DM 3 de mathématique

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Chacun travaillera, en fonction de ses objectifs, une partie (éventuellement vide) des trois catégories d'exercices :

- ▶ entraînement, consolidation des bases ;
- ▶ coeur de cible ;
- ▶ approfondissement, exploration, recherche.

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = 1 + i$
2. $iz^2 + (4 - i)z - 3(1 + i) = 0$

Exercice 2

On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
2. Restriction de la fonction f .
 - a. Justifier que la fonction f admet une restriction sur l'intervalle $I = [0, 1[$. On la notera $f|_I$.
 - b. Justifier que $f|_I$ réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.
 - c. Déterminer la fonction réciproque $f|_I^{-1}$ de la fonction $f|_I$.
 - d. Pour les deux fonctions $f|_I$ et $f|_I^{-1}$, donner, s'il en existe, un majorant, un minorant, le maximum, le minimum.
3. Déterminer l'image de f .
4. Calcul d'intégrale
 - a. Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
 - b. Calculer : $\int_2^3 f(x) dx$.

Exercice 3

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n}{n!}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$.

Exercice 4

Déterminer la limite des suites suivantes définies sous forme explicite, ou établir qu'elles n'en ont pas.

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \sqrt[n]{n^3}$
3. $u_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \sin(n^2)$

Exercice 5

1. Étudier la continuité et les possibles prolongements par continuité des fonctions réelles f définies sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ à déterminer par :

- a. $f(x) = \frac{x \ln(x)}{1+x}$
- b. $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$
- c. $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 6

Pour chaque suite réelle ci-dessous, déterminer une formule explicite quand c'est possible, et étudier la monotonie et la convergence.

1. La suite u définie par $u_0 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$
2. La suite v définie par $v_0 = 0, v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$

Coeur de cible

Exercice 7 : Équation complexe

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1) \quad (E)$$

1. Montrer que les nombres $0, 1, i$ et $-i$ sont solution de l'équation (E) .
2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \quad (E')$.
 - a. Justifier que l'expression $z^3 - z^2 + z - 1$ peut se factoriser par $(z-1)$.
 - b. Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E') .
3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ une solution de l'équation (E) .
 - a. Montrer que z vérifie aussi l'équation : $z(\bar{z}-1) = \bar{z}^2(z-1)$.
 - b. En déduire que $\bar{z}z = 1$. (*question difficile*)
 - c. En remplaçant $\bar{z}$ par son expression en fonction de z dans l'équation (E) , établir qu'elle est, dans ce cas, équivalente à l'équation (E') .
4. Donner, en justifiant, l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 8 : Équation différentielle, continuité, dérivabilité et raccordement

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$t^2 y' + (1-t)y = t \quad (E)$$

1. En posant $t = 0$, déterminer une condition sur toute solution y de l'équation.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient l'équation (E) .
3. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ qui vérifient l'équation (E) .
(On pourra récupérer des résultats de la question précédente)
4. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E) .

Exercice 9 : Suite définie par une relation de récurrence

On considère la fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 4}{2}}$$

et la suite u définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer sur un même graphique le graphe de f et la première bissectrice du repère, en précisant la position relative des deux courbes.
2. Prouver que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f .
3. On suppose ici $u_0 \in [0; 2[$.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0, 2[$.
 - b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
 - c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 > 0$.
5. Déterminer la convergence de la suite u selon les valeurs de u_0 .

Approfondissement, exploration, recherche

Problème : Somme des inverses des carrés des premiers entiers

La finalité de ce problème est de démontrer que la suite des sommes S_n des inverses des carrés des n premiers entiers naturels non nuls

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admette une limite finie et d'en déterminer la valeur.

Partie I

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. En observant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) \cos(t) dt$,
montrer, à l'aide d'une intégrations par partie :

$$I_{n+1} = (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \sin^2(t) dt.$$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$.

4. Établir la relation de récurrence : $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

5. Démontrer rigoureusement que pour tout entier naturel n on a : $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Partie II : Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose : $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt$.

6. Calculer J_0

7. a. Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq t^2 \cos^{2n+2}(t) \leq t^2 \cos^{2n}(t).$$

b. En déduire que la suite (J_n) est positive et décroissante.

8. a. En écrivant $I_n = \int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{2n}(t) dt$, prouver à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I_n = 2n \int_0^{\pi/2} t \cos^{2n-1}(t) \sin(t) dt.$$

- b. A l'aide d'une nouvelle intégration par partie, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

9. Pour tout entier naturel n , on pose : $K_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$.

10. En déduire que pour tout entier naturel non nul N on a : $\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$.

Partie III. Calcul de la limite

Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto 1 - \frac{\pi}{2} \cos(x)$

11. Établir que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur J , où J est un intervalle que l'on précisera.
12. Montrer que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
(on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de α).
 En déduire le signe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
13. Démontrer que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$.
14. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.
15. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$.
16. Conclure.

~