DM 3 de mathématique

Indications

à ne consulter qu'après avoir sincèrement cherché chaque question

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = 1 + \mathrm{i}$
   Utiliser les formes exponentielles

2. $\mathrm{i}z^2 + (4 - \mathrm{i})z - 3(1 + \mathrm{i}) = 0$
   Détermination des racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, calcul du discriminant qui à priori sera complexe, détermination des deux racines opposées de ce déterminant, formule donnant les deux racines.

Exercice 2

On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
   Le nombre $f(x)$ est défini si et seulement si le dénominateur est non nul.

2. Restriction de la fonction f.
   a. Justifier que la fonction f admet une restriction sur l'intervalle $I = [0, 1[$.
   On la notera $f_|$.
   Il suffit de vérifier que $I \subset \mathscr{D}_f$.

   b. Justifier que $f_|$ réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.
   On peut montrer que $f_|$ est strictement monotone et continue, puis calculer les images des bornes (*crochet fermé*) ou les limites en les bornes (*crochets ouverts*) .

   c. Déterminer la fonction réciproque $f_|^{-1}$ de la fonction $f_|$.
   On pose $y = f_|(x)$ et on chercher à exprimer x en fonction de y.
   L'équation est équivalente à un un trinôme en x avec y en coefficient.
   On sera amené à calculer le discriminant paramétré par y.
   Il faudra ensuite retenir une seule racine pour chaque valeur de y dans l'intervalle J.
   (ce n'est pas une question facile !)

d. Pour les deux fonctions $f_|$ et $f_|^{-1}$, donner , s'il en existe, un majorant, un minorant, le maximum, le minimum.
Si on veut justifier, il faut déterminer des limites et invoquer la monotonie.

3. Déterminer l'image de f.
L'image de f est, par définition, l'ensemble $f(\mathscr{D}_f)$.

4. Calcul d'intégrale

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
Procéder par identification, ou plus directement par transformation de l'écriture de $f(x)$.

b. Calculer : $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Utiliser l'écriture obtenue à la question précédente.

Exercice 3

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
On observe qu'à chaque nouveau terme, on ajoute ou on retranche alternativement un nombre positif : $u_n = u_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
La suite est donc non monotone. Pour le prouver il suffit de calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.
Une façon de faire est d'établir que l'argument du sinus est une suite géométrique décroissante bornée par 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
Or sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction sinus est croissante.
On conclut par le théorème sur le sens de variation d'une application composée.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$.
Comparer à 1 le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réflexe naturel.
Mais quand on le fait, on se rend compte que la suite est non monotone.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$.
C'est une suite définie par $u_n = f(n)$ (*formule explicite*) où f est monotone sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4

Déterminer la limite des suites suivantes définies sous forme explicite, ou établir qu'elles n'en ont pas.

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
   C'est une forme indéterminée de type « l'infini moins l'infini » qui se lève en multipliant le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

2. $u_n = \sqrt[n]{n^3}$
   C'est une forme indéterminée exotique du type « l'infini puissance zéro ». Le recours à la fonction exponentielle et le théorème des croissances comparées permet de conclure.

3. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \sin(n^2)$
   Il ne faut pas se laisser impressionner par la complexité de l'expression, ni se lancer aveuglément dans le calcul de la différence de deux termes successifs (encore moins le quotient, puisque u n'est pas à termes strictement positifs).
   Penser au théorème sur le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle (*théorème 8 §4 chapitre 9*).

Exercice 5

Étudier la continuité et les possibles prolongements par continuité des fonctions réelles f définies sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ à déterminer par :

1. $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1+x}$
   Les théorèmes généraux (*chapitre 10 §6.2 théorèmes 19 (Opérations algébriques sur les fonctions continues) et 20 (Composée de deux fonctions continues)*) permettent d'affirmer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.
   Le seul prolongement par continuité possible est en 0.
   La limite se détermine en recourant aux croissances comparées (*proposition 21 §6 chapitre 4 : Logarithme contre puissance*)

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$
   La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, donc f l'est aussi (d'après les théorème généraux, tout de même).
   Avec un peu de culture, on aura reconnu en argument de la racine carrée la fonction « partie décimale » dont les résultats sont hors programme. On peut se rendre compte que f sera continue sur $\mathbb{R}$.
   Pour l'établir, il suffira de considérer un entier relatif n, et d'étudier les limites à gauche et à droite de f en n.

3. $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
   Mêmes indications que pour l'exercice précédent, à ceci près qu'il faudra étudier les limites à gauche et à droite de la fonction f en $\dfrac{1}{n}$, et envisager un prolongement par continuité en 0.
   Ce n'est pas une question facile !

Exercice 6

Pour chaque suite réelle ci-dessous, déterminer une formule explicite, et étudier la monotonie et la convergence.

1. La suite u définie par $u_0 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$
   On reconnaît une suite arithmético-géométrique, on utilise directement les résultat du cours : *théorème 2 §3 chapitre 11.*
   Les résultats sur les suites géométriques permettent de déterminer la convergence et la monotonie.

2. La suite v définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$
   On reconnaît une suite réelle récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, on utilise directement les résultats du cours : *théorème 4 §4 chapitre 11.*
   Les résultats sur les suites géométriques permettent de déterminer la convergence.
   Pour la monotonie, c'est une question légèrement ouverte.

Coeur de cible

Exercice 7 : Équation complexe

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1) \qquad (E)$$

1. Montrer que les nombres $0, 1, i$ et $-i$ sont solution de l'équation (E).
Pour chacune des valeurs proposées, il suffit calculer séparément chaque membre de l'égalité pour constater qu'ils sont égaux.
Remarque : Il n'est pas dit qu'il n'existe pas d'autre solution à cette équation !

2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \quad (E')$.

a. Justifier que l'expression $z^3 - z^2 + z - 1$ peut se factoriser par $(z-1)$.
Il suffit d'établir que 1 est racine du polynôme.

b. Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E').
Factorisation de polynôme, produit de facteur nul, identité remarquable.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ une solution de l'équation (E).

a. Montrer que z vérifie aussi l'équation : $z(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$.
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs conjugués le sont, puis compatibilité de la conjugaison avec l'addition et la multiplication.

b. En déduire que $\overline{z}z = 1$. *(question difficile)*
L'égalité établie à la question **3.a.** permet une substitution salutaire dans l'équation (E).

c. En remplaçant $\overline{z}$ par son expression en fonction de z dans l'équation (E), établir qu'elle est, dans ce cas, équivalente à l'équation (E').
$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. Donner, en justifiant, l'ensemble des solutions de l'équation (E).
Hormis 0, toute solution de (E) est aussi solution de de (E').

Exercice 8 : Équation différentielle, continuité, dérivabilité et raccordement

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$t^2y' + (1-t)y = t \qquad (E)$$

1. En posant $t = 0$, déterminer une condition sur toute solution y de l'équation.
Ne pas oublier qu'une équation différentielle est une égalité qui doit être vérifiée pour toute valeur de la variable t, et que la lettre y usuellement employée désigne $y(t)$, y étant le nom de la fonction inconnue.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient l'équation (E).
Normaliser l'équation, puis dérouler la méthode suggérée par les paragraphes **1.1**, **1.2** et **1.3** du chapitre 6.
Si on ne trouve pas de solution particulière, on peut mettre en oeuvre la méthode désignée par l'oxymore « variation de la constante ». C'est un peu laborieux, mais ça aboutit.

3. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ qui vérifient l'équation (E).
(On pourra récupérer des résultats de la question précédente)
Inutile de refaire ce qui a été fait à la question précédente, juste pointer les différences pour justifier le résultat final.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E).

Dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, une constante peut être choisie arbitrairement.
Toute combinaison de ces deux constantes peut à priori donner une solution sur $\mathbb{R}$, mais on se souvient que par définition une solution d'équation différentielle doit être dérivable, donc continue.
Ces deux conditions sont assurées sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il les faut aussi en 0.
La continuité en 0 va imposer des conditions nécessaires sur le couple de constantes (on oublie pas qu'il faut $y(0) = 0$).
Il reste à tester si les fonctions candidates sont aussi dérivables en 0.

Exercice 9 : Suite définie par une relation de récurrence

On considère la fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{x^2+4}{2}} \end{array}$

et la suite u définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer sur un même graphique le graphe de f et la première bissectrice du repère, en précisant la position relative des deux courbes.
Pour tracer le graphe, on attend une rapide étude des variations, la détermination des éventuels extremums locaux, l'image de certains nombres.
La première bissectrice du repère est le graphe de la fonction identité.
L'expression « position relative des deux courbes » signifie : « ensemble sur lequel l'une est au-dessus de l'autre, et réciproquement ».

2. Prouver que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f.
On utilisera la monotonie de f sur $[0, 2[$ pour établir que $f([0, 2[) \subset [0, 2[$.

3. On suppose ici $u_0 \in [0; 2[$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 2[$.
Récurrence.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Définition de la stricte croissance d'une suite et position relative du graphe de la fonction f et de la première bissectrice du repère.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
Théorème de la convergence monotone, et condition nécessaire sur une limite finie (*théorème 5 §5.2 Chapitre 11*)

4. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 > 0$.
Le cas $u_0 \in]0, 2[$ a déjà été traité à la question précédente.
Traiter le cas où $u_0 = 2$.
Si $u_0 > 2$, on s'inspirera de la question précédente et du plan d'étude d'une suite récurrente (*§5.2 Chapitre 11*) pour établir une résolution efficace, convaincante et compacte.

5. Déterminer la convergence de la suite u selon les valeurs de u_0.
Reste à traiter les cas où $u_0 \leqslant 0$.
L'intervalle $]-\infty, 0]$ n'est pas stable par f, mais un peu de réflexion élémentaire devrait amener à la solution.

6. *Question bonus* : vitesse de convergence
On se place dans le cas où $u_0 \in [0, 2]$.

a. Déterminer le plus petit réel k tel que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant k|u_n - 2|$$

On hésite entre le théorème des accroissements finis et les résultats sur les taux de variation d'une fonction convexe.

On observe sur le graphique que le taux de variation entre u_n et 2 doit pouvoir se rapprocher de la pente de la tangente en 2, qui est un maximum de la dérivée de f sur $[0, 2]$.
Dès lors, c'est le théorème des accroissements finis qui est naturel.

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |u_n - 2| \leqslant k^n |u_0 - 2|$$

À prouver par récurrence à partir du résultat précédent.

Approfondissement, exploration, recherche

Problème : Somme des inverses des carrés des premiers entiers

La finalité de ce problème est de démontrer que la suite des sommes S_n des inverses des carrés des n premiers entiers naturels non nuls

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admet elle une limite finie et d'en déterminer la valeur.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$

On reconnaît les intégrales de Wallis de rang pair.
On retrouve les idées mises en oeuvre dans l'*exercice 6 du TD5.*

1. Calculer I_0 et I_1.
Il s'agit d'intégrer une fonction constante, puis la fonction $\cos^2$, pour laquelle une linéarisation s'impose.

2. En observant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\quad I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t,$
montrer, à l'aide d'une intégrations par partie :
$$I_{n+1} = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
Dériver la fonction $\cos^{2n+1}$ et primitiver la fonction cos.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1}).$
$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$

4. Établir la relation de récurrence : $\quad I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n.$
« Isoler » I_{n+1} dans l'égalité obtenue à la question précédente.

5. Démontrer rigoureusement que pour tout entier naturel n on a : $\quad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.$
Produit des premiers entiers pairs, des premiers entiers impaires, situation déjà rencontrée. Une démonstration par récurrence est aussi possible étant donné que la formule à obtenir est donnée par l'énoncé.

Partie II : Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Calculer J_0
Primitiver un monôme.

7. **a.** Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant t^2 \cos^{2n+2}(t) \leqslant t^2 \cos^{2n}(t).$$

On peut Penser à borner la fonction cos, et à multiplier chaque membre d'une double inégalité par un nombre de signe connu.

b. En déduire que la suite (J_n) est positive et décroissante.
Croissance de l'intégrale (*théorème 2 §2.2 Chapitre 5*).

8. **a.** En écrivant $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$, prouver à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I_n = 2n \int_0^{\pi/2} t \cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dériver la fonction $\cos^{2n}$ et primitiver la fonction constante égale à 1.

b. A l'aide d'une nouvelle intégration par partie, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

On comprend que les intégrales I_n commencent à ressembler aux intégrales J_n en procédant à deux intégrations par partie.
Les bornes d'intégration 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ sont des valeurs d'annulation des fonctions sin et cos, qui vont simplifier les expressions obtenues.
Il convient de primitiver la fonction identité, et de se souvenir que $\sin^2 = 1 - \cos^2$.
(*calculs un peu lourds*).

9. Pour tout entier naturel n, on pose : $K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$.
On peut exprimer $K_{n-1} - K_n$, puis tenter de faire apparaître l'expression obtenue à la question précédente pour la remplacer par I_n, dont on connaît une expression en fonction de n depuis la question **5**.
(*calculs un peu lourds, il faut avoir la foi*)

10. En déduire que pour tout entier naturel non nul N on a : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$.

Sommer terme à terme les égalités obtenues à la question précédente pour n allant de 1 à N.

Partie III. Calcul de la limite

Où l'on comprend que si l'on trouve que la suite K converge et que l'on peut avoir sa limite, on aura le résultat recherché.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \dfrac{\pi}{2}\cos(x) \end{array}$.

11. Établir que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur J, où J est un intervalle que l'on précisera.
Une bonne idée est d'établir que la fonction f est continue et strictement monotone sur son intervalle de définition.

12. Montrer que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
(*on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de* α).
En déduire le signe de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Théorème de la bijection et définition d'une fonctions strictement croissante.

13. Démontrer que pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.
Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence.
On peut remarquer que la dérivée de la fonction différence est la fonction f dont le signe a été établi à la question précédente...

14. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.
C'est le moment de bien utiliser les multiples résultats précédemment obtenus.
L'encadrement ci-dessus mis au carré et multiplié par $\cos^{2n}(t)$ fait apparaître l'expression la fonction intégrée dans la définition de J_n, et quelque chose qui ressemble à la fonction intégrée dans la définition de I_n.
La croissance de l'intégrale et un peu d'astuce permet d'obtenir le résultat.

15. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}$.
Quand on sait que K_n est égal à J_n multiplié par un nombre positif, et que l'on dispose d'une forme explicite de I_n, on se dit que le résultat est atteignable sans grande difficulté.

16. Conclure.
Il suffit maintenant d'établir que la suite K converge vers un nombre à déterminer (pas la chose la plus difficile du problème), et d'utiliser le résultat de la question **10.**.

$\sim$