DS 4 de mathématique

Proposition de corrigé *(avec commentaires)*

Exercice 1 : Suites

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et la donnée de u_0 qui vaut 7.

1. Monotonie

a. Montrer par récurrence que la suite u est minorée par 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $u_n \geqslant 3$.
On a $u_0 = 7 \geqslant 3$, donc $P(0)$ est vraie.
Soit n tel que $u_n \geqslant 3$ alors $2u_n \geqslant 6$ et donc $u_{n+1} = 2u_n - 3 \geqslant 3$.
La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.
On en conclut par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que la suite u est minorée par 3.

b. En déduire que la suite u est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n - 3.$$

Or, d'après la question précédente, on sait que $u_n \geqslant 3$. On en conclut : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
La suite u est donc bien croissante.

c. Peut-on en conclure que la suite u admet une limite ? est convergente ?

La suite u étant monotone, elle admet une limite, d'après le théorème de la limite monotone.
Si cette limite est infinie, elle ne converge pas, donc on ne peut pas en conclure que la suite u est convergente.

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 2^{n+2} + 3$.

On a : $2^{0+2} + 3 = 7 = u_0$, donc la formule est valable pour $n = 0$.
Soit n un entier naturel tel que la formule soit valable.
Alors on a :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2\left(2^{n+2} + 3\right) - 3 = 2^{(n+1)+2} + 3.$$

La formule est donc aussi valable au rang $n + 1$.
On en conclut par récurrence que la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

La suite $\left(2^{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme strictement positif, donc elle diverge vers $+\infty$. On conclut par somme :

$$u_n \to +\infty.$$

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = u_n \times \mathrm{e}^{-n}$.

a. Étudier la convergence de la suite v.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_n = (2^{n+2}+3)\times \mathrm{e}^{-n} = 4\times 2^n \times \mathrm{e}^{-n} + \frac{3}{\mathrm{e}^n} = 4\mathrm{e}^{n\ln(2)}\mathrm{e}^{-n} + \frac{3}{\mathrm{e}^n} = 4\mathrm{e}^{n(\ln(2)-1)} + \frac{3}{\mathrm{e}^n}.$$

Or $\ln(2)-1<0$ donc, par produit : $n(\ln(2)-1) \to -\infty$.
D'où par composition, produit et somme :

$$v_n \to 0.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\dfrac{2^{n+3}+3}{2^{n+2}+3} < 2$.

Soit n un entier naturel. On a les équivalences :

$$\frac{2^{n+3}+3}{2^{n+2}+3} < 2 \iff 2^{n+3}+3 < 2(2^{n+2}+3) \iff 3<6$$

On en déduit que l'inégalité initiale est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. En déduire que la suite v est décroissante.

La suite v est à termes strictement positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)}(2^{n+3}+3)}{\mathrm{e}^{-n}(2^{n+2}+3)} = \frac{1}{\mathrm{e}}\times\frac{2^{n+3}+3}{2^{n+2}+3}$$

On en déduit, d'après la question précédente : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1.$

La suite v est donc *(strictement)* décroissante.

5. On considère la partie de $\mathbb{R}$: $A = \{v_n,\, n\in\mathbb{N}\}$.
Cet ensemble est il majoré ? minoré ? borné ?
Possède-t-il une borne supérieure ? une borne inférieure ? un plus grand élément ? un plus petit élément ? *(on précisera chacun de ces nombres quand ils existent)*
La suite v est décroissante et minorée par 0, donc convergente.
On en conclut qu'elle est bornée, et par voie de conséquence, majorée et minorée.
L'ensemble A est donc majoré, minoré et borné.
Il possède donc une borne supérieure $\sup(A)$ et une borne inférieure $\inf(A)$.
La suite v est décroissante, donc son terme $v_0 = u_0\times \mathrm{e}^0 = 7$ est son plus grand terme en même temps que sa borne supérieure :

$$\boxed{\max(A) = \sup(A) = 7}.$$

La suite v est décroissante et de limite 0, donc : $\boxed{\inf(A)=0}$.
Cependant la suite v est à termes strictement positifs donc $0\notin A$.
L'ensemble A ne possède pas de plus petit élément.

Exercice 2 : Applications

1. On considère l'application : $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

Montrer que f est bijective.

Les antécédents par l'application f d'un couple (a,b) sont les couples (x,y) solution du système :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=a+b \\ 2y=a-b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

On en conclut :

$$(x,y) \in g^{-1}(a,b) \iff (x,y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Tout élément (a,b) de l'ensemble d'arrivée de f possède donc un unique antécédent. L'application f est donc bijective.

2. On considère l'application : $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (2x-y, xy) \end{array}$.

a. Déterminer l'ensemble des antécédents par g du couple $(4,-2)$.

Les antécédents par l'application g du couple $(4,-2)$ sont les couples solution du système :

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ xy=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-4 \\ x(2x-4)=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=2x-4 \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ainsi : $g^{-1}(4,-2) = \{(1,-2)\}$.

b. Justifier qu'un couple de réels (a,b) a pour antécédent par g le couple (x,y) à condition que x vérifie l'équation :

$$2x^2 - ax - b = 0.$$

Les antécédents par l'application g d'un couple (a,b) sont les couples (x,y) solution du système :

$$\begin{cases} 2x-y=a \\ xy=b \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-a \\ x(2x-a)=b \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-a \\ 2x^2-ax-b=0 \end{cases}$$

On en conclut :

$$(x,y) \in g^{-1}(a,b) \implies 2x^2-ax-b=0$$

c. En déduire, selon les cas, le nombre d'antécédents d'un couple (a, b) par g.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La question précédente a établi que le couple (x, y) est un antécédent de (a, b) par f si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - a \\ 2x^2 - ax - b = 0 \end{cases}$$

La première équation implique que pour chaque valeur de x vérifiant la seconde équation, il existe une unique valeur de y pour compléter le couple antécédent de (a, b).
Le trinôme en x admet pour discriminant : $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 2 \times (-b) = a^2 + 8b$.
Ainsi

- tout couple (a, b) tel que $a^2 + 8b < 0$ n'a pas d'antécédent
- tout couple (a, b) tel que $a^2 + 8b = 0$ a un unique antécédent
  *(c'est le cas du couple $(4, -2)$ de la question **2.a**)*
- tout couple (a, b) tel que $a^2 + 8b > 0$ a exactement deux antécédents
  (en particulier $b > 0$ est une condition suffisante)

d. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ?
La question précédente nous permet d'affirmer ce qui suit.
L'application g n'est pas surjective car des éléments de l'ensemble d'arrivée n'ont pas d'antécédent. *(par exemple $(0, -1)$)*
L'application g n'est pas injective car des éléments de l'ensemble d'arrivée ont deux antécédents. *(par exemple $(1, 0)$)*
Deux raisons dont chaque est suffisante seule pour affirmer que g n'est pas bijective.

3. On considère l'application $h = f \circ g$.

a. Déterminer l'image d'un couple de réels (x, y) par l'application h.
On a :

$$(f \circ g)(x, y) = f\left(g(x, y)\right) = f(2x - y, xy) = (2x - y + xy, 2x - y - xy)$$

b. L'application h est-elle injective, surjective, bijective ?

$$(x, y) \xmapsto{g} g(x, y) \xmapsto{f} h(x, y)$$

Il a été établi qu'il y a des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui n'ont pas d'antécédent par g. Les images de ces éléments par la bijection f n'ont donc pas d'antécédent par $h = f \circ g$.
<u>L'application h n'est donc pas surjective.</u>
Inversement, on sait qu'il y a des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ont deux antécédents distincts par g. L'image de ces éléments par la bijection f ont donc deux antécédents distincts par l'application $h = f \circ g$.
<u>L'application h n'est donc pas injective.</u>
<u>L'application h n'est donc pas non plus bijective.</u>

4. Déterminer l'image d'un couple de réels (x, y) par l'application $g \circ f$.
On a :

$$(g \circ f)(x, y) = g\left(f(x, y)\right) = g(x+y, x-y) = (2(x+y)-(x-y), (x+y)(x-y)) = (x+3y, x^2-y^2)$$

Exercice 3 : Équations différentielles et primitives

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$.
On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre.
Son équation caractéristique est :

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2 = 0$$

Elle admet 3 comme racine double.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x}, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles arbitraires.}$$

2. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 9t$.
(on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un trinôme, et procéder par identification des coefficients)
L'équation homogène associée *(également dite « sans second membre »)* a pour équation caractéristique :

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \iff (r+2)^2 - 1 = 0 \iff (r+1)(r+3) = 0.$$

Ses solutions sont -1 et -3.
Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-3t}, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles arbitraires.}$$

Cherchons une solution particulière y_0 sous la forme d'un trinôme.
En remarquant que son coefficient directeur (a) doit être égal à 1 on peut simplifier la suite, mais on va dire qu'on ne l'a pas vu....
Posons alors, pour tout $\mathbb{R}$ par $y_0(t) = at^2 + bt + c$, a, b et c étant des constantes à déterminer.
On a : $y_0'(t) = 2at + b$ et $y_0''(t) = 2a$.
D'où la condition qui doit être vérifiée pour tout réel t :

$$\begin{aligned} & 2a + 4(2at+b) + 3(at^2+bt+c) = 3t^2 + 9t \\ \iff \quad & 3at^2 + (8a+3b)t + 2a + 4b + 3c = 3t^2 + 9t \end{aligned}$$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 8a + 3b = 9 \\ 2a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 3b = 1 \\ 2 + \dfrac{4}{3} + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{3} \\ c = -\dfrac{10}{9} \end{cases}$$

On en déduit : $y_0(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}t - \dfrac{10}{9}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-3t} + t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{10}{9}, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles arbitraires.}$$

3. Déterminer la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - \sin(2x)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

L'équation différentielle est homogène d'ordre 1.
Une primitive de la fonction :

$$x \mapsto -\sin(2x) = -\frac{1}{2}\left(2\sin(2x)\right)$$

est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}(-\cos(2x)) = \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Remarque : Autre idée : sin$(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, donc une primitive de $x \mapsto -\sin(2x)$ est $x \mapsto -\cos^2(x)$.
On vérifie que les deux primitives sont égales à une fonction constante additive près.

Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}, \quad C \text{ étant une constante réelle arbitraire.}$$

La solution g au problème de Cauchy vérifie en outre :

$$g(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1 \iff C = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

La solution cherchée est donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos(2x)} = \mathrm{e}^{\frac{1-\cos(2x)}{2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\cos(2x)}}}$$

4. Déterminer les solutions définies sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{x+2}y = \mathrm{e}^{x^2+4x}.$$

L'équation différentielle est d'ordre 1 avec second membre.
Une primitive de la fonction :

$$a : \begin{array}{ccc}]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+2} \end{array}$$

est :

$$A : \begin{array}{ccc}]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(|x+2|\right) \end{array}$$

Sur $]-\infty, -2[$, $x + 2 < 0$ donc $|x + 2| = -x - 2$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(-x-2)} = \frac{C}{-x-2}, \quad C \text{ étant une constante réelle arbitraire.}$$

On observe que l'on obtient le même ensemble solution avec $f(x) = \dfrac{C}{x+2}$.
On retiendra cette expression plus simple pour la suite.

Remarque : Aucune solution particulière évidente à l'équation initiale n'apparaît. Mettons en oeuvre le procédé de variation de la constante.

Cherchons une solution de la forme $y_0 : \begin{array}{ccc}]-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{C(x)}{x+2} \end{array}$,

C étant une fonction définie et dérivable sur $]-2,+\infty[$.

On a : $y_0'(x) = \dfrac{C'(x)(x+2)-C(x)}{(x+2)^2}$.

La fonction y_0 est solution de l'équation initiale si et seulement si, $\forall x \in]-2,+\infty[$:

$$\frac{C'(x)(x+2)-C(x)}{(x+2)^2} + \frac{C(x)}{(x+2)^2} = \mathrm{e}^{x^2+4x}$$

$$\iff \qquad C'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x^2+4x} = \frac{1}{2}(2x+4)\mathrm{e}^{x^2+4x}$$

La dérivée de la fonction C apparaît comme une forme primitivable du type $u'\mathrm{e}^u$ à une constante multiplicative près. On choisit, entre autres possibilités :

$$C(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+4x}.$$

D'où la solution particulière y_0 définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$y_0(x) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+4x}}{x+2} = \frac{\mathrm{e}^{x^2+4x}}{2(x+2)}$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions f définies sur $]-2,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{C}{x+2} + \frac{\mathrm{e}^{x^2+4x}}{2(x+2)}, \quad C \text{ étant une constante arbitraire.}$$

5. Soit une fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+10}$.

Après avoir établi l'ensemble de définition de f et justifié qu'elle est primitivable sur cet ensemble, déterminer sa primitive F qui vérifie $F(-2) = 0$.

Pour tout réel x on a :

$$x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1 > 0$$

L'ensemble de définition de f est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc primitivable sur $\mathbb{R}$.

En écrivant

$$f(x) = \frac{1}{1+(x+3)^2}$$

on reconnaît la forme primitivable $\dfrac{u'}{1+u^2}$ et on obtient :

$$F(x) = \mathrm{Arctan}(x+3) + C,$$

C étant la constante telle que :

$$F(-2) = 0 \iff \mathrm{Arctan}(1) + C = 0 \iff C = -\mathrm{Arctan}(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

On en conclut : $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arctan}(x+3) - \dfrac{\pi}{4} \end{array}$.

6. ⋆ <u>*question d'approfondissement*</u>

Soit une fonction g définie par : $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

Après avoir établi l'ensemble de définition de g et justifié qu'elle est primitivable sur cet ensemble, déterminer sa primitive G qui vérifie $G(1) = 0$.

Pour tout réel x on a :

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$$

L'ensemble de définition de f est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc primitivable sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$

On reconnaît, à une constante multiplicative près, la forme primitivable $\dfrac{u'}{1+u^2}$ et on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,$$

C étant la constante telle que :

$$F(1) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1) + C = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad C = -\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8}.$$

On en conclut : $\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) - \dfrac{\pi}{8} \end{array}.$

∼