Test de mathématique

Semaine 1

Corrigé

Exercice 1

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres : 120 et 96.
$120 = 12 \times 10 = 4 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5.$

$96 = 100 - 4 = 25 \times 4 - 4 = 4 \times 24 = 4 \times 2^3 \times 3 = 2^5 \times 3.$

Autre idée : $96 = 3 \times 32 = 2^5 \times 3.$

2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\dfrac{96}{120}$.
Réduction de la fraction :
$$\frac{96}{120} = \frac{2^5 \times 3}{2^3 \times 3 \times 5} = \frac{4}{5}.$$

Exercice 2

1. Écrire sous la forme d'une seule fraction, que l'on simplifiera autant que possible.
$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}.$$

On réduit au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires :
$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} &= \frac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} \\
&= \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}
\end{aligned}$$

2. Donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs : $\dfrac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$.

On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair :
$$\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$$

Exercice 3

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

1. $25 - (10x+3)^2$

On reconnaît une identité remarquable :

$$25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1).$$

2. $x^2 - 6x + 8$

Mise sous forme canonique :

$$x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 3^2 + 8 = (x-3)^2 - 1$$

Factorisation :

$$x^2 - 6x + 8 = (x-3-1)(x-3+1) = (x-4)(x-2)$$

3. $4x^2 + 12x + 1$

Début du développement d'un carré :

$$4x^2 + 12x + 1 = (2x+3)^2 - 3^2 + 1 = (2x+3)^2 - 8 = (2x+3-2\sqrt{2})(2x+3+2\sqrt{2}).$$

8 est le carré de : $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

Remarque : L'expression qui nous a permis de factoriser en reconnaissant la différence de deux carrés n'est pas la forme canonique du trinôme. La forme canonique est :

$$4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 8.$$

Elle permet d'établir que la valeur minimale de l'expression est -8, atteinte lorsque $x = -\frac{3}{2}$.

4. $5x^2 - 13x + 8$

Remarque : Il n'y a pas de facteur commun, ce n'est pas une identité remarquable, et la mise sous forme canonique semble bien compliquée.
Une solution serait de calculer de discriminant, et s'il est positif de factoriser sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$, où $a=5$ est le coefficient du terme de degré 2, et $\{x_1, x_2\}$ la paire de racines trouvée.
Une solution ici préférable est d'observer que 1 est racine "évidente" du polynôme, donc que l'on peut factoriser par $(x-1)$.

1 est racine du trinôme, on a donc la factorisation :

$$5x^2 - 13x + 8 = (x-1)(5x-8)$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + 5 = 0$
Le carré d'un nombre réel est positif, donc le membre de gauche de l'équation est strictement positif quel que soit x. On en déduit : $S = \{\}$.
Remarque : (l'ensemble vide se note aussi $\varnothing$)

2. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
Posons $X = x^2$ et résolvons dans $\mathbb{R}_+$ l'équation : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
Nous observons que $X = 1$ est racine évidente du trinôme, d'où la factorisation :

$$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2).$$

L'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$ admet donc deux racines positives : 1 et 2.
Or $\quad X = 2 \iff x^2 = 2 \iff x \in \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$
et $\quad X = 1 \iff x^2 = 1 \iff x \in \left\{\sqrt{1}, -1\right\}$
Donc enfin :

$$S = \left\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$$

Autre méthode : On observe que 1 et -1 sont racines du polynôme, donc on peut le factoriser par $(x-1)(x+1) = (x^2-1)$:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-1)(x^2-2).$$

D'où :

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \iff x \in \left\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$$

3. $(x^2 - x - 1)(x+4) = 0$
Pour tout réel x on a :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

L'équation à résoudre est donc équivalente à :

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x+4) = 0.$$

L'ensemble solution de cette équation produit nul est :

$$S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -4\right\}$$

4. $x + 2\sqrt{x} = 2$
L'ensemble de définition de l'équation est : $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+$.
Posons $X = \sqrt{x}$ et résolvons dans $\mathbb{R}_+$ l'équation :

$$X^2 + 2X - 2 = 0 \iff (X+1)^2 - 3 = 0 \iff (X + 1 - \sqrt{3})(X + 1 + \sqrt{3}) = 0$$

L'une des racines de ce trinôme est négative, et l'autre est $\sqrt{3}-1$.
Or $\quad X=\sqrt{x} \quad$ donc $\quad x=X^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.
On en déduit :

$$S=\left\{4-2\sqrt{3}\right\}$$

Autre méthode : On a :

$$x+2\sqrt{x}=2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{x}=2-x$$

On découvre la condition : $\quad 2-x\geqslant 0, \quad$ *soit* $x\leqslant 2$.
$\forall x\in[0,2]$:

$$\begin{aligned}
& & 2\sqrt{x}&=2-x\\
&\Longleftrightarrow & 4x&=(2-x)^2\\
&\Longleftrightarrow & x^2-8x+4&=0\\
&\Longleftrightarrow & (x-4)^2-16+4&=0\\
&\Longleftrightarrow & (x-4)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2&=0\\
&\Longleftrightarrow & (x-4-2\sqrt{3})(x-4+2\sqrt{3})&=0
\end{aligned}$$

Seule la solution $4-2\sqrt{3}$ *appartient à l'intervalle* $[0,2]$. *D'où :* $\quad S=\left\{4-2\sqrt{3}\right\}$.

5. $\mathrm{e}^{3x-5}=12$
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& & \mathrm{e}^{3x-5}&=12\\
&\Longleftrightarrow & \ln\left(e^{3x-5}\right)&=\ln(12) \quad \text{car la fonction ln est bijective}\\
&\Longleftrightarrow & 3x-5&=\ln(12)\\
&\Longleftrightarrow & x&=\frac{\ln(12)+5}{3}
\end{aligned}$$

On en conclut :

$$S=\left\{\frac{\ln(12)+5}{3}\right\}$$

Remarque : Il est d'usage de réaliser la transformation :

$$\ln(12)=\ln(2^2\times 3)=2\ln(2)+\ln(3),$$

Mais dans cette circonstance ça ne semble pas apporter une simplification à l'expression de la solution.

Exercice 5

Simplifier les écritures suivantes.

1. $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$

On a :

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2 &= \left(3+\sqrt{7}-(3-\sqrt{7})\right)\left(3+\sqrt{7}+(3-\sqrt{7})\right)\\ &= 2\sqrt{7}\times 6 = 12\sqrt{7}.\end{aligned}$$

<u>Autre méthode</u> : (moins subtile mais peut-être plus "efficace")

$$(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2 = 9+6\sqrt{7}+7-(9-6\sqrt{7}+7) = 12\sqrt{7}.$$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

3. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Exercice 6 – Formules de trigonométrie

Compléter les valeurs et formules ci-dessous.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a-b) = \cos(a)\sin(b)-\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$$

$\sim$