DS 4 de mathématique

Le sujet propose trois exercices dont la durée totale devrait excéder la durée dévolue à l'épreuve.
Chacun choisira de traiter les exercices les plus à même de valoriser ses compétences.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre différent.

Exercice 1 : Suites

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\quad u_{n+1} = 2u_n - 3$
et la donnée de u_0 qui vaut 7.

1. Monotonie

- **a.** Montrer par récurrence que la suite u est minorée par 3.
- **b.** En déduire que la suite u est croissante.
- **c.** Peut-on en conclure que la suite u admet une limite ? est convergente ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad u_n = 2^{n+2} + 3$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = u_n \times \mathrm{e}^{-n}$.

- **a.** Étudier la convergence de la suite v.
- **b.** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad \dfrac{2^{n+3}+3}{2^{n+2}+3} < 2$.
- **c.** En déduire que la suite v est décroissante.

5. On considère la partie de $\mathbb{R}$: $\quad A = \{v_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
Cet ensemble est il majoré ? minoré ? borné ?
Possède-t-il une borne supérieure ? une borne inférieure ? un plus grand élément ? un plus petit élément ? *(on précisera chacun de ces nombres quand ils existent)*

Exercice 2 : Applications

1. On considère l'application : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

Montrer que f est bijective.

2. On considère l'application : $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, xy) \end{array}$.

a. Déterminer l'ensemble des antécédents du couple $(4,-2)$.

b. Justifier qu'un couple de réels (a,b) a pour antécédent par g le couple (x,y) à condition que x vérifie l'équation :

$$2x^2 - ax - b = 0$$

c. En déduire, selon les cas, le nombre d'antécédents d'un couple (a,b) par g.

d. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ?

3. On considère l'application $h = f \circ g$.

a. Déterminer l'image d'un couple de réels (x,y) par l'application h.

b. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ?

4. Déterminer l'image d'un couple de réels (x,y) par l'application $g \circ f$.

Exercice 3 : Équations différentielles et primitives

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

2. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 9t$. *(on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un trinôme, et procéder par identification des coefficients)*

3. Déterminer la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - \sin(2x)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

4. Déterminer les solutions définies sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{x+2}y = \mathrm{e}^{x^2+4x}.$$

5. Soit une fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 10}$.

Après avoir établi l'ensemble de définition de f et justifié qu'elle est primitivable sur cet ensemble, déterminer sa primitive F qui vérifie $F(-2) = 0$.

6. $\star$ *question d'approfondissement*

Soit une fonction g définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

Après avoir établi l'ensemble de définition de g et justifié qu'elle est primitivable sur cet ensemble, déterminer sa primitive G qui vérifie $G(1) = 0$.

$\sim$