DM 3 de mathématique

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

$$S = \left\{ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}} \, , \, \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} \, , \, \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}} \right\}$$

2. $\mathrm{i}z^2 + (4 - \mathrm{i})z - 3(1 + \mathrm{i}) = 0$

$$S = \{3\mathrm{i} \, , \, 1 + \mathrm{i}\}$$

Exercice 2

On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

2. Restriction de la fonction f.

a. Justifier que la fonction f admet une restriction sur l'intervalle $I = [0, 1[$.
On la notera $f_|$.

b. Justifier que $f_|$ réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

c. Déterminer la fonction réciproque $f_|^{-1}$ de la fonction $f_|$.

$$f_|^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4x + 16} + x\right)$$

d. Pour les deux fonctions $f_|$ et $f_|^{-1}$, donner , s'il en existe, un majorant, un minorant, le maximum, le minimum.
La fonction $f_|$ n'admet pas de majorant ni de minorant, donc pas de maximum ni de minimum.
La fonction $f_|^{-1}$ est majorée par 1 mais n'a pas de maximum sur J. Elle n'a pas de minorant, donc pas minimum.

3. Déterminer l'image de f.
$f(\mathscr{D}_f) = \mathbb{R}$.

4. Calcul d'intégrale

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

$(a, b, c) = (-1, -1, 3)$ soit $f(x) = -x - 1 + \dfrac{3}{x-1}$.

b. Calculer : $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$3\ln(2) - \dfrac{7}{2}$

Exercice 3

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

non monotone

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

décroissante

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

non monotone

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

strictement décoissante

Exercice 4

Déterminer la limite des suites suivantes définies sous forme explicite, ou établir qu'elles n'en ont pas.

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

0

2. $u_n = \sqrt[n]{n^3}$

1

3. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \sin(n^2)$

0

Exercice 5

Étudier la continuité et les possibles prolongements par continuité des fonctions réelles f définies sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ à déterminer par :

1. $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1+x}$
La fonction f est prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\tilde{f}$ qui vérifie : $\tilde{f}(0) = 0$.

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$
continue sur $\mathbb{R}$

3. $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
La fonction f est discontinue en chaque point de $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$, mais prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\tilde{f}$ qui vérifie : $\tilde{f}(0) = 1$.

Exercice 6

Pour chaque suite réelle ci-dessous, déterminer une formule explicite, et étudier la monotonie et la convergence.

1. La suite u définie par $u_0 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} :\quad u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$
$u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite -3.

2. La suite v définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} :\quad v_{n+2} = \dfrac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$
$v_n = \dfrac{2}{7}2^n - \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$.
La suite v n'est pas monotone et tend vers $+\infty$.

Coeur de cible

Exercice 7 : Équation complexe

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1) \qquad (E)$$

1. Montrer que les nombres $0, 1, i$ et $-i$ sont solution de l'équation (E).

2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \quad (E')$.

- **a.** Justifier que l'expression $z^3 - z^2 + z - 1$ peut se factoriser par $(z-1)$.
- **b.** Déterminer l'ensemble solution de l'équation (E').
  $S' = \{1, i, -i\}$

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ une solution de l'équation (E).

- **a.** Montrer que z vérifie aussi l'équation : $\quad z(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$.
- **b.** En déduire que $\overline{z}z = 1$. *(question difficile)*
- **c.** En remplaçant $\overline{z}$ par son expression en fonction de z dans l'équation (E), établir qu'elle est, dans ce cas, équivalente à l'équation (E').

4. Donner, en justifiant, l'ensemble des solutions de l'équation (E).
$S = \{0, 1, i, -i\}$

Exercice 8 : Équation différentielle, continuité, dérivabilité et raccordement

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$t^2 y' + (1-t)y = t \qquad (E)$$

1. En posant $t = 0$, déterminer une condition sur toute solution y de l'équation.
$y(0) = 0$

2. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient l'équation (E).
$S = \left\{t \mapsto C\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t,\ C \in \mathbb{R}\right\}$

3. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ qui vérifient l'équation (E).
(On pourra récupérer des résultats de la question précédente)
$S = \left\{t \mapsto D\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t,\ D \in \mathbb{R}\right\}$

4. Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E).

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f qui :
sur $\mathbb{R}_-^*$ sont définies par $f(t) = D\,t\,\mathrm{e}^{1/t} + t$, D étant une constante quelconque ;
sur $\mathbb{R}_+$ sont définies par $f(t) = t$.

Exercice 9 : Suite définie par une relation de récurrence

On considère la fonction : $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{x^2+4}{2}} \end{array}$

et la suite u définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Tracer sur un même graphique le graphe de f et la première bissectrice du repère, en précisant la position relative des deux courbes.
   Le graphe de f est « au-dessus » de la première bissectrice sur $]-\infty, 2[$, et « en dessous » sur $]2, +\infty[$.

2. Prouver que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f.
   $f([0,2[) \subset [f(0), f(2)[= \left[\sqrt{2}, 2\right[\subset [0,2[$

3. On suppose ici $u_0 \in [0; 2[$.
   - **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 2[$.
   - **b.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   - **c.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
     2

4. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 > 0$.
   Le cas $u_0 \in]0, 2[$ a déjà été traité à la question précédente.
   Si $u_0 > 2$, la suite u est décroissante et converge vers 2.

5. Déterminer la convergence de la suite u selon les valeurs de u_0.
   Quelle que soit la valeur du premier terme u_0, la suite u converge vers 2.

Approfondissement, exploration, recherche

Problème : Somme des inverses des carrés des premiers entiers

La finalité de ce problème est de démontrer que la suite des sommes S_n des inverses des carrés des n premiers entiers naturels non nuls

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admet elle une limite finie et d'en déterminer la valeur.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
$I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

2. En observant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\quad I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t,$
montrer, à l'aide d'une intégrations par partie :

$$I_{n+1} = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1}).$

4. Établir la relation de récurrence : $\quad I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n.$

5. Démontrer rigoureusement que pour tout entier naturel n on a : $\quad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.$

Partie II : Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$

6. Calculer J_0

$$J_0 = \frac{\pi^3}{24}.$$

7. **a.** Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant t^2\cos^{2n+2}(t) \leqslant t^2\cos^{2n}(t).$$

b. En déduire que la suite (J_n) est positive et décroissante.

8. **a.** En écrivant $I_n = \int_0^{\pi/2} 1 \times \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$, prouver à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I_n = 2n \int_0^{\pi/2} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. A l'aide d'une nouvelle intégration par partie, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

9. Pour tout entier naturel n, on pose : $K_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} J_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$.

10. En déduire que pour tout entier naturel non nul N on a : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$.

Partie III. Calcul de la limite

Soit $f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \frac{\pi}{2}\cos(x) \end{array}$.

11. Établir que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur J, où J est un intervalle que l'on précisera.

$$J == \left[1 - \frac{\pi}{2}, 1\right]$$

12. Montrer que la fonction f s'annule en un unique réel α tel que : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
(*on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de* α).
En déduire le signe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f(x) < 0$ sur $[0, \alpha]$ et $f(x) > 0$ sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.

13. Démontrer que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

14. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.

15. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\quad 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}$.

16. Conclure.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

$\sim$