Sup PCSI 2022-2023 Mathématiques

TD 20

Matrices d'une application linéaire .

Ex 0 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f^2 est combinaison linéaire de f et $id_{\mathbb{R}_2[X]}$. En déduire f^n tq $n \in \mathbb{N}$..

■**Ex 1** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1}.
2) Montrer que $\ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})^2 \oplus Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$
3 Montrer qu'il existe une base $B' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $A' = mat_{B'}f = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4) En déduire A^n tq $n \in \mathbb{N}$.

Ex 2 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

a. Décrire $f((x, y, z))$.
b. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est surjective.
c. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas bijective.

Ex 3 Soit E un K-e-v de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$.

1) Justifier qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f a ses deux premières colonnes nulles.
2) Montrer qu'il existe $a \in K$ tq : $f^2 = af$.

Ex 4 Soit $a_1, a_2, .., a_n$des réels et $\varphi: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (\tilde{P}(a_1), \tilde{P}(a_2), .., \tilde{P}(a_n)) \end{pmatrix}$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme si et ssi $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts.
b) Désormais $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts. On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$. Montrer que $B = (L_1, L_2, .., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
c) Quelles sont les composantes dans B d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
d) En déduire la matrice de passage de B à B_c la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
e) Montrer que la matrice de Vandermonde associée à $a_1, a_2, .., a_n$ si et ssi $a_1, a_2, .., a_n$sont tous distincts.

Ex 5 Soient $f_1: (x \mapsto e^{-x})$, $f_2: (x \mapsto xe^{-x})$, $f_3: (x \mapsto x^2e^{-x})$ et E le sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par ces trois applications .$\forall f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$.

1. Déterminer $dimE$. On note $B = (f_1, \ f_2, \ f_3)$.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Ecrire la matrice A de φ dans B.
3. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire, pour tout entier n , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g: (x \mapsto (3 - 2x + 8x^2)e^{-x})$.
5. $\forall f \in E$, on pose $\Gamma(f) = f + f'$. Justifier que Γ est un endomorphisme de E et donner une base de $Ker\Gamma$ et $Im\Gamma$.
6. Soit $h: (x \mapsto (2 + 2x)e^{-x})$. Trouver les solutions de l'équation $f' + f = h$.

Ex 6 Soit$E$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
2. On pose $\forall u \in E$, $\Phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que Φ est une bijection de E sur $\mathbb{R}^3$. En déduire la dimension de E.
3. On pose $\forall i \in \{1,2,3\}, \varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Justifier que $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et expliciter les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.
4. Soit d l'application définie sur E par : $\forall u \in E, d(u) = w$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1}$.
   4.a. Montrer que $d \in \mathscr{L}(E)$ et déterminer la matrice de d dans B.
   4.b. Calculer d^k tel que $k \in \mathbb{N}$. En déduire que d est un automorphisme de E et exprimer d^{-1} en fonction de d.
   4.c. Déterminer $D = Ker(d - Id_E)$.
   4.d. Soit $F = vect(\varepsilon_3 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$. Montrer que $F \oplus D = E$
   4.e. Montrer que F est stable par d.
   4.d. Justifier qu'il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

■**Ex 7** Soit $Q_k = (X + 1)^k(X - 2)^{n-k}$et f l'application définie par : $f(P) = (X - 2)P' - P$

1. Montrer que $B' = (Q_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les matrices de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans B'.
4. Quelle relation y-a-t-il entre ces matrices ?
5. Décrire Ker f et Imf.

Ex 8 Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$ *et* f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$canoniquement associé à A.

1. Déterminer $Kerf\ ,Imf\ et\ rgf$.
2. Montrer que $Ker(f^2)\ et\ Ker(f-id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que A est semblable à $T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ i.e.qu' il existe P inversible telle que $A=P^{-1}TP$.
4. En déduire les puissances de A.

Ex 9 Soit E un K-e_v de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que : $f^2\neq 0\ et\ f^3=0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. **Application :** Montrer que $\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ sont semblables.

a. Si une telle base $B=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ telle que $mat_B f$= $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$existe alors $\vec{b}=f(\vec{a})\neq\vec{0}\ et\ \vec{c}=f(\vec{b})=f^2(\vec{a})\neq\vec{0}$.

$f^2\neq O$ donc il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que $f^2(\vec{x})\neq\vec{0}$. Et par suite, $\forall k\in[\![0,2]\!], f^k(\vec{x})\neq\vec{0}$.
Montrons $B=(\vec{x},f(\vec{x}),f^2(\vec{x}))$ est une base de E.
$\forall k\in\mathbb{N}, f^k$est un endomorphisme de E (car composée d'endomorphismes de E) donc $f^k(x)\in E$. Ainsi, B est une famille de vecteur de E. De plus, $cardB=3=dimE$. Donc il reste à prouver la liberté de B pour prouver que B est une base de E.
Soit $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ des scalaires tels que $\lambda_0\vec{x}+\lambda_1 u(\vec{x})+\lambda_2 u^2(\vec{x})=\vec{O}$. « Appliquons » u:
Alors $f(\lambda_0\vec{x}+\lambda_1 u(\vec{x})+\lambda_2 u^2(\vec{x}))=u(\vec{O})$. Et comme u est linéaire, cette dernière égalité s'écrit :
$\lambda_0 f(\vec{x})+\lambda_1 f^2(\vec{x})+\lambda_2 f^3(\vec{x})=\vec{O}$. Or $f^3(\vec{x})=\vec{O}$. Donc, nous obtenons:
$\lambda_0 f(\vec{x})+\lambda_1 f^2(\vec{x})=\vec{O}$. « Appliquons » à nouveau u, *nous obtenons* $\lambda_0 f^2(\vec{x})=\vec{O}$. Donc, nous obtenons :
. Comme $f^2(\vec{x})\neq 0$, $\lambda f^2(\vec{x})=\vec{0}\Longrightarrow\lambda=0$. Donc la remontée du système donne $\lambda_0=0$ puis $\lambda_1=0$ et enfin $\lambda_2=0$.
J'en conclus que B est libre et finalement B est une base de E.

$$mat_B f=\begin{array}{c c}\begin{matrix}f(\vec{x}) & f^2(\vec{x}) & f^3(\vec{x})\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}\vec{0}&\vec{0}&\vec{0}\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{matrix}\vec{x}\\f(\vec{x})\\f^2(\vec{x})\end{matrix}\end{array}$$

. Donc $\vec{a}=\vec{x},\vec{b}=f(\vec{x}),\vec{c}=f^2(\vec{x})$ conviennent.

b. Soit $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}=2I+N$ et $A'=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}=2I+N'$ où $N'=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$.
Considérons les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à $A'et\ N'$. Alors $u=2id+v$.
On note B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$mat_{B_c}v^3=N'^3=(O)$ mais $mat_{B_c}v^2=N'^2\neq(O)$. Donc $v^2\neq 0$ et $v^3=0$. Alors d'après ce qui précède , il existe une base B de $\mathbb{R}^3$telle que $mat_B v$=N. Alors la formule de changement de bases pour les endomorphismes assure qu'il existe uen matrice P inversible telle que : $N=P^{-1}N'P$.
Alors, $A=2I+N=2I+P^{-1}N'P=2P^{-1}IP+P^{-1}N'P=P^{-1}2IP+P^{-1}N'P=P^{-1}(2I+N')P=P^{-1}(A')P$.
Donc A et A' sont semblables.

Ex 10 Monter que les matrices $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&6\end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 11 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$ fixé et $\varphi:(P\mapsto(X-a)(P'(X)-P'(a))-2(P(X)-P(a)))$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique de E puis sa matrice dans la base de Taylor $B=(1,(X-a),(X-a)^2,..,(X-a)^n)$.
2. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?
3. Déterminer le noyau et l'image de φ et le rang de φ .

Ex 12 Soit $\Phi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]\ )\ tel\ que\ \forall k\in\{0,..,n\},\Phi(X^k)=X^{n-k}$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. et $f:(P\mapsto P')$.

1. Montrer que Φ est une involution. Décrire ses éléments caractéristiques.
2. En déduire que Φ est bijective et décrire Φ^{-1}.
3. Posons $g=\Phi\circ f\circ\Phi$. Déterminer la matrice A de g dans B
4. Posons $h=g+f$.Montrer que :$\forall P\in E, h(P)=nXP-(X^2-1)P'$
5. Justifier que $C=((X-1)^k(X+1)^{n-k})_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$et déterminer la matrice de h dans cette base.

1.$\forall k\in\{0,..,n\},\Phi(X^k)=X^{n-k}\ \ donc\ \Phi\left(\Phi(X^k)\right)=\Phi(X^{n-k})=X^{n-(n-k)}=X^k=id_{\mathbb{R}_n[X]}(X^k)$.
Comme $\Phi\circ\Phi\ et\ id_{\mathbb{R}_n[X]}$sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, qui associent la même image à chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (leurs matrices dans cette base sont donc égales), j'en conclus que $\Phi\circ\Phi=id_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Donc Φ est une involution. Φ est la symétrie par rapport à $Ker(\Phi-id_{\mathbb{R}_n[X]})$ et parallèlement à $Ker(\Phi+id_{\mathbb{R}_n[X]})$.
Soit $P=\sum_{k=0}^n a_k X^k$.
$P\in Ker(\Phi-id_{\mathbb{R}_n[X]})\Leftrightarrow\Phi(P)=P\Leftrightarrow\sum_{k=0}^n a_k\Phi(X^k)=\sum_{k=0}^n a_k X^k\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}=\sum_{k=0}^n a_k X^k\Leftrightarrow\sum_{k=0}^n a_{n-k}X^k=\sum_{k=0}^n a_k X^k\Leftrightarrow\sum_{k=0}^n(a_{n-k}-a_k)X^k=0\Leftrightarrow\forall\text{k}, a_{n-k}=a_k$.

$Donc, Ker(\Phi - id_{\mathbb{R}_n[X]}) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ / \forall k, a_{n-k} = a_k\}$

$P \in Ker(\Phi + id_{\mathbb{R}_n[X]}) \Leftrightarrow \Phi(P) + P = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi(X^k) + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} + a_k) X^k = 0 \Leftrightarrow \forall k, a_{n-k} = -a_k$.

$Donc, Ker(\Phi + id_{\mathbb{R}_n[X]}) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ / \forall k, a_{n-k} = -a_k\}$

2. Comme $\Phi \circ \Phi = id_{\mathbb{R}_n[X]}$, Φ est bijective et $\Phi^{-1} = \Phi$.

3. $\forall k \in \{0, .., n-1\}$, $g(X^k) = \Phi \circ f \circ \Phi(X^k) = \Phi(f(\Phi(X^k))) = \Phi\left(f(X^{n-k})\right) \overset{car\ k<n}{\triangleq} \Phi\left((n-k)X^{n-k-1}\right)$

$= (n-k)\Phi(X^{n-k-1}) = (n-k)X^{n-(n-k-1)} = (n-k)X^{k+1}$.

$Et \ \ g(X^n) = \Phi(f(\Phi(X^n))) = \Phi(f(1)) = \Phi(0) = 0.$

$$Donc, mat_B g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $h = g + f$ est un endomorphisme de E car g et f en sont.

<u>$Posons\ u(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$</u> .

Alors u est linéaire (à vérifier facilement) . De plus, si $P = aX^n + T(X)\ tq\ degT \leq n-1$ alors

$u(P) = au(X^n) + u(T) = nX^{n+1} - (X^2-1)nX^{n-1} + nXT - (X^2-1)T' = \underbrace{nX^{n-1}}_{ceg\leq n-1} + \underbrace{nXT}_{deg\leq n} - \underbrace{(X^2-1)T'}_{deg\leq n}$.

Donc $u(P) \in E$. Ainsi, u est un endomorphisme de E.

Montrons que :$\forall k \in [\![0, n]\!], h(X^k) = u(X^k)$.

$Soit\ k \in [\![1, n-1]\!]. h(X^k) = g(X^k) + f(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$

$et\ u(X^k) = nX.X^k - (X^2-1)kX^{k-1} = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!], h(X^k) = u(X^k)$.

Comme u et h sont des endomorphismes de E associant la même image à chaque vecteur d'une base de E, ils ont la même matrice dans cette base et je peux conclure que $u = h$.

7. $C = ((X-1)^k(X+1)^{n-k})_{k=0..n}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$.

Il suffit donc de montrer que C est libre pour conclure que C est une base de E.

Soit $\lambda_0, .., \lambda_n des\ scalaires\ tels\ que:\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-1)^k(X+1)^{n-k} = 0$.

En évaluant en 1, j'obtiens $\lambda_n 2^n = 0$ donc $\lambda_n = 0$. Alors (**) s'écrit : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (X-1)^k(X+1)^{n-k} = 0$.

Donc $(X-1)[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (X-1)^k(X+1)^{n-k-1}] = 0$.

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre et $X-1 \neq 0$, nécessairement $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (X-1)^k(X+1)^{n-k-1} = 0$. J'évalue à nouveau en 1…J'itère ce précédé et je prouve ainsi que $\lambda_1, .., \lambda_n$sont tous nuls et à la dernière étape (**) s'écrit : $\lambda_0(X+1)^n = 0$. Comme $(X+1)^n \neq 0$, nécessairement, $\lambda_0 = 0$. Je peux conclure que C est libre et ainsi, C est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Posons $Q_k = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$

$h((X-1)^k(X+1)^{n-k}) = nX[(X-1)^k(X+1)^{n-k}] - (X^2-1)[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}]$

$= nX[(X-1)^k(X+1)^{n-k}] - (X-1)(X+1)[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}]$

$= nX[(X-1)^k(X+1)^{n-k}] - [k(X-1)^k(X+1)^{n-k+1} + (n-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-k}]$

$= (X-1)^k(X+1)^{n-k}[nX - k(X+1) - (n-k)(X-1)]$

$= (X-1)^k(X+1)^{n-k}[(n-2k)] = (n-2k)Q_k$.

Donc $si\ n$ est pair alors $mat_C h = diag(n, n-2, n-4, \ldots, 2, 0, -2, \ldots, 2-n, -n)$

Et $si\ n$ est impair alors $mat_C h = diag(n, n-2, n-4, \ldots, 1, -1, \ldots, 2-n, -n)$

9. et déterminer la matrice de h dans cette base.

■Ex 13 Soit u: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z) \end{pmatrix}$ B

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que : $Ker(u - \lambda id)$ contient un vecteur non nul <u>**si et ssi**</u> $\lambda \in \{0,3\}$.
3. Justifier que $Ker(u)\ et\ Ker(u - 3id)$ sont supplémentaires dans E.
4. En déduire que $u\ est$ la composée de deux endomorphismes simples.

Ex 14 Soit $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base d'un K-e-v E et $D = \{4\alpha\vec{\jmath} + \alpha\vec{k} / \alpha \in \mathbb{R}\}\ et\ P = \{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} / a + b + c = 0\}$.

Soit p la projection sur D et parallèlement à P et s la symétrie par rapport à P et parallèlement à D.

1. Ecrire la matrice de p dans une base bien choisie de telle sorte que cette matrice soit diagonale.
2. Puis écrire la matrice de p dans B puis celle de s dans cette même base.

1. $D = \{4\alpha\vec{\jmath} + \alpha\vec{k} / \alpha \in \mathbb{R}\} = vect(4\vec{\jmath} + \vec{k})$

et $P = \{(-b-c)\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} / b, c\ réels\} = \{b(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + c(-\vec{\imath} + \vec{k}) / b, c\ réels\} = vect((-\vec{\imath} + \vec{\jmath}), (-\vec{\imath} + \vec{k}))$.

Soit $H = mat_B(4\vec{\jmath} + \vec{k}, -\vec{\imath} + \vec{\jmath}, -\vec{\imath} + \vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\underbrace{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ donc H est inversible . Posons $u = 4\vec{\jmath} + \vec{k}, v = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}\ et\ w = -\vec{\imath} + \vec{k}. Alors, B' = (u, v, w)$ est une base de E. Donc par concaténation de bases, je peux conclure que $D \oplus P = E$.

2. Alors p la projection sur D et parallèlement à P et s la symétrie par rapport à P et parallèlement à D existent. Et,

$\forall y = \underbrace{d}_{\in D} + \underbrace{x}_{\in P} \in E \ \ ,\ \ p(y) = d \quad et \quad s(y) = x - d = y - 2p(y).$

Et, $\forall d \in D, p(d) = d$ et $\forall x \in P, p(x) = 0$. Donc, $p(u) = u$ et $p(v) = p(w) = 0$. Ainsi, $mat_{B'}p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $s = id - 2p$. Donc, $mat_{B'}s = mat_{B'}id - 2mat_{B'}p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(on peut aussi utiliser $\forall d \in D, s(d) = -d$ et $\forall x \in P, s(x) = x$ donc $s(u) = -u, s(v) = v, s(w) = w$ et on retrouve la matrice de s dans B').

$\vec{\imath} = \frac{1}{5}\left[\left(4\vec{\jmath} + \vec{k}\right) - 4(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) - \left(-\vec{\imath} + \vec{k}\right)\right] = \frac{1}{5}u - \frac{4}{5}v - \frac{1}{5}w$. Donc, $p(\vec{\imath}) = \frac{1}{5}u = \frac{4}{5}\vec{\jmath} + \frac{1}{5}\vec{k}$ et $s(\vec{\imath}) = -\frac{4}{5}v - \frac{1}{5}w - \frac{1}{5}u = \frac{1}{5}\left(5\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$.

$\vec{\jmath} = \frac{1}{5}\left[\left(4\vec{\jmath} + \vec{k}\right) + (-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) - \left(-\vec{\imath} + \vec{k}\right)\right] = \frac{1}{5}u + \frac{1}{5}v - \frac{1}{5}w$. Donc, $p(\vec{\jmath}) = \frac{1}{5}u = \frac{4}{5}\vec{\jmath} + \frac{1}{5}\vec{k}$ et $s(\vec{\jmath}) = \frac{1}{5}v - \frac{1}{5}w - \frac{1}{5}u = \frac{1}{5}\left(-3\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$

$\vec{k} = \frac{1}{5}\left[\left(4\vec{\jmath} + \vec{k}\right) - 4(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + 4\left(-\vec{\imath} + \vec{k}\right)\right] = \frac{1}{5}u - \frac{4}{5}v + \frac{4}{5}w$. Donc, $p\left(\vec{k}\right) = \frac{1}{5}u = \frac{4}{5}\vec{\jmath} + \frac{1}{5}\vec{k}$ et $s(k) = \frac{-4}{5}v + \frac{4}{5}w - \frac{1}{5}u = \frac{1}{5}\left(-8\vec{\jmath} - \vec{k}\right)$

$Ainsi, mat_B p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $mat_B s = I_3 - 2mat_B p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{5} & \frac{-3}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

Ex 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 2 & & \vdots \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & 2 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n .Calculer A^n.

Ex 16 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| < \frac{1}{n}$.
Démontrer par l'absurde que la matrice $I_n + A$ est inversible. (on pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A)

■**Ex 17** $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X + 1)$.

1. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et sa matrice inverse.
3. Soit $a_0, .., a_n, b_0, .., b_n$ des réels tels que : $b_p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a_j$. Exprimer $a_0, .., a_n$en fonction de $b_0, .., b_n$.

Ex 18 Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & a\binom{1}{0} & a^2\binom{2}{0} & \cdots & a^n\binom{n}{0} \\ 0 & -\binom{1}{1} & -a\binom{2}{1} & \cdots & -a^{n-1}\binom{n}{1} \\ & 0 & \binom{2}{2} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & (-1)^n\binom{n}{n} \end{pmatrix}$. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Ex 19 Soit E de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq O$ et $u^n = O$ i.e. u est nilpotent d'indice n.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que : $B = (\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$ base de E.
b. Ecrire les matrices de $u, u^2, .., u^{n-1}$ dans la base B.
c. En déduire que $\{g \in L(E) / u \circ g = g \circ u\} = vect(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

c. $u^{n-1} \neq O$ donc il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que $u^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Et par suite, $\forall k \in [\![0, n-1]\!], u^k(\vec{x}) \neq \vec{0}$.

Montrons $B = (\vec{x}, u(\vec{x}), u^2(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$ est une base de E.
$\forall k \in \mathbb{N}, u^k$est un endomorphisme de E (car composée d'endomorphismes de E) donc $u^k(x) \in E$. Ainsi, B est une famille de vecteur de E. De plus, $cardB = n = dimE$. Donc il reste à prouver la liberté de B pour prouver que B est une base de E.
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 u(\vec{x}) + \lambda_2 u^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}) = \vec{O}$. « Appliquons » u:
Alors $u(\lambda_0\vec{x} + \lambda_1 u(\vec{x}) + \lambda_2 u^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(\vec{x})) = u(\vec{O})$. Et comme u est linéaire, cette dernière égalité s'écrit :
$\lambda_0 u(\vec{x}) + \lambda_1 u^2(\vec{x}) + \lambda_2 u^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1}u^n(\vec{x}) = \vec{O}$. Or $u^n = O$ donc $u^n(\vec{x}) = \vec{O}$. Donc, nous obtenons:
$\lambda_0 u(\vec{x}) + \lambda_1 u^2(\vec{x}) + \lambda_2 u^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2}u^{n-1}(\vec{x}) = \vec{O}$. « Appliquons » à nouveau u:
$u(\lambda_0 u(\vec{x}) + \lambda_1 u^2(\vec{x}) + \lambda_2 u^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2}u^{n-1}(\vec{x})) = u(\vec{O})$ et par linéarité de u , cela donne :
$\lambda_0 u^2(\vec{x}) + \lambda_1 u^3(\vec{x}) + \lambda_2 u^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2}\underbrace{u^n(\vec{x})}_{=\vec{O}} = \vec{O}$. Donc, nous obtenons :
$\lambda_0 u^2(\vec{x}) + \lambda_1 u^3(\vec{x}) + \lambda_2 u^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3}u^{n-1}(\vec{x}) = \vec{O}$. On itère ce procédé. Après n itérations, nous obtenons le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} \lambda_0\vec{x} + \lambda_1 u(\vec{x}) + \lambda_2 u^2(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-1}\underbrace{u^{n-1}(\vec{x})}_{\neq\vec{0}} = \vec{O} \\ \lambda_0 u(\vec{x}) + \lambda_1 u^2(\vec{x}) + \lambda_2 u^3(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-2}\underbrace{u^{n-1}(\vec{x})}_{\neq\vec{0}} = \vec{O} \\ \lambda_0 u^2(\vec{x}) + \lambda_1 u^3(\vec{x}) + \lambda_2 u^4(\vec{x}) + \cdots + \lambda_{n-3}\underbrace{u^{n-1}(\vec{x})}_{\neq\vec{0}} = \vec{O} \\ \vdots \\ \lambda_0 u^{n-2}(\vec{x}) + \lambda_1\underbrace{u^{n-1}(\vec{x})}_{\neq\vec{0}} = 0 \\ \lambda_0\underbrace{u^{n-1}(\vec{x})}_{\neq\vec{0}} = 0 \end{cases}$$

. Or, Comme $u^{n-1}(\vec{x}) \neq 0$, $\lambda u^{n-1}(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow \lambda = 0$. Donc la remontée du système donne $\lambda_0 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$, puis .... et enfin $\lambda_n = 0$.
J'en conclus que B est libre et finalement B est une base de E.

d. Ecrire les matrices de $u, u^2, .., u^{n-1}$ dans la base B.

$$mat_B u = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(\vec{x}) & u(u(\vec{x})) & u(u^2(\vec{x})) & & u(u^{n-2}(\vec{x})) & u(u^{n-1}(\vec{x})) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ & & \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x} \\ u(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \\ u^{n-1}(\vec{x}) \end{array} \quad \text{car } u(u^k(\vec{x})) = u^{k+1}(\vec{x})$$

p zéros

$$mat_B u^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u^2(\vec{x}) & u^3(\vec{x}) & u^4(\vec{x}) & & u^n(\vec{x}) & u^n(\vec{x}) & u^{n+1}(\vec{x}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 1 & \ddots & 0 & & 0 \\ & & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x} \\ u(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \\ u^{n-1}(\vec{x}) \end{array} \quad \text{car } u(u^k(\vec{x})) = u^{k+1}(\vec{x})$$

$$mat_B u^p = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u^{p+1}(\vec{x}) & u^3(\vec{x}) & & u^{n-1}(\vec{x}) & u^n(\vec{x}) & & u^{n+P}(\vec{x}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \vec{0} & \cdots & \vec{0} & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \\ & & & 0 & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x} \\ u(\vec{x}) \\ u^2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \\ u^{n-1}(\vec{x}) \end{array} \quad \text{car } u^p(u^k(\vec{x})) = u^{p+k}(\vec{x})$$

d. Montrons que $\underbrace{\{g \in \mathscr{L}(E) / u \circ g = g \circ u\}}_{=G} = \underbrace{vect(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})}_{=H}$ *par* double inclusion.

- Tout d'abord, $H = vect(Id, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$.Montrons que G en est un aussi.

$G \subset \mathscr{L}(E)$ par définition de G.

L'endomorphisme nul, noté w, commute avec u (car $u \circ w = w \circ u = w$) donc w est élément de G.

Enfin, soit $(g, h) \in H^2$ et $(a, b) \in K^2$.

Alors $u \circ (ag + bh) \underbrace{=}_{car\ u\ est\ linéaire} au \circ g + bu \circ h \underbrace{=}_{\substack{car\ g \in G \\ et\ h \in G}} ag \circ u + bh \circ u = (ag + bh) \circ u$. Donc $ag + bh \in G$.

Ainsi, G est un ss-e-v de $\mathscr{L}(E)$.

- Soit $p \in [\![0, n-1]\!]. u \circ u^p = u^{p+1} = u^p \circ u$. Donc, $u^p \in G$. Comme G est stable par combinaison linéaire, $H \subset G$.
- Soit $g \in G$. Donc u et g commuent et par conséquent, $\forall k, u^k$ *et* g commutent.

$g(\underbrace{\vec{x}}_{\substack{le\ vecteur \\ \vec{x}\ de\ la \\ question1}}) \in E$ et B base de E. Donc il existe $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{n-1}$des scalaires tels que

$g(\vec{x}) = \alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 u(\vec{x}) + .. + \alpha_{n-1} u^{n-1}(\vec{x})$.

Alors $g(u(\vec{x})) \underbrace{=}_{car\ g \in G} u(g(\vec{x})) = \alpha_0 u(\vec{x}) + \alpha_1 u^{2(\vec{x})} + .. + \alpha_{n-1} u^n(\vec{x}) = \alpha_0 u(\vec{x}) + \alpha_1 u^2(\vec{x}) + .. + \alpha_{n-2} u^{n-1}(\vec{x})$.

$g(u^2(\vec{x})) \underbrace{=}_{car\ g \in G} u^2(g(\vec{x})) = \alpha_0 u^2(\vec{x}) + \alpha_1 u^3(\vec{x}) + .. + \alpha_{n-2} u^n(\vec{x}) = \alpha_0 u^2(\vec{x}) + \alpha_1 u^3(\vec{x}) + .. + \alpha_{n-3} u^{n-1}(\vec{x})$.

$g(u^3(\vec{x})) \underbrace{=}_{car\ g \in G} u^3(g(\vec{x})) = \alpha_0 u(\vec{x}) + \alpha_1 u^{2(\vec{x})} + .. + \alpha_{n-1} u^n(\vec{x}) = \alpha_0 u(\vec{x}) + \alpha_1 u^2(\vec{x}) + .. + \alpha_{n-2} u^{n-1}(\vec{x})$.

(…).

$g(u^{n-1}(\vec{x})) \underbrace{=}_{car\ g \in G} u^{n-1}(g(\vec{x})) = \alpha_0 u^{n-1}(\vec{x})$.

$$Ainsi, mat_B g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g(\vec{x}) & g(u(\vec{x})) & & & g(u^{n-1}(\vec{x})) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & & \\ \vdots & \alpha_1 & \alpha_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{x} \\ u(\vec{x}) \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n-1}(\vec{x}) \end{array} = \alpha_0 mat_B id + \alpha_1 mat_B u + \alpha_2 mat_B u^2 + .. + \alpha_{n-1} mat_B u^{n-1}$$

$mat_B g = mat_B(\alpha_0 id + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + .. + \alpha_{n-1} u^{n-1})$. J'en déduis que $g = \alpha_0 id + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + .. + \alpha_{n-1} u^{n-1}$et ainsi, $g \in H$.

Nous pouvons conclure que $G \subset H$ et finalement $G = H$.

Ex 20 soit E un K-e-v de dimension 3.

1. Soit u un endomorphisme de E et soient i *et* j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $Ker\ (u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j\ (x)$.

a. Montrer que $Im(w) \subset Ker\ (u^i)$.

b. En déduire que $dim(Ker\ u^{i+j}) \leq dim(Ker\ (u^i)\ ) + dim(Ker\ (u^j)\ )$

2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ *et* $rg(u) = 2$

a. Montrer que $dim(Ker\, u^2) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice $U\ de\ u$ et la matrice $V\ de\ u^2 - u$ dans cette base.

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0\ et\ rg(u) = 1$
a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$
b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker\ (u\ )$tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille $(\ b, u(b)\ , c)$ est une base de E.
c. Ecrire la matrice $U'\ de\ u$ et la matrice $V'\ de\ u^2 - u$ dans cette base.

Ex 21 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ E = \mathbb{R}_n[X]\ et\ f$ définie sur E par $f(P) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.

On note $f^0 = id_E\ et\ \forall m \in \mathbb{N}^*, f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m\ fois.}$. On note B=$(1, X, X^2, .., X^n)$ la base canonique de E.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E .

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\deg\left(f(X^k)\right)$et $codom\left(f(X^k)\right)$.La matrice M de $f$dans B est -elle triangulaire ? diagonale? Préciser sa diagonale.

3. Démontrer que f est un automorphisme de E .

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $Ker(f - \lambda id) \neq \{O\}$ <u>si et ssi</u> $\lambda \in \{\frac{1}{2^k} / k \in [\![0, n]\!]\}$.

5. Soit $k \in [\![0, n]\!]\ et\ Q_k$ un polynôme non nul de $Ker\left(f - \frac{1}{2^k} id\right)$,c'est-à-dire : $Q_k \neq 0\ et\ f(Q_k\ ) = \frac{1}{2^k} Q_k$.
a. Démontrer que : $\deg(Q_k) = k$.
b. Démontrer que $si\ k \neq 0$ alors $\int_0^1 \widetilde{Q_k}(t)dt = 0$.

6. Montrer que la famille $B' = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E. Désormais on prendra $Q_0(X) = 1$.

7. Ecrire la matrice D de f dans cette base B'. Quelle relation y-a-t-il entre $D\ et\ M$?

8. Soit $P \in E$, de composantes $(a_0, a_1, .., a_n)$ dans B'.
a. Soit $m \in \mathbb{N}$. Décrire matriciellement f^met exprimer $f^m(P)$ en fonction de $a_0, a_1, .., a_n, Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.
b. En déduire que : $\lim\limits_{m\to+\infty} \widetilde{f^m(P)}\ (1) = a_0 = \int_0^1 \tilde{P}(t)dt$ (n étant fixé).

9. Soit $P \in E$. Démontrer par récurrence sur m que : $\forall m \in \mathbb{N}, f^m(P) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1} P\left(\frac{X+k}{2^m}\right)$.

10. Redémontrer alors grâce au cours d'intégration que $\lim\limits_{m\to+\infty} \widetilde{f^m(P)}\ (1) = \int_0^1 \tilde{P}(t)dt.$