DM 3 de mathématique

Éléments de correction et commentaires

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = 1 + \mathrm{i}$
   On a : $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Soit $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ une écriture exponentielle de l'inconnue z.
   Alors :

$$\begin{aligned} & z^3 = 1+\mathrm{i} \\ \iff \quad & \rho^3 \mathrm{e}^{3i\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \\ \iff \quad & \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned} & 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \iff \quad & \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k}{3}\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Un argument étant défini modulo 2π, on obtient les trois mesures principales :
   $\dfrac{\pi}{12}$;
   $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$;
   $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{7\pi}{12}$.
   On en déduit :

$$S = \left\{ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}} \ ,\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} \ ,\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}} \right\}$$

2. $\mathrm{i}z^2 + (4-\mathrm{i})z - 3(1+\mathrm{i}) = 0$
   On cherche les racines d'un trinôme dont le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (4-\mathrm{i})^2 - 4 \times \mathrm{i} \times \big(-3(1+\mathrm{i})\big) \\ &= 16 - 1 - 8\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 12 \\ &= 3 + 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

   Soit $\delta = a + ib$ l'écriture algébrique d'une racine de Δ. Alors :

$$\delta^2 = \Delta \quad \iff \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$$

   Par somme et différence terme à terme de la première et de la dernière équation on obtient :

$$a^2 = 4 \qquad \text{et} \qquad b^2 = 1$$

   La deuxième équation impose en outre que a et b sont de même signe.
   Les deux racines de Δ sont donc : $2+\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$.
   Remarque : Une vérification de tête s'impose.

   Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-(4-\mathrm{i}) - 2 - \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{-6}{2\mathrm{i}} = 3\mathrm{i}$$

   et

$$z_2 = \frac{-(4-\mathrm{i}) + 2 + \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$$

   Remarque : Ça ne coûte pas trop cher de vérifier.

Exercice 2

On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
Le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. Restriction de la fonction f.

a. Justifier que la fonction f admet une restriction sur l'intervalle $I = [0, 1[$.
On la notera $f_|$.
L'intervalle I est inclus dans $\mathscr{D}_f$, donc f admet bien une restriction sur I.

b. Justifier que $f_|$ réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

La fonction $f_|$ est dérivable sur I et sa dérivée y est définie par :

$$f_|'(x) = \frac{-2x(x-1)-(4-x^2)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(x-1)^2} \left(= -\frac{(x-1)^2+3}{(x-1)^2} = -1 - \frac{3}{(x-1)^2} \right)$$

Le numérateur est un trinôme de discriminant :

$$\Delta = 4 - 16 < 0$$

Ce trinôme est donc du signe négatif de son coefficient du terme de degré 2.
La fonction $f_|$ est donc strictement décroissante sur I.
On a :

$$\lim_{x\to 1} 4 - x^2 = 3 \quad \text{par continuité (ou par somme)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} x - 1 = 0^-$$

Donc par quotient de limite :

$$\lim_{x\to 1} f_|(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

La fonction $f_|$ est en outre continue sur I, donc elle réalise une bijection de l'intervalle $I = [0, 1[$ vers

$$J = f([0,1[) = \left] \lim_{x\to 1} f_|(x), f(0) \right] = \boxed{]-\infty, -4]}.$$

c. Déterminer la fonction réciproque $f_|^{-1}$ de la fonction $f_|$.
Soit $x \in I$ et $y \in J$ son unique image par $f_|$. On a la relation :

$$y = \frac{4-x^2}{x-1} \iff y(x-1) = 4 - x^2 \iff x^2 + yx - 4 - y = 0$$

Le discriminant de ce trinôme en x paramétré par y est :

$$\Delta = y^2 - 4 \times (-4-y) = y^2 + 4y + 16 = (y+2)^2 + 12 > 0.$$

Il possède donc deux racines dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-y-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-y+\sqrt{\Delta}}{2}$$

Remarque : D'après ce qui précède, on sait que pour chaque valeur de $y \in J$, l'une de ces racines est à retenir, et l'autre à rejeter (il ne doit en rester qu'un).
Or $y \leqslant -4$, donc le numérateur de x_2 est plus grand que 4, donc $x_2 > 1$.

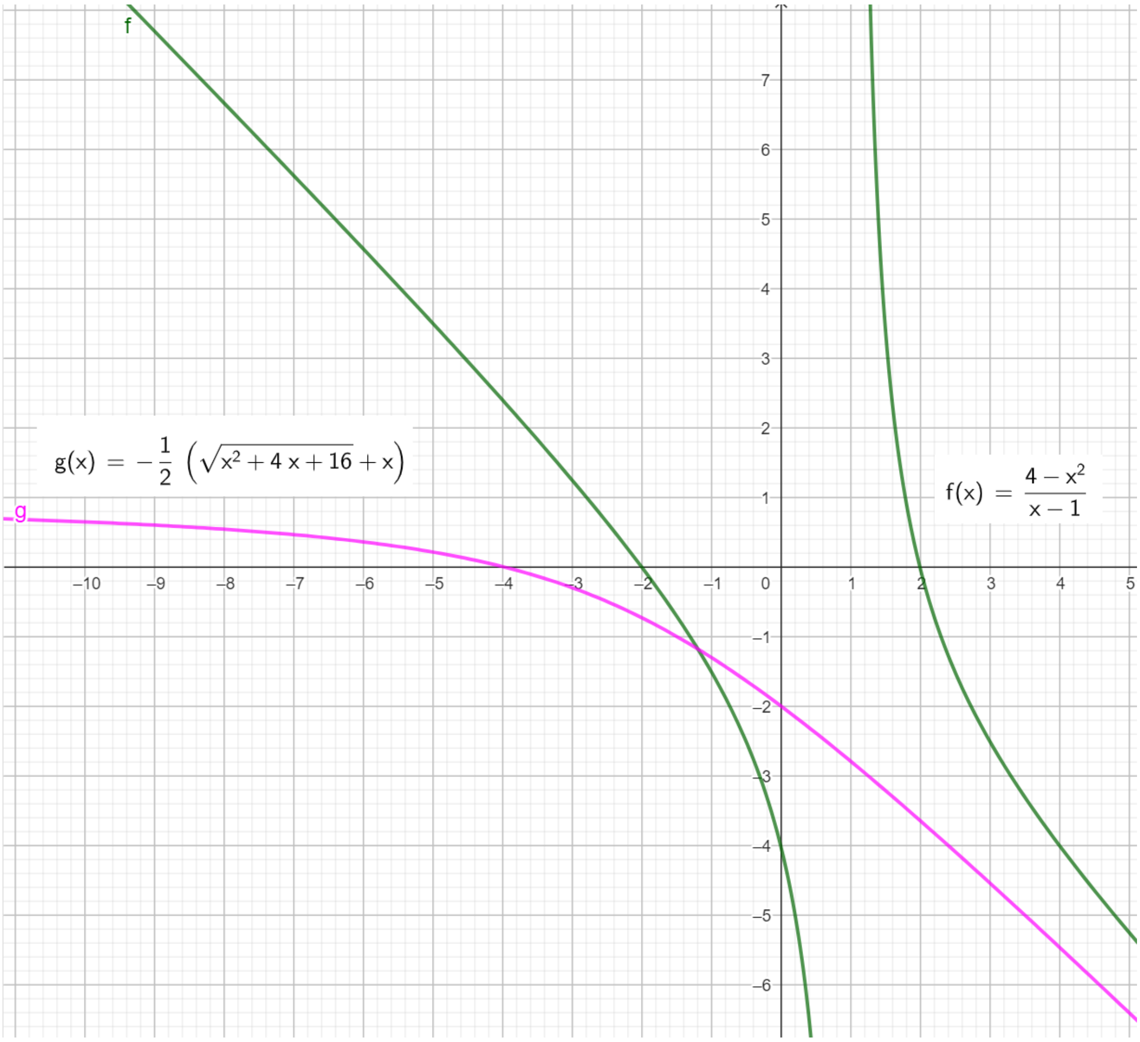
On a :

$$y \leqslant -4 \quad \Longrightarrow \quad -y + \sqrt{\Delta} \geqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 \geqslant 2.$$

La racine x_2 est donc à rejeter car elle n'appartient pas à l'intervalle I.

On en déduit que la fonction $f_|^{-1}$ est définie sur $J = [-4, -\infty[$ par :

$$\boxed{f_|^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4x+16}+x\right)}.$$



Remarque : On aurait pu définir une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty, 1[$.

d. Pour les deux fonctions $f_|$ et $f_|^{-1}$, donner , s'il en existe, un majorant, un minorant, le maximum, le minimum.
La fonction $f_|$ est strictement décroissante sur $[0, 1[$, donc elle admet un maximum strict en 0 qui vaut $f_|(0) = -4$.
Tout nombre supérieur ou égal à -4 est donc un majorant de $f_|$.

De plus $f_|(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty$ donc $f_|$ n'admet pas de minorant, et par conséquent pas non-plus de minimum.
La fonction $f_|^{-1}$ est strictement décroissante sur J, donc elle admet un minimum strict qui est $f_|^{-1}(-4) = 0$.
Tout nombre négatif est donc un minorant de la fonction $f_|^{-1}$.
En outre $f_|(x)^{-1} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 1$, donc la fonction $f_|^{-1}$ est majorée 1 (et tout nombre supérieur à 1) mais n'a pas de maximum sur J.

3. Déterminer l'image de f.
La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ avec

$$f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$$

donc

$$f(\mathscr{D}_f) = \mathbb{R}.$$

Remarque : On aurait pu aussi considérer l'image de l'intervalle $]-\infty, 1[$.

Remarque : On pourrait démontrer que f *est surjective et non injective.*

4. Calcul d'intégrale

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \dfrac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}$.
Or $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x-1}$, d'où, par identification des coefficients du numérateur :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - a = 0 \\ -b + c = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

On a donc une écriture de $f(x)$ sous forme de somme :

$$f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}.$$

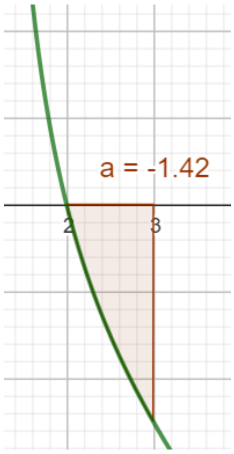
Remarque : Il existait une façon plus compacte et élégante d'obtenir le résultat :

$$f(x) = \frac{1 - x^2 + 3}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x)+3}{x-1} = -(1+x) + \frac{3}{x-1}$$

b. Calculer : $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Par linéarité de la primitivation on a :

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 -x-1+3\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^2}{2}-x+3\ln(|x-1|)\right]_2^3\\ &= -\frac{9}{2}-3+3\ln(2)-(-2-2+3\ln(1))\\ &= \boxed{3\ln(2)-\frac{7}{2}}\end{aligned}$$



Exercice 3

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

On a :

$$u_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 \qquad u_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^0}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < u_0 \qquad u_2 = u_1 + \frac{1}{3} > u_1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non monotone.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

La suite $\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison comprise strictement entre 0 et 1, et de premier terme positif, elle est donc décroissante, minorée par 0 et majorée par son premier terme : $\dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Or sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction sinus est croissante.

On en conclut, d'après le théorème sur le sens de variation d'une application composée, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Autre méthode : Ci-dessous une méthode moins efficace, mais qui met en oeuvre une idée intéressante

Si $\theta = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, donc constante (ça serait un sophisme de dire qu'elle est croissante et décroissante).
Dans tous les autres cas on a :

$$0 < \theta \leqslant \pi \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{\theta}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < u_n \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparons à 1 le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right)}$$

Or il a été établi précédemment que pour tout n :

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{\theta}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{\theta}{2^{n+2}} \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ \Longleftrightarrow & \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+2}}\right) \geqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \dfrac{1}{2} \qquad \textit{par décroissance de cos sur } \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \Longrightarrow & 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+2}}\right) > 1 \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+2}}\right)} < 1 \end{array}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

On calcule :

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 3 \qquad u_2 = 4,5 \qquad u_3 = 4,5 \qquad u_4 = \frac{27}{8} < 4$$

Ainsi $u_1 > u_0$ et $u_4 < u_3$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non monotone.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x+1)}{x} \end{array}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ avec :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f : \qquad f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

Soit $g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-(x+1)\ln(x+1) \end{array}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathscr{D}_g$ avec :

$$\forall x \in \mathscr{D}_g : \qquad g'(x) = -\ln(x+1) < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissantes sur $\mathscr{D}_g$.
Or $g(1) = 1 - 2\ln(2) < 0$, donc g est négative sur $\mathscr{D}_g$.
On en déduit, par signe d'un quotient, que f' est strictement négative sur $\mathscr{D}_f$, donc f est strictement décroissante sur $\mathscr{D}_f$.
Or pour tout entier naturel non nul : $\quad u_n = f(n)$.
La suite u est donc strictement décroissante.

Exercice 4

Déterminer la limite des suites suivantes définies sous forme explicite, ou établir qu'elles n'en ont pas.

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

On conclut par somme, composition avec la fonction carré et quotient :

$$u_n \to 0.$$

2. $u_n = \sqrt[n]{n^3}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \sqrt[n]{n^3} = \left(n^3\right)^{\frac{1}{n}} = (n)^{\frac{3}{n}} = \mathrm{e}^{3\frac{\ln(n)}{n}}$$

Or par croissance comparée : $\quad \dfrac{\ln(n)}{n} \to 0.$

D'où par produit et continuité de la fonction exponentielle en 0 :

$$u_n \to 1.$$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \sin(n^2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\cos(n)\sin(n^2)| = |\cos(n)| \times |\sin(n^2)|$$

Or $\quad |\cos(n)| \leqslant 1 \quad$ et $\quad |\sin(n^2)| \leqslant 1, \quad$ donc $\quad |\cos(n)\sin(n^2)| \leqslant 1.$

La suite u apparaît donc comme le produit entre la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite nulle, et la suite bornée $(\cos(n)\sin(n^2))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On en conclut *(théorème 8 §4 chapitre 9)* :

$$u_n \to 0.$$

Exercice 5

Étudier la continuité et les possibles prolongements par continuité des fonctions réelles f définies sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ à déterminer par :

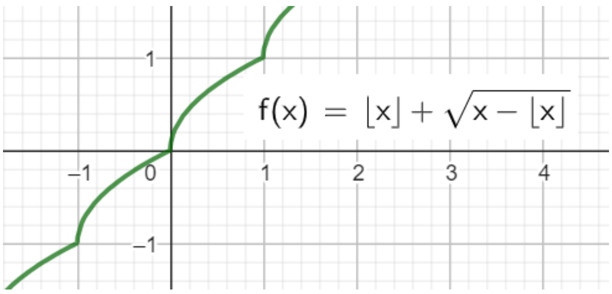
1. $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1+x}$

Le logarithme népérien est défini sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sur cet intervalle le dénominateur ne s'annule pas. On en déduit : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est continue sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et quotient de fonctions continues.
D'après le théorème des croissances comparées on a : $x\ln(x) \underset{0}{\rightarrow} 0$.
On en conclut par quotient : $f(x) \underset{0}{\rightarrow} 0$.
La fonction f est prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\tilde{f}$ qui vérifie : $\tilde{f}(0) = 0$.

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

On sait que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc l'argument de la racine carrée est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas de prolongement par continuité à envisager.
La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, donc f l'est aussi comme différence, composée et somme de fonctions continues.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Au voisinage de n^- : $\lfloor x \rfloor = n-1$, donc $f(x) = n-1+\sqrt{x-n+1} \xrightarrow[x\to n^-]{} n-1+1 = n$.
Au voisinage de n^+ : $\lfloor x \rfloor = n$, donc $f(x) = n + \sqrt{x-n} \xrightarrow[x\to n^-]{} n$.
On en conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.



3. $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$.

Soit $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$: $n < \dfrac{1}{x} < n+1 \iff \dfrac{1}{n+1} < x < \dfrac{1}{n}$.

La fonction f est donc continue sur tout intervalle de type $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$.

En outre : $0 < \dfrac{1}{x} < 1 \iff x > 1$ et $-1 < \dfrac{1}{x} < 0 \iff x < -1$.

La fonction f est donc également continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, comme produit de fonctions continues.

On en déduit que f est continue sur : $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
Au voisinage de $\left(\frac{1}{n}\right)^-$: $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = n$, donc $f(x) = x \times n \xrightarrow[x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-]{} 1$.
Au voisinage de $\left(\frac{1}{n}\right)^+$: $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = n-1$, donc $f(x) = x(n-1) \xrightarrow[x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+]{} 1 - \frac{1}{n}$.
On en conclut que la fonction f est discontinue en chaque point de $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Le seul prolongement par continuité possible est en zéro, où f n'est pas définie.

Soit x au voisinage de 0^+. Par définition de la fonction partie entière :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$

D'où : $1 - x < f(x) \leqslant 1$.
On en conclut, d'après le théorème d'encadrement *(théorème 5 §3.3 chapitre 10)* :

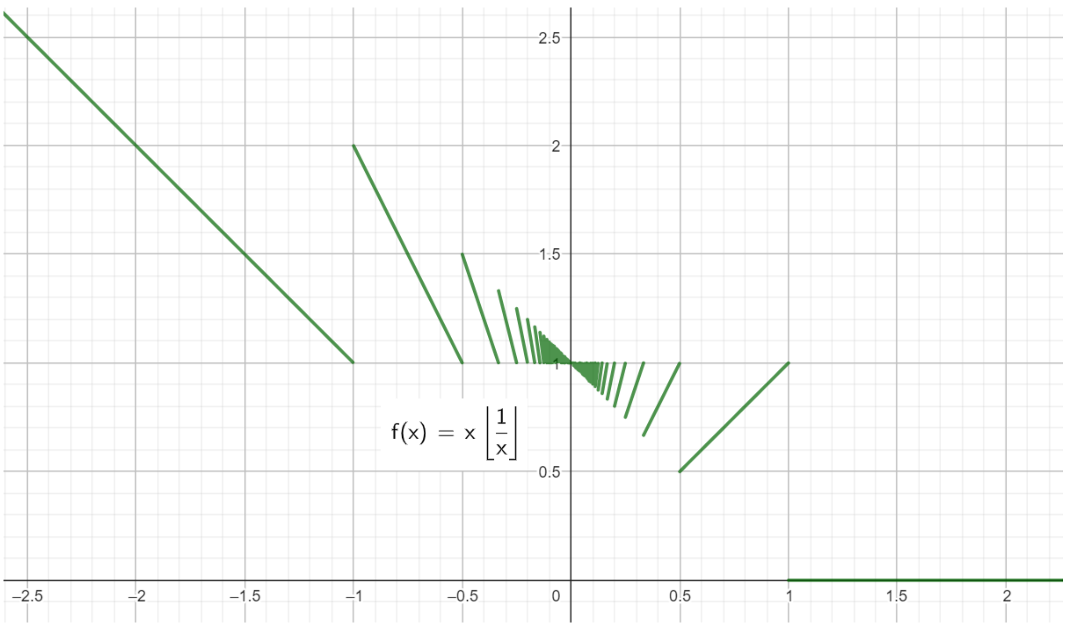
$$f(x) \xrightarrow[0^+]{} 1.$$

On démontre de même qu'au voisinage de 0^- : $1 \leqslant f(x) < 1 - x$,
pour établir pareillement :

$$f(x) \xrightarrow[0^-]{} 1.$$

La limite à gauche en zéro est la même valeur finie que la limite à droite, la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\tilde{f}$ qui vérifie : $\tilde{f}(0) = 1$.

Remarque : Dans les environs de 0, f et $\tilde{f}$ sont particulièrement discontinues !



Exercice 6

Pour chaque suite réelle ci-dessous, déterminer une formule explicite, et étudier la monotonie et la convergence.

1. La suite u définie par $u_0 = -1$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

La relation de récurrence nous permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique d'équation au point fixe :

$$x = \frac{2}{3}x - 1 \quad \iff \quad x = -3.$$

La suite $w = u + 3$ est alors géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de premier terme $w_0 = u_0 + 3 = 2$, et de terme général :

$$w_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \boxed{u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}.$$

Remarque : On pense à vérifier de tête pour les deux premiers termes.

D'après les résultats sur les suites géométriques, on en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite -3.

2. La suite v définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$

La relation de récurrence nous permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - 3 = 0$$

Remarque : Supposons que l'on n'a pas remarqué que 2 est racine...

Discriminant : $\quad \Delta = \frac{1}{4} + 12 = 12,25 = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 0.$

Racines : $\quad r_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{2} = -\frac{3}{2} \quad$ et $\quad r_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{2} = 2.$

Il existe donc un unique couple de réels (λ, μ) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \lambda\, 2^n + \mu\left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Or $v_0 = 0$, donc $\quad \lambda + \mu = 0.$

En outre $v_1 = 1$, donc $\quad 2\lambda - \frac{3}{2}\mu = 1.$

Par substitution : $\quad 2\lambda + \frac{3}{2}\lambda = 1, \quad$ donc $\quad \lambda = \frac{2}{7}.\quad$ Il vient alors : $\quad \mu = -\frac{2}{7}.$

On obtient dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \boxed{v_n = \frac{2}{7}2^n - \frac{2}{7}\left(-\frac{3}{2}\right)^n}.$$

<u>Remarque</u> : On pense à vérifier de tête pour les trois premiers termes.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad v_n = \frac{2}{7} \times 2^n \left(1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

D'après les résultats sur les suites géométriques, on en conclut par produit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Par contre elle n'est pas monotone au regard de ses trois premiers termes.

Coeur de cible

Exercice 7 : Équation complexe

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1) \qquad (E)$$

1. Montrer que les nombres $0, 1, i$ et $-i$ sont solution de l'équation (E).
Si $z = 0$
le membre de gauche de l'égalité vaut $0 \times (-1) = 0$
et le membre de droite vaut $0 \times (-1) = 0$.
Si $z = 1$ ces deux membres valent $1 \times (1-1) = 0$ et $1 \times (1-1) = 0$.
Si $z = i$ on trouve $(-i) \times (i-1) = 1+i$ et $-1(-i-1) = 1+i$.
Enfin si $z = -i$ on a : $i \times i(-i-1) = 1-i$ et $-1(i-1) = 1-i$.
On en conclut que les nombres $0, 1, i$ et $-i$ sont bien solution de l'équation (E).

2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \quad (E')$.

a. Justifier que l'expression $z^3 - z^2 + z - 1$ peut se factoriser par $(z-1)$.
Si p est racine d'un polynôme en z, alors celui-ci peut se factoriser par $(z-p)$.
Le nombre 1 est racine du polynôme, donc il peut se factoriser par $(z-1)$.

b. Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E').
En factorisant on obtient :

$$(E') \iff (z-1)(z^2+1) = 0 \iff (z-1)(z-i)(z+i) = 0$$

C'est une équation produit nul. L'ensemble solution est donc : $S' = \{1, i, -i\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ une solution de l'équation (E).

a. Montrer que z vérifie aussi l'équation : $\quad z(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$.
On sait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs conjugués le sont. Appliquons les compatibilités de la conjugaison avec l'addition et la multiplication.

$$(E) \iff \overline{\overline{z}(z-1)} = \overline{z^2(\overline{z}-1)} \iff z(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$$

b. En déduire que $\overline{z}z = 1$. *(question difficile)*
Partons de la condition (E) : $\quad \overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.
L'égalité établie à la question **3.a.** nous permet de remplacer $z(\overline{z}-1)$ par $\overline{z}^2(z-1)$ pour obtenir une nouvelle condition sur z :

$$\overline{z}(z-1) = z \times \overline{z}^2(z-1)$$

Comme $z \notin \{0, 1\}$, on peut diviser chaque membre de l'égalité par $\overline{z}$ et par $(z-1)$ pour obtenir : $\quad \overline{z}z = 1$.

c. En remplaçant $\overline{z}$ par son expression en fonction de z dans l'équation (E), établir qu'elle est, dans ce cas, équivalente à l'équation (E').
Étant entendu que $z \neq 0$ on a : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc l'équation (E) peut s'écrire :

$$\frac{1}{z}(z-1) = z^2\left(\frac{1}{z}-1\right) \quad \Longleftrightarrow \quad z-1 = z^2(1-z) \quad \Longleftrightarrow \quad (E')$$

4. Donner, en justifiant, l'ensemble des solutions de l'équation (E).
L'équation (E') n'a pas d'autre solution que celles obtenues à la question **1**. On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{0, 1, i, -i\}$.

Exercice 8 : Équation différentielle, continuité, dérivabilité et raccordement

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$t^2 y' + (1-t)y = t \qquad (E)$$

1. En posant $t = 0$, déterminer une condition sur toute solution y de l'équation.
En posant $t = 0$ on écrit : $y(0) = 0$. La fonction y doit s'annuler en 0.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient l'équation (E).
Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E) est équivalente à *(l'équation « normalisée »)* :

$$y' + \frac{1-t}{t^2}y = \frac{1}{t} \qquad (E')$$

L'équation homogène *(également appelée « sans second membre »)* associée à (E') est :

$$y' + \frac{1-t}{t^2}y = 0 \qquad (H')$$

Ses solutions sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-A(t)}$, C étant une constante réelle quelconque et A une primitive de la fonction

$$a : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1-t}{t^2} = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t} = -\left(\dfrac{1}{t} + \ln(|t|)\right)' \end{array}.$$

Or sur $\mathbb{R}_+^*$: $|t| = t$.
Les solutions de (H') sont donc les fonctions :

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & C\mathrm{e}^{\frac{1}{t}+\ln(t)} = C\,t\,\mathrm{e}^{1/t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On remarque que la fonction identité *($t \mapsto t$)* est solution de l'équation (E') *(avec second membre)*. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E') est équivalente à l'équation (E).
L'ensemble recherché est donc :

$$S = \left\{t \mapsto C\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque : Si on ne remarque pas que la fonction identité est solution de (E') (ou de (E)), on met en oeuvre la méthode désignée par l'oxymore « variation de la constante » :

Cherchons une solution particulière h de (E') définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(t) = C(t)t\mathrm{e}^{1/t}, \quad C \textit{ étant une fonction dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On a

$$h'(t) = C'(t)t\mathrm{e}^{1/t} + C(t)\left(\mathrm{e}^{1/t} + t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{1/t}\right) = \mathrm{e}^{1/t}\left(C'(t)t + C(t)\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right).$$

La fonction h est solution de (E') :

$$h'(t) + \frac{1-t}{t^2}h(t) = \frac{1}{t}$$

soit

$$\mathrm{e}^{1/t}\left(C'(t)t + C(t)\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right) + \frac{1-t}{t^2}C(t)t\mathrm{e}^{1/t} = \frac{1}{t}$$

soit

$$C'(t) = \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}$$

On reconnaît une forme primitivable dont une primitive est définie par :

$$C(t) = \mathrm{e}^{-1/t}.$$

D'où la fonction h définie par :

$$h(t) = t$$

3. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ qui vérifient l'équation (E).
(On pourra récupérer des résultats de la question précédente)
Sur $\mathbb{R}_-^*$ la résolution est identique, à ceci près qu'une primitive A est : $\quad t \mapsto -\dfrac{1}{t} - \ln(|t|)$, et qu'elle conduit à ces solutions de l'équation homogène :

$$t \mapsto D\mathrm{e}^{\frac{1}{t}+\ln(|t|)} = D|t|\mathrm{e}^{1/t} = -Dt\mathrm{e}^{1/t}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

(on a choisi un autre nom pour la constante sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle peut être différente de celle sur $\mathbb{R}_+^*$)
La constante D parcourant $\mathbb{R}$, on peut tout aussi bien la remplacer par $-D$ afin de simplifier l'écriture. Finalement l'ensemble solution sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation (E) peut s'exprimer de la même façon que sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$S = \left\{t \mapsto D\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t,\ D \in \mathbb{R}\right\}$$

4. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E).

Une telle solution doit être une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *(appartenant à l'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$)*.
La dérivabilité est assurée sur $\mathbb{R}^*$ pour toute solution de (E) comme solution d'une équation différentielle.
Commençons par étudier la continuité en 0 à gauche puis à droite.

On a : $\quad \mathrm{e}^{1/t} \underset{0^-}{\longrightarrow} 0 \quad$ par composition. Donc par produit : $\forall D \in \mathbb{R}, \quad D\,t\,\mathrm{e}^{1/t} \underset{0^-}{\longrightarrow} 0.$

Nous avons vu à la question **1.** que toute solution de (E) doit s'annuler en 0. Le prolongement par continuité en 0 de toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ est donc compatible avec la condition énoncée à la question **1.**.

En outre : $\forall t > 0,\ t\mathrm{e}^{1/t} = \dfrac{\mathrm{e}^u}{u}$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$.
Donc

$$\lim_{t\to 0^+} t\mathrm{e}^{1/t} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.}$$

Dès lors si la constante C est différente de 0, la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ne peut être solution sur $\mathbb{R}^+$ car elle ne serait pas continue en 0.
Par contre si $C = 0$, on obtient la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$ qui satisfait aux conditions.

En conclusion, on peut affirmer que les seules solutions possibles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par

$$f(t) = Dt\mathrm{e}^{1/t} + t, \quad D \in \mathbb{R},$$

et sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = t$.

Testons la dérivabilité en 0.
La dérivée à droite est 1.
En outre, pour tout $x < 0$:

$$f'(x) = D\left(\mathrm{e}^{1/t} + t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) \times \mathrm{e}^{1/t}\right) + 1$$

Donc, par composition, produit et somme :

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$$

Pour toute valeur de la constante D, la fonction f candidate est dérivable en 0.

On en conclut que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f qui :
sur $\mathbb{R}_-$ sont définies par $f(x) = D\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t$, D étant une constante quelconque ;
sur $\mathbb{R}_+$ sont définies par $f(x) = x$.

Remarque : On peut vérifier qu'en particulier la fonction identité est solution.

Exercice 9 : Suite définie par une relation de récurrence

On considère la fonction : $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{x^2+4}{2}} \end{array}$$

et la suite u définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer sur un même graphique le graphe de f et la première bissectrice du repère, en précisant la position relative des deux courbes.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, quotient, et composée de fonctions dérivables. Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{2(x^2+4)}}$$

Elle est du signe de x, donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, et admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = \sqrt{2}$.

<u>Autre méthode</u> : La fonction f est composée de la fonction carré qui est croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, d'une fonction affine croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$, et de la fonction racine carrée croissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or f est paire, donc par symétrie elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

On a $f(2) = 2$.

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > x$.
Si x est négatif, l'inégalité est vérifiée car f est minorée par 0.
Si x est positif, par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$, l'inéquation est équivalente à

$$\frac{x^2+4}{2} > x^2 \iff x^2 < 4 \iff x < 2$$

On en déduit que le graphe de f est « au-dessus » de la première bissectrice sur $]-\infty, 2[$, et « en dessous » sur $]2, +\infty[$.

2. Prouver que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f.
Sur $[0, 2]$ la fonction f est strictement croissante donc :

$$f([0,2[) \subset [f(0), f(2)[= \left[\sqrt{2}, 2\right[\subset [0, 2[$$

L'intervalle $[0, 2[$ est donc bien stable par f.

3. On suppose ici $u_0 \in [0; 2[$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 2[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $u_n \in [0, 2[$, alors, par stabilité de l'intervalle $[0, 2[$ par f, $f(u_n) = u_{n+1} \in [0, 2[$.
Or $u_0 \in [0, 2[$ par hypothèse.
On conclut donc par récurrence que la suite u est minorée par 0 et majorée strictement par 2.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait que tous les termes de la suite u sont dans l'intervalle $[0, 2[$, donc la position relative du graphe de la fonction f et de la première bissectrice du repère établie à la question **1.** nous permet d'écrire :

$$f(u_n) > u_n \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} > u_n$$

On en conclut, par définition de la stricte croissance d'une suite, que u est strictement croissante.

Remarque : La position relative du graphe de la fonction itératrice par rapport à la première bissectrice du repère nous permet d'établir la monotonie de la suite u sans avoir à recourir à une démonstration par récurrence.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
La suite u est croissante et majorée par 2, donc elle converge.
Sa limite est un point fixe de la fonction itératrice f, or il existe un seul point fixe.
On en conclut :

$$u \to 2$$

4. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 > 0$.
Le cas $u_0 \in]0, 2[$ a déjà été traité à la question précédente.
Sur l'intervalle $[2, +\infty[$ la fonction f est croissante donc :

$$f([2, +\infty[) \subset \left[f(2), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [2, +\infty[$$

L'intervalle $[2, +\infty[$ est donc stable par f.

*Remarque : On peut établir directement la décroissance de la suite u si $u_0 \geqslant 2$ à l'aide des positions relatives du graphe de la fonction itératrice et de la première bissectrice du repère comme à la question **3.b.**, mais ci-dessous la preuve est réalisée en utilisant seulement la croissance de la fonction f et l'ordre entre les deux premiers termes.*

Si $u_0 \geqslant 2$, on sait d'après la question 1. que $f(u_0) \leqslant u_0$, soit $u_1 \leqslant u_0$.
Or la fonction f est croissante sur $[2, +\infty[$, donc si pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors on a aussi :

$$f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \qquad \text{soit} \qquad u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

On en conclut par récurrence que la suite u est décroissante.

La suite u est décroissante et minorée par 2, donc elle converge.
Sa limite est un point fixe de la fonction itératrice f, or il existe un seul point fixe. On en conclut :

$$\boxed{u \to 2}.$$

5. Déterminer la convergence de la suite u selon les valeurs de u_0.
Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ la fonction f est strictement décroissante donc :

$$f(]-\infty, 0]) \subset \left[f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[= \left[\sqrt{2}, +\infty\right[\subset \mathbb{R}^+$$

La suite extraite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient donc à l'un des cas traités précédemment. On en conclut *(il s'agit de la proposition 5 (Indifférence des premiers termes) du paragraphe 3.1 du chapitre 9)* que quelle que soit la valeur du premier terme u_0, la suite u converge vers 2.

6. *Question bonus* : vitesse de convergence

On se place dans le cas où $u_0 \in [0, 2]$.

a. Déterminer le plus petit réel k tel que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant k|u_n - 2|$$

Sur l'intervalle $[0, 2]$ la fonction f' est croissante, donc minorée par $f'(0) = 0$ et majorée par $f'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{2 \times 8}} = \dfrac{1}{2}$.

Donc sur $]0, 2[$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis *(version corollaire)* :

$$|f(u_n) - f(2)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|$$

soit

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|$$

Remarque : On pourrait démontrer que $\frac{1}{2}$ est la plus petite valeur possible de k, mais on sortirait des questions standard.

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |u_n - 2| \leqslant k^n|u_0 - 2|$$

L'inégalité est trivialement vraie au rang $n = 0$.

Si elle est vraie à un rang n donné alors, d'après le résultat précédent :

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$$

Elle donc aussi vraie *(dans le cas où elle est vraie au rang n !)* au rang $n + 1$.

On conclut par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad |u_n - 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|.$$

Remarque : Ce résultat seul permettrait d'établir que la suite u converge vers 2, d'après le théorème sur la limite d'une suite géométrique, par produit de limite, et par encadrement, si on veut.

Approfondissement, exploration, recherche

Problème : Somme des inverses des carrés des premiers entiers

La finalité de ce problème est de démontrer que la suite des sommes S_n des inverses des carrés des n premiers entiers naturels non nuls

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admet elle une limite finie et d'en déterminer la valeur.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\times 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}[\sin(2t)]_0^{\pi/2} + \left[\frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. En observant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\quad I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t,$
montrer, à l'aide d'une intégrations par partie :

$$I_{n+1} = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a :

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+1} = \left[\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\times(2n+1)\cos^{2n}(t)(-\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+1} = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\
I_{n+1} &= (2n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
I_{n+1} &= (2n+1)(I_n - I_{n+1})
\end{aligned}$$

4. Établir la relation de récurrence : $\qquad I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

$$I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \iff (2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n \iff I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n$$

5. Démontrer rigoureusement que pour tout entier naturel n on a : $\quad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

On a : $I_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
La formule est donc valable pour $n = 0$.
Si, pour une valeur donnée de n on a : $\quad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, $\quad$ alors :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2\times(n+1)\times 2^{2n}\times(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)\times 2(n+1)}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Si la formule est valable à un rang donné quelconque, alors elle est valable au rang suivant. Comme elle est valable au rang zéro, on conclut par récurrence que la formule est aussi valable pour tout entier naturel n.

Autre méthode : On a, par récurrence immédiate :

$$\begin{aligned}
I_n &= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2}I_0 \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\ldots\times 4\times 2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots\times 3\times 2\times 1}{(2n)^2(2n-2)^2\ldots\times 4^2\times 2^2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^2(n^2)2^2(n-1)^2\ldots\times 2^2\times 2^2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2)^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Partie II : Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Calculer J_0

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$$

7. **a.** Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant t^2 \cos^{2n+2}(t) \leqslant t^2 \cos^{2n}(t).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On a : $0 \leqslant |\cos(t)| \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \cos^2(t) \leqslant 1$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.
Or $t^2 \cos^{2n}(t) \geqslant 0$. On a donc bien, pour tout entier naturel n et tout réel t, en particulier dans l'intervalle considéré :

$$0 \leqslant t^2 \cos^{2n+2}(t) \leqslant t^2 \cos^{2n}(t).$$

b. En déduire que la suite (J_n) est positive et décroissante.
En appliquant le théorème de croissance de l'intégrale à chaque membre de la double inégalité établie à la question précédente on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$$

On en déduit que la suite (J_n) est positive et décroissante.

8. **a.** En écrivant $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$, prouver à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I_n = 2n \int_0^{\pi/2} t \cos^{2n-1}(t) \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[t \cos^{2n}(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t \times 2n \cos^{2n-1}(t)(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= 2n \int_0^{\pi/2} t \cos^{2n-1}(t) \sin(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

b. A l'aide d'une nouvelle intégration par partie, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

$$\begin{aligned}
I_n &= 2n \int_0^{\pi/2} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2n\left[\frac{1}{2}t^2\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} \\
&\quad - 2n\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}t^2\left((2n-1)\cos^{2n-2}(t)(-\sin(t))\sin(t)+\cos^{2n-1}(t)\cos(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^{\pi/2} t^2\left((2n-1)\cos^{2n-2}(t)(-\sin^2(t))+\cos^{2n}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^{\pi/2} t^2\left((2n-1)\cos^{2n-2}(t)(\cos^2(t)-1)+\cos^{2n}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^{\pi/2} t^2\left((2n-1)\cos^{2n}(t)-(2n-1)\cos^{n-2}(t)+\cos^{2n}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^{\pi/2} t^2\left(2n\cos^{2n}(t)-(2n-1)(\cos^{n-2}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n
\end{aligned}$$

9. Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}J_n$.

Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
K_{n-1} - K_n &= \frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}J_{n-1} - \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}J_n \\
&= \frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}\left(J_{n-1} - \frac{2^2\times n^2}{2n(2n-1)}J_n\right) \\
&= \frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}\left(J_{n-1} - \frac{2n}{2n-1}J_n\right) \\
&= \frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!\times n(2n-1)}\left(n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n = I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

d'après les résultats des questions **8.b** et **5**.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
K_{n-1} - K_n &= 2\times\frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{2n(2n-1)(2n-2)!}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= 2\times\frac{2^{2n-2}}{2^{2n}}\times\frac{((n-1)!)^2}{(n!)^2}\times\frac{(2n)!}{(2n!)}\times\frac{\pi}{2} \\
&= 2\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{n^2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4n^2}
\end{aligned}$$

10. En déduire que pour tout entier naturel non nul N on a : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{24}-K_N$.

En sommant terme à terme les égalités obtenues à la question précédente pour n allant de 1 à N on obtient :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}(K_{n-1}-K_n)=K_0-K_N$$

Or $\quad K_0=J_0=\dfrac{\pi^3}{24}\quad$ d'après la question **6.**.

On a donc bien :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{24}-K_N$$

Partie III. Calcul de la limite

Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 1-\dfrac{\pi}{2}\cos(x)\end{array}$.

11. Établir que la fonction f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur J, où J est un intervalle que l'on précisera.

La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et $\quad\forall x\in\mathscr{D}_f,\ f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\sin(x)>0$.
La fonction f est donc continue et strictement croissante, elle réalise par conséquent une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers

$$J=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[1-\frac{\pi}{2},1\right].$$

12. Montrer que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.
(*on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de* α).
En déduire le signe de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On observe que 0 est dans J, donc il admet un unique antécédent α par f dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
La stricte croissance de f nous permet d'affirmer que $f(x)<0$ sur $[0,\alpha]$ et $f(x)>0$ sur $\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

13. Démontrer que pour tout réel $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\quad x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

Soit $g\ :\ \begin{array}{ccc}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x-\dfrac{\pi}{2}\sin(x)\end{array}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$ et $\quad\forall x\in\mathscr{D}_g,\ g'(x)=f(x)$.
Le signe de f établi à la question précédente nous permet de connaître les variations de la fonction g sur $\mathscr{D}_g=\mathscr{D}_f$: décroissante puis croissante.

Or $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
On en conclut que 0 est un maximum de la fonction g, c'est à dire :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \qquad x - \frac{\pi}{2}\sin(x) \leqslant 0 \quad \iff \quad x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(x).$$

Remarque : On verra au chapitre sur la dérivation qu'il y a une façon plus élégante d'obtenir ce résultat.

14. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.

D'après le résultat ci-dessus :
$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t) \\
\iff \quad & 0 \leqslant t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t) \qquad \text{par croissance de la fonction carré sur} \mathbb{R}^+ \\
\iff \quad & 0 \leqslant t^2\cos^{2n}(t) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cos^{2n}(t)\sin^2(t) = \frac{\pi^2}{4}\left(\cos^{2n}(t) - \cos^{2(n+1)}(t)\right) \\
\iff \quad & \int_0^{\pi/2} 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale.
Or il a été établi à la question que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$, donc :

$$I_n - I_{n+1} = I_n - \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{1}{2n+2} I_n$$

On obtient donc finalement bien : $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.

15. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}$.

16. Conclure.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

$\sim$