrow Imf + Kerf = E$.
3. Démontrer que $Ker(f - a.id)$ et $Ker(f - b.id)$ sont stables par f et en somme directe.

■**Ex 11** Soit $f \in$ L (E) tel qu'il existe un entier naturel p tel que $f^{p-1} \neq O\ et\ f^p = O$.

1. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{O}$. Montrer que : $B\ = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$est libre.
2. Si E est de dimension finie n ,comparer $n\ et\ p$ .Que dire de B si $p = n$?

■**Ex 12** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 + 6f - 7id_E = O$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}en fonction de $f\ et\ id.$
2. Montrer que :$(f - id) \circ (f + 7id) = O$. En déduire que $Im(f - id) \subset Ker(f + 7id)$et $Im(f + 7id) \subset Ker(f - id)$.
3. Démontrer enfin que $Ker(f + 7id) \oplus Ker(f - id) = E$.
4. Montrer que $Ker(f + 7id)\ et\ Ker(f - id)$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $Ker(f + 7id)\ et\ Ker(f - id)$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $Ker(f + 7id)$ et parallèlement à $Ker(f - id)$ et q l'autre projection associée.
   a. Montrer que $f = -7p + q$.
   b. En déduire que $f^n = (-7)^n p + q$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme d'un K-e-v E tel que $f^3 = f$. Montrer que $Ker(f)\ et\ Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

Soit $x \in E$. Cherchons $y \in Ker(f)$ et $z \in Im(f)$ tels que $x = y + z$.

<u>Analyse</u> : supposons que de tels vecteurs y et z existent. Alors $\begin{cases} x = y + z \\ \exists t \in E / y = f(t). \\ f(z) = 0 \end{cases}$

Donc $f(x) \overset{car\ f\ liénaire}{=} f(y) + f(z) = f(y) = f^2(t)\ et\ f^2(x) = f^3(t) \overset{car\ f^3 = f}{=} f(t) = y$. Donc $y = f^2(x)\ et\ z = x - f^2(x)$.

Ainsi, si de tels vecteurs y et z existent alors ils sont uniques $y = f^2(x)\ et\ z = x - f^2(x)$.

<u>Synthèse</u> : Posons $y = f^2(x)\ et\ z = x - f^2(x)$.

Alors $y + z = x\ et\ y = f(f(x)) \in Im(f)$ et $f(z) = f(x) - f\big(f^2(x)\big) = f(x) - f^3(x) \overset{car\ f^3 = f}{=} 0\ donc\ z \in Ker(f)$.

Ainsi, y et z conviennent et sont les seuls qui conviennent. Donc tout vectuer de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Ker(f)$ et d'un vecteur de $Im(f)$. J'en conclus que $Ker(f) \oplus Im(f) = E$.

Ex 14 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $F\ et\ G$ sont deux ss-e-v de E stables par f alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables f.
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$ alors $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f .

■**(cours)Ex 15** Soit $f \in E^*$ telle que f non nulle.

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $\vec{a} \in E \backslash Ker(f)$. Montrer que $Ker(f) \oplus vect(\vec{a}) = E$. Que peut-on alors dire de $Ker(f)$?

Ex 16 Soit $(u,v) \in L(E)^2$ telle que : $v \circ u = id_E$. Montrer que $E = Ker(v) \oplus Im(u)$.

■Ex 17 Soit $\boldsymbol{u}$ ***et*** $\boldsymbol{v}$ deux endomorphismes d'un K-e-v ***E* de dimension finie *n*.**

1. Soit $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Montrer que : $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \ldots, n\} / u(\overrightarrow{e_{i_0}}) \neq 0$.
2. Montrer que :
   - $rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$.
   - $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u - v)$.

Ex 18 Soit E de dimension finie n . Soit $(u,v) \in L\ (E)^2$.

1. On suppose ici que : $E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$.Montrer que ces deux sommes sont directes.
2. Montrer que $Im(u) = Ker(u) \Leftrightarrow u^2 = 0$ et $2rg(u) = n$.
3. On suppose ici que $u^2 + 2u = 0$. Montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont supplémentaires dans E et que u induit un automorphisme sur $Im(u)$.
4. On suppose que $rg(u^2) = rg(u)$. Montrer que : $\begin{cases} Im(u^2) = Im(u) \\ Ker(u^2) = Ker(u) \\ Im(u) \oplus Ker(u) = E \end{cases}$.

Ex 19 Soit E de dimension finie n.

a. Montrer que les suites $(Im(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires.

b. Soit p le plus petit entier tel que $Im(u^p)$ =$Im(u^{p+1})$. Montrer que $\forall k \geq p$, $Im(u^k)$ =$Im(u^p)$ et $Ker(u^k)$ =$Ker(u^p)$.

c. Montrer que $Im(u^p) \oplus Ker(u^p) = E$.

Ex 20 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On étudie sur des cas particuliers les solutions de l'équation (eq) : $(f + id_E)^{2n} = id$ où $f \in L\ (E)$ est l'inconnue.

Déterminer les homothéties vectorielles sur E qui sont solutions de (eq)

Soit s une symétrie. Exprimer$(s + id)^{2n} - id$ fonction de s et id_E. En déduire les symétries solutions de (eq).

Déterminer les projections vectorielles de E solutions de (eq).

Ex 21 Soit E un K-e-v et u un vecteur de E et p un projecteur et s une involution dans E .

1. Résoudre l'équation $x + p(x) = u$ d'inconnue x élément de E .
2. Résoudre l'équation $x + s(x) = u$ d'inconnue x élément de E .

Propriétés des projections

Ex 22 Soit p et q deux projecteurs d'un K-e-v E non associés tels que $Im(p) = Im(q)$ et $q \circ p = p \circ q$. Montrer que $p = q$.

p est la projection sur $Im(p)$ et parallèlement à $Ker(p)$ et q est la projection sur $Im(q)$ et parallèlement à $Ker(q)$. Donc, pour prouver que $p = q$, il suffit de montrer que $\ker(p) = Ker(q)$. De plus, compte du rôle symétrique de p et q , il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}(p) \subset Ker(q)$.

Soit $x \in Ker(p)$.

Comme $Ker(q) \oplus Im(q) = E$, il existe $t \in Ker(q)$ et $y \in Im(q)$ tels que $x = t + y$. Puis il $existe$ $z \in E$ tel que $y = q(z)$.

Alors $x = t + q(z)$ et $0 = p(x) \underbrace{=}_{car\ p\ linéaire} p(t) + p(q(z))$. Donc $p(q(z)) = -p(t) = p(-t)$.

Or, $Im(p) = Im(q)$ donc $q(z) \in Im(p)$. De plus, $\forall u \in Im(p), p(u) = u$. Donc, $p(q(z)) = q(z) = y$. Ainsi, $y = p(-t)$.

Alors, $q(y) = q(p(-t)) \underbrace{=}_{car\ q\ et\ p\ linéaires} -q(p(t)) \underbrace{=}_{car\ q \circ p = p \circ q} -p(q(t)) \underbrace{=}_{car\ t \in Ker(q)} -p(0) \underbrace{=}_{car\ p\ linéaire} 0$. Donc $y \in Ker(q)$.

Alors $y \in Ker(q) \cap Ker(q)$.Or,$Ker(q) \cap Ker(q) = \{O\}$. Donc, $y = 0$ et par suite $x = t \in Ker(q)$.

J'en déduis que $\mathrm{Ker}(p) \subset Ker(q)$ et je peux alors conclure que $p = q$.

Ex 23 A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ \ si\ x \neq 0 \\ f(0) si\ x = 0 \end{cases}$.

Partie I *:* Exemples. Déterminer $T(f)$ dans les cas suivants :

1. $f(t) = t^2 \cos(t^3 - 1)$
2. $f(t) = \cos(2t)\sin^3(t)$
3. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}$

Partie II *:* Etude de *T* sur $\boldsymbol{E_n}$. Soit n un entier naturel. On note E_n , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T. On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T.
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n.
4. Déterminer tous les couples $(\lambda, P) \in K \times E_n \backslash \{0\}$ tels que : $T_n(P) = \lambda P$.
5. Pour chacune des valeurs de λ trouvées précédemment, donner une base de $Ker(T_n - \lambda Id)$.

Partie III : Etude de *T* dans $\boldsymbol{C}°(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in C°(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$ d'inconnue y .
2. Etudier la continuité de $T(f)$ en 0.

3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)$.

Partie I

1. Soit x un réel.

$T(f)(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt \ si\ x\neq 0\\ 0\ \ si\ x=0\end{cases}$. Alors, $\int_0^x t^2\cos(t^3-1)dt=\frac{1}{3}\int_0^x 3t^2\cos(t^3-1)dt=\frac{1}{3}[\sin(t^3-1)]_0^x$. Donc,

$T(f)(x)=\begin{cases}\frac{1}{3x}[\sin(t^3-1)+\sin(1)]\ si\ x\neq 0\\ 0\ \ si\ x=0\end{cases}$.

2. $T(f)(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x \cos(2t)\,sin^3(t)dt\ \ si\ x\neq 0\\ 0\ \ si\ x=0\end{cases}$

Ex 24 Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$.

1. Montrer que si (P_n)est une suite de polynômes telle que: $\forall n,\deg(P_n)=n$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* base de $\mathbb{R}$[X].
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$.
4. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $H_0=1\ et\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\Delta(H_n)=H_{n-1}\ et\ H_n(0)=0$.
5. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P=\sum_{n=0}^{p}(\Delta^n(P))(0)H_n$.
7. Montrer que : $\Delta^n(P)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$ puis $(\Delta^nP)(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)$.
8. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},H_n=\frac{1}{n!}X(X-1)(X-2)..(X-n+1)$.

■**Ex25** Soit Ψ l'application qui, à une fonction f, associe sa dérivéef'.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $F=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Soit E L'ensemble des fonctions de la forme $\left(x\mapsto\tilde{P}(x)\cos(x)+\tilde{Q}(x)\sin(x)\right)$où $P\ et\ Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Montrer que $B=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est une base de E.
   où $f_1:(x\mapsto sin(x))\ f_2:(x\mapsto xsin(x))\ f_3:(x\mapsto\cos(x))\ et\ \ f_4:(x\mapsto xcos(x))$.
5. Montrer que E est stable par Ψ. On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ. On note Id_E l'application identité sur E.
6. Déterminer $Ker(D)$. En déduire que D est un automorphisme de E .
7. Déterminer, selon les valeurs du réel λ, le rang de $D^2-\lambda Id_E$.
8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de D^2+Id_E.
9. En déduire que $D^4+2D^2+Id_E$ est l'application nulle de E.
10. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

11. Déterminer la dimension de V.
12. Vérifier que V est stable par composition.
13. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E+\beta\ D^2$ tel que $\alpha\ et\ \beta$ réels distincts.
14. Résoudre dans **R** l'équation différentielle : $y''+y\ =\ 0$.
15. Déterminer le noyau de Ψ^2+Id_F.
16. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2+Id_F)^2$.
17. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$.

FIN ....

6. $M=mat_uD=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$. $M\sim_c\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$. Donc $rgD=rgM=4$. Ainsi D est un automorphisme.

7. $mat_uD^2-\lambda Id_E=M^2-\lambda I_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}-\lambda I_4=\begin{pmatrix}-1-\lambda&0&0&0\\0&-1-\lambda&0&0\\0&2&-1-\lambda&0\\0&0&0&-1-\lambda\end{pmatrix}$..

   $Si\ \lambda=-1$ alors $rgD^2-\lambda Id_E=1$.
   Si $\lambda\neq-1$ alors $rgD^2-\lambda Id_E=4$.

8. $rgD^2+Id_E=1$. *Donc le thorème du rang assure que* $\dim Ker(D^2+Id_E)=3$.

De plus, $mat_uD^2+Id_E=M^2+I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Donc, f_1,f_3,f_4 *sont éléments de* $Ker(D^2+Id_E)$. De pkus, la famille ,

(f_1,f_3,f_4) étant extraite de la famille libre B , est libre aussi et maximale dans $Ker(D^2+Id_E)$. Ainsi, (f_1,f_3,f_4) est une base de $Ker(D^2+Id_E)$.

De plus, $(D^2+Id_E)(f_2)=2f_3$ donc $(D^2+Id_E)\left(\frac{1}{2}f_2\right)=f_3$. Ainsi, $f_3 \in Im(D^2+Id_E)$. Comme f_3 est non nul , (f_3) est libre et maximale dans $Im(D^2+Id_E)$.Ainsi (f_3) est une base de $Im(D^2+Id_E)$.

9. Comme $Im(D^2+Id_E) \subset Ker(D^2+Id_E)$ ($car\ f_3, \in Ker(D^2+Id_E)$), $(D^2+Id_E)\circ(D^2+Id_E)=0$ ce qui donne : $D^4+2D^2+Id_E=0$.

   $Rque$: on aurait pu démontrer ce résultat matriciellement en prouvant, par le calcul, que $M^4+2M^2+Id_E=0$.

10. Alors, $(-D^3-2D^1)\circ D=Id_E=D\circ(-D^3-2D^1)$. Donc D bijectif et $D^{-1}=(-D^3-2D^1)$.
11. $V=vect(D^2,id)$. Comme D² et id sont des éléments de de $\mathscr{L}(E)$, V est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$, est le ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$ engendré par D^2 et Id_E. De plus, D^2 et Id_E ne sont pas colinéaires puisque M^2 et I_4 ne le sont pas ; ainsi, (D^2,id) est une base de V. Donc $dimV=2$.

12. $(aD^2+bid_E)\circ(a'D^2+b'id_E)=aa'D^4+(ab'+a'b)D^2+bb'id_E=aa'(id_E-2D^2)+(ab'+a'b)D^2+bb'id_E$ $=(-2aa'+ab'+a'b)D^2+(aa'+bb')id\in V$. Donc V est stable par composition.

13. Soit $u=aD^2+bid_E \in V$.

$$mat_B u=aM^2+bI_4=\begin{pmatrix}-a+b&0&0&0\\0&-a+b&0&0\\0&2a&-a+b&0\\0&0&0&-a+b\end{pmatrix}. Et\ \det(aM^2+bI_4)=(b-a)^4.\ \text{Donc}$$

$u\ bijective \Leftrightarrow aM^2+bI_4\ inversible \Leftrightarrow \det(aM^2+bI_4)\neq 0 \Leftrightarrow b\neq a$. Ainsi, les éléments bijectifs de V sont les endomorphismes $aD^2+bid_E\ tq\ b\neq a$.

14. Les solutions de $y''+y=0$ sont toutes les fonctions de la forme $\alpha cos+\beta sin$ tq α,β réels . Ce sont donc toutes les combinaisons linéaires de $f_1\ et\ f_3$. Toutes les solutions de cette équation différentielles sont dans $F=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
15. Soit $f\in F$.

$f\in Ker(\psi^2+Id_F) \Leftrightarrow f''+f=0 \Leftrightarrow f\in vect(f_1,f_3)$. Ainsi, $Ker(\psi^2+Id_F)=vect(f_1,f_3)$.

16. Soit $f\in F$.

$f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2) \Leftrightarrow (\psi^4+2\psi^2+Id_F)(f)=0 \Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)((\psi^2+Id_F)\ (f))=0 \Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)(f)\in Ker(\psi^2+Id_F)$
$\Leftrightarrow (\psi^2+Id_F)(f)\in vect(f_1,f_3)$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/f''+f=\alpha f_1+\beta f_3$.
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)+f(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$

Résolvons l'équation différentielle : $(edl2)$: $y''+y=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$

$Sol(edl2H)=vect(f_1,f_3)$.

Solution particulière ?

Cherchons une solution particulière de $(edl2)$de la forme $g:(x\mapsto(Ax+B)\sin(x)+(Cx+D)\cos(x))$ tq A,B,C,D réels à déterminer.

$$\forall x\in\mathbb{R}, g''(x)+g(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},(2A-D-Cx)\cos(x)-(2C+B+Ax)\sin(x)+(Ax+B)\sin(x)+(Cx+D)\cos(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$
$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},(2A-\beta)\cos(x)-(2C+\alpha)\sin(x)=0$

$\underset{\substack{car\ la\ famille\\(\cos,\sin) est\ libre}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2A-\beta=0\\2C+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\beta\\C=\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$. Donc, $g:(x\mapsto\left(\frac{1}{2}\beta x\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x\right)\cos(x))$ est une solution particulière de notre équation différentielle $(edl2)$. Ainsi, les solutions de $(edl2)$ sont toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto\left(\frac{1}{2}\beta x+k\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x+k'\right)\cos(x))$ tq k et k' réels .

Alors, $f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2)$

$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 et\exists(k,k')\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{1}{2}\beta x+k\right)\sin(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha x+k'\right)\cos(x)$
$\Leftrightarrow \exists(\alpha',\beta')\in\mathbb{R}^2 et\exists(k,k')\in\mathbb{R}^2/\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(\beta'x+k)\sin(x)+(\alpha'x+k')\cos(x)$
$\Leftrightarrow f\in vect(f_1,f_2,f_3,f_4)$.

Ainsi, $Ker(\psi^2+Id_F)^2)=vect(f_1,f_2,f_3,f_4)=E$.

17. Tout d'abord , on montre facilement par récurrence qu'une solution de $(edl4)=f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0$ est de classe $C^\infty sur\ \mathbb{R}$.

Soit $f\in F. f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0. \Leftrightarrow (\psi^4+2\psi^2+Id_F)(f)=0 \Leftrightarrow f\in Ker((\psi^2+Id_F)^2)$. Donc, $Ker((\psi^2+Id_F)^2)$ est l'ensemble des solutions de $(edl4)$. Alors d'après la question précédente , je peux conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de $f^{(4)}+2f^{(2)}+f=0$. Ainsi , $Sol(edl4)=vect(f_1,f_2,f_3,f_4)=E$

Ex26-Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\} et\ f:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}^{n+1}$ telle que : $f(P)=(P(0),P'(0),..,P^{(n)}(0))$. Montrer que f est un isomorphisme et préciser f^{-1}.

EX27 Soit $f\ et\ g$ deux endomorphismes d'un K-e-v E tels que : $f\circ g=id_E$. Montrer que $Ker(f)=Ker(g\circ f)\ et\ Im(f)=Im(g\circ f)$.

EX28 Soit $p\ et\ q$ deux projecteurs d'un K-e-v E qui commutent mais pas forcément associés.

On pose : $r=p+q-pq$.

1) Montrer que r est un projecteur.
2) Calculer $p\circ r\ et\ q\circ r$.
3) Montrer que $Ker(r)=Ker(p)\cap Ker(q)$.

4) Montrer que $Im(r) = Im(p) + Im(q)$.

Ex29 Soit p et q deux projecteurs (pas associés) dans un K-e-v E qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. On suppose de plus que $p \circ q = q \circ p = 0$ .Montrer que $p + q$ est un projecteur.

1. $p \circ q \circ p \circ q \underbrace{=}_{car\ p\ et\ q\ commutent} p \circ p \circ q \circ q \underbrace{=}_{car\ p^2 = p\ et\ q^2 = q} p \circ q$. Donc $p \circ q$ est un projecteur.
2. $(p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q. Donc$ $p + q$ est un projecteur

Ex30 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $f(P) = P(-X) - P(X)$.

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2) Montrer que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

Ex 31 Soit $E, F\ et\ G$ trois K-e-v tels que $\dim(F) = n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1) Monter que si H est un ss-e-v de F alors $g(H)\ est\ un\ ss-e-v\ de\ G\ et\ \dim(g(H)) \leq \dim(H)$. On pourra utiliser $h: \begin{pmatrix} H \to G \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) \end{pmatrix}$.

2) En utilisant $h: \begin{pmatrix} Im(f) \to G \\ \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) \end{pmatrix}$, montrer que $rg(g \circ f) = rg(f) + rg(g) - n$.

COURS :

Une application linéaire de E dans F est une application … … … … … …qui vérifie : … … … … … …………………………**ou** … … … … … … … … … … … …

. On note … … … … … … l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Un endomorphisme de E est une … … … … … … … … … … … … … … ., on note ………… l'ensemble des endomorphismes de E.

Un isomorphisme de E sur F est ……………………………………………… , on note ………………………………l'ensemble des isomorphismes de E.

Un automorphisme de E est ………………………………………………, on note ………………………………l'ensemble des automorphismes de E.

Une forme linéaire sur E est une ………………………………… ……et on note … … …. l'ensemble des formes linéaires sur E.

Si $B = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $F = (f_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de F alors il existe ……………………$u \in L\ (E, F)$ telle que : ……………………………

Si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in L\ (E_1, F)\ et\ u_2 \in L\ (E_2, F)$. Alors il existe ……………………$u \in L\ (E, F)$ telle que : ……………………………

Soit $u \in L\ (E, F)$

$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K^m, \forall(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m) \in E^m\ u(\overrightarrow{O_E}) = \cdots$ … et $u(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{x}_i) = \cdots$ … … … … … … … … … … … … ….

$Ker(u) = \cdots$ … … … … … … …est un ………………et $Im(u) = \cdots$ … … … … … … … … … … . $= \cdots$. est un ……………. et $rg(u) = \cdots$ … … … ….

Si $B = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E alors $Im(u) = \cdots$ … … … …

$rg(u) \leq \cdots$ … … … … … … et $rg(u \circ v) \leq \cdots$ … … … … … …

$rg(u) = rg(u \circ v) = rg(w \circ u)$ dès que ………………….

Si H est un ss-e-v de E alors $\boldsymbol{f(H)} =$ ………………………….. est un …………… Si $u \in Isom(E, F)$ alors $\boldsymbol{dimf(\ H) = \cdots}$ … ..

Si G est un ss-e-v de F alors $\boldsymbol{f^{-1}(G)} =$ ………………………….. est un ………….. Si $u \in Isom(E, F)$ alors $\boldsymbol{dimf^{-1}(G) = \cdots}$ … ..

Soit $u \in L\ (E)$ et H un ss-e-v de E. H est stable par $u \Leftrightarrow$… … … … . . Alors $u_H: \begin{pmatrix} \ldots . \to \cdots \ldots . \\ \vec{x} \mapsto \cdots \ldots \ldots \end{pmatrix}$ est l'endomorphisme de H induit par u.

Soit $u \in L\ (E, F)$.

u est injective $\Leftrightarrow \boldsymbol{Ker(u) = \cdots}$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ possède\ une\ base}}$ $[\boldsymbol{(e_i)_{i \in I}\ base\ de\ E} \Rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ $\boldsymbol{rg(u) = \cdots}$ … ..

u est surjective $\Leftrightarrow \boldsymbol{Im(u) = \cdots}$ … … . $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ possède\ une\ base}}$ $[\boldsymbol{(e_i)_{i \in I}\ base\ de\ E} \Rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots]$. $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ F\ est\ de\ dim\ finie}}$ $\boldsymbol{rg(u) = \cdots}$ … ..

u est isomorphisme $\Leftrightarrow \boldsymbol{\exists v \in F\ (F, E) /\ .\ u \circ v = id_F\ et\ v \circ u = id_E} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Ker(u) = \cdots ..} \\ \boldsymbol{Im(u) = \cdots ..} \end{cases}$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ possède\ une\ base}}$ $[\boldsymbol{(e_i)_{i \in I}\ base\ de\ E} \Rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ est\ de\ dim\ finie}}$ $\begin{cases} \boldsymbol{F\ est\ de} \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \boldsymbol{rg(u) = \cdots} \ldots . . = \cdots .. \end{cases}$

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \cdots$ … … … … … … … … … … … … . $\Rightarrow$ $\boldsymbol{dim(E) = \cdots}$ … ….

$Si\ dim(E) = dim(F) < +\infty\ \ et\ u \in L\ (E, F)\ \ alors:$ u est isomorphisme$\Leftrightarrow$**u**……………………$\Leftrightarrow$**u** ………………………$\Leftrightarrow \boldsymbol{rg(u) =}$………………………

Soit $u \in L\ (E, F)$.

$Im(u)$ est isomorphe à ………………………

Si E est **de** ………………………alors $\dim(Ker(u)) + \cdots$ … … … … … … … … . $= \cdots$ … … … … … … … ….(théorème **du rang**).

Si $\vec{b} \in Im(u)$ alors les vecteurs $\vec{x}$ tels que $u(\vec{x}) = \vec{b}$ sont ....

Si $(u, v) \in L\ (E,F)^2\ et\ (a,b) \in K^2$alors, $(au + bv)$. ∈...........................

Si $u \in L\ (E,F)\quad et\ v \in L\ (F,G)$ alors $v \circ u \in \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots et\ [v \circ u = 0 \Leftrightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .]et\ Ker(u) \ldots Ker(v \circ u)\ et\ Im(v) .. Im(v \circ u)$

Si $(u, v) \in L\ (E,F)^2, w \in L\ (F,G)\quad et\ z \in L\ (G,E)\ et\ (a,b,c) \in K^3, (au + bv) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ ....et $(au + bv) \circ cz = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ..$

L $(E,F) est$ .... F (E,F)

Si $u \in Isom\ (E,F)$ alors $u^{-1} \in \cdots \ldots \ldots \ldots ....$

Soit $(u, v) \in L\ (E)^2\ et\ (a,b) \in K^2$.

$au + bv\ \in \cdots \ldots \ldots \ldots et\ v \circ u \in$ ....

$u^0 = \cdots \ldots .. et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u^n = \underbrace{\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots}_{n\ fois} = \cdots \ldots .....$

u est nilpotent d'indice p lorsque $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P(u) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots ....$

Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)^n = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\quad et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u^n - v^n = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ....$

$u \in GL(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Ker(u) = \cdots .. \\ Im(u) = \cdots .. \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ possède\ une\ base}} [(e_i)_{i \in I}\ \textbf{base de}\ E \Rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots] \Rightarrow u^{-1} \in \cdots \ldots \ldots \ldots ..$

$u \in GL(E) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ est\ de\ dim\ finie}} u \ldots \ldots \ldots \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ est\ de\ dim\ finie}} u \ldots .. \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{valable\ si \\ E\ est\ de\ dim\ finie}} rg(u) = \cdots ....$