Test 4 de mathématique

Proposition de corrigé

Exercice 1 : Dérivabilité

On donne la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x)-1}{x} \end{array}$$

1. Justifier que f est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
La fonction f est la somme et le quotient de fonctions continues et dérivables, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. Déterminer la fonction dérivée de f.

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\times x - (\cos(x)-1)}{x^2} = \frac{1-\cos(x) - x\sin(x)}{x^2}$$

3. Continuité en 0

a. Justifier que la fonction f est le taux de variation de la fonction cosinus en 0.
Par définition, le taux de variation de la fonction cosinus en 0 est la fonction définie sur $\mathscr{D}_{\cos}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$ par :

$$\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = f(x)$$

b. En déduire que la fonction f admet une limite finie en 0 et déterminer cette limite.
La fonction cosinus est dérivable en 0 et : $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$.
Mais aussi, par définition de la dérivée : $\cos'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
On en déduit :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

c. En déduire un prolongement par continuité de la fonction f en 0.
Dans la suite nous appellerons encore f ce prolongement.
On obtient donc un prolongement par continuité de la fonction f en posant : $f(0) = 0$.

4. Dérivabilité en 0

a. Montrer que pour tout réel x non nul : $\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$
On a :

$$\frac{f(2x)-f(0)}{2x} = \frac{\cos(2x)-1}{4x^2}$$

Or $\cos(2x) = 1-2\sin^2(x)$ d'où :

$$\frac{f(2x)-f(0)}{2x} = \frac{-2\sin^2(x)}{4x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

b. En déduire la dérivabilité de la fonction f en 0.

Le quotient $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est le taux de variation de la fonction sinus en 0, donc :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \cos(0) = 1$$

or, par composition :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(0)}{2x} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)-f(0)}{u-0}$$

On en déduit, par produit de limite, d'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(u)-f(0)}{u-0} \xrightarrow[u\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Par définition de la dérivabilité, on en conclut que la fonction f est dérivable en 0 avec

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

c. En déduire que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-x\sin(x)}{x^2}$ est un réel, que l'on déterminera.

On reconnaît la limite en 0 de $f'(x)$, qui, d'après le théorème sur la limite de la dérivée *(théorème 11 chapitre 12)*, est égale à $f'(0)$.

On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-x\sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 2 : Suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la propriété :

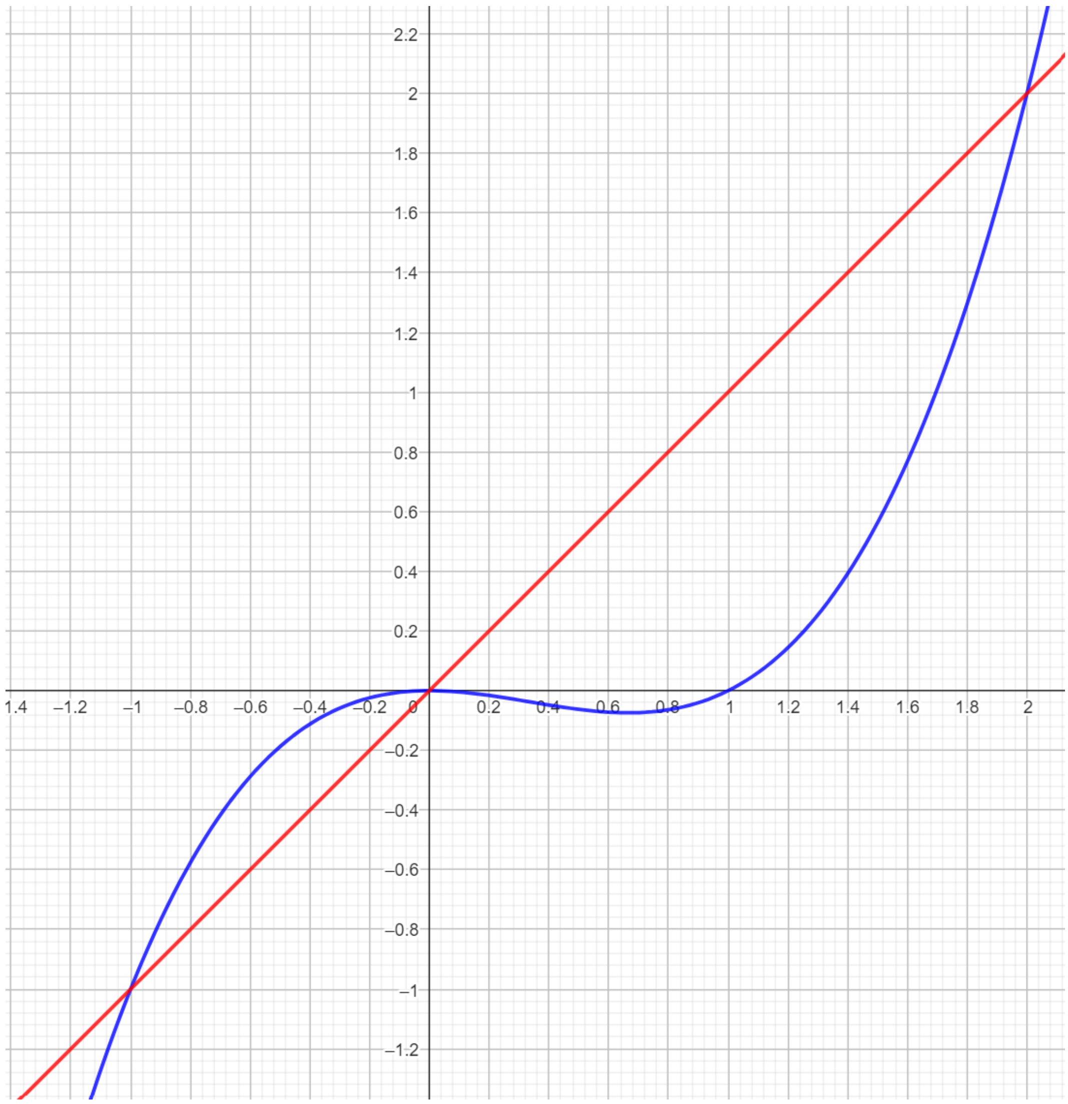
$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2(u_n - 1).$$

1. **Considérations sur une fonction**

   On considère la fonction $f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^2(x-1) \end{array}$.

   Une représentation du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en repère orthonormé est donnée ci-dessous, accompagnée du graphe Δ de la fonction identité.

   Aucun résultat que permettrait de conjecturer cette illustration ne sera pris pour vrai sans démonstration.



a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
La fonction f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 2x) = \frac{1}{2}x(3x-2)$$

D'après la règle du signe d'un produit : $f'(x)$ est négatif sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ et positif ailleurs.

b. Justifier que l'intervalle $[0,2]$ n'est pas stable par f.
On a : $f(0,5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.
Donc $f(0,5) \notin [0,2]$, l'intervalle $[0,2]$ n'est donc pas stable par f.

c. Même question pour l'intervalle $[1,2]$.
On calcule : $f(1) = 0 \notin [1,2]$.
Donc l'intervalle $[1,2]$ n'est pas stable par f.

d. Déterminer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = x$.
Pour tout réel x on a :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x^2(x-1) - x = 0 \iff x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x(x+1)(x-2) = 0$$

Les points fixes de f sont donc -1, 0 et 2.

e. Déterminer un point d'inflexion de la fonction f.
La dérivée seconde de la fonction f est définie par : $\quad f''(x) = 3x - 1$.
On reconnaît une fonction affine qui s'annule et change de signe en $\frac{1}{3}$.
La fonction f admet donc un point d'inflexion en $\frac{1}{3}$ d'après la caractérisation des points d'inflexions pour les fonctions deux fois dérivables.
(Chapitre 12 §4.4 Proposition 12).

2. Cas où $u_0 < -1$

a. Justifier que $u_1 \leqslant u_0$.
La fonction f est la fonction itératrice de la suite u.
Pour tout réel x on a :

$$f(x) \leqslant x \quad \iff \quad x(x^2 - x - 2) \leqslant 0 \quad \iff \quad x(x+1)(x-2) \leqslant 0$$

On en déduit, d'après la règle du signe d'un produit, que si $x < -1$ alors $f(x) \leqslant x$, donc en particulier, que $f(u_0) \leqslant u_0$, soit :

$$u_1 \leqslant u_0.$$

b. Justifier que l'intervalle $]-\infty, -1[$ est stable par f.
La fonction f a une dérivée positive sur $]-\infty, -1[$, elle y est donc croissante et dès lors :

$$f(]-\infty, -1[) \subset \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to -1} f(x) \right[=]-\infty, -1[$$

L'intervalle $]-\infty, -1[$ est donc bien stable par f.

c. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
L'intervalle $]-\infty,-1[$ est stable par f et $u_0 \in]-\infty,-1[$, donc tous les termes de la suite u sont dans cet intervalle.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Alors, par croissance de la fonction f sur $]-\infty,-1[$: $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$,
c'est à dire : $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
Or $u_1 \leqslant u_0$, donc par récurrence on conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite u répond donc à la définition d'une suite décroissante.

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
La suite u est décroissante, donc d'après le théorème de convergence monotone, on sait qu'elle admet une limite.
Si cette limite est finie, il s'agit de l'un des points fixes de la fonction f.
(Chapitre 11 §5.2 Théorème 5 (Condition nécessaire sur une limite finie))
Or aucun point fixe n'appartient à l'adhérence *(cf. la définition 1 du chapitre 10)* de $]-\infty,u_0]$ qui contient tous les éléments de la suite u.
La limite de u n'étant pas finie, elle est infinie et appartient à l'adhérence de $]-\infty,u_0]$.
La seule possibilité est donc

$$u \to -\infty.$$

3. Cas où $u_0 \in]-1,0]$

a. Justifier que l'intervalle $]-1,0]$ est stable par f.
La fonction f a une dérivée positive sur $]-1,0]$, elle y est donc croissante et dès lors :

$$f(]-1,0]) \subset \left]\lim_{x\to -1} f(x), f(0)\right] =]-1,0]$$

L'intervalle $]-1,0]$ est donc bien stable par f.

b. Établir que la fonction f est concave sur l'intervalle $]-1,0]$.
On a :

$$x \leqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad 3x-1 \leqslant -1 \quad\Longrightarrow\quad f''(x) \leqslant 0.$$

La fonction f est donc concave en particulier sur $]-1,0]$.
(d'après la caractérisation de la convexité pour les fonctions deux fois dérivables)

c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la première bissectrice du repère Δ sur l'intervalle $]-1,0]$.
Par concavité de la fonction f sur l'intervalle $[-1,0]$, on peut affirmer que la corde d'extrémités $A(-1,f(-1))$ et $B(0,f(0)$ est située « sous » la courbe $\mathscr{C}_f$.
Or $A(-1,-1)$ et $B(0,0)$ appartiennent à la droite Δ.
On en conclut qu'en particulier sur l'intervalle $]-1,0]$, $\mathscr{C}_f$ est « au dessus » de Δ.

d. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par stabilité de l'intervalle $]-1,0]$ par la fonction itératrice f, on peut affirmer que comme $u_0 \in]-1,0]$, tous les termes de la suite u sont dans cet intervalle.
La position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ établie ci-dessus implique donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) \geqslant u_n \qquad \text{c'est à dire} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

On en conclut que la suite u est croissante.

e. Déterminer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite u est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers un réel, qui doit être un point fixe de f. *(mais pas nécessairement vers 0 à ce stade !)*
Or, par croissance de la suite u, tous ses termes appartiennent à l'intervalle $[u_0, 0[$.
Le seul point fixe appartenant à l'adhérence de l'intervalle $[u_0, 0[$ est 0. On en conclut :

$$u \to 0.$$

f. En déduire qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.
Utilisons la définition de la convergence d'une suite admettant une limite finie.
Chapitre 9 §3.1 définition 10

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \implies |u_n - 0| \leqslant \varepsilon).$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ on obtient :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \frac{1}{3}\right).$$

or u_n est négatif pour tout n, donc la condition finale s'écrit : $\quad u_n \geqslant -\dfrac{1}{3}$.
Il existe donc bien un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

Remarque : On est assuré que dans leur progression de la négativité vers la nullité, les termes de la suite vont franchir la marque $-\frac{1}{3}$ (si elle n'est pas déjà franchie, cas où $n_0 = 0$).

g. Vitesse de convergence d'une suite extraite
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+n_0}$ dont tous les termes sont dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

i. Calculer $f'(-\frac{1}{3})$.

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3) = \frac{1}{2}$$

ii. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n|$.

Remarque : On veut utiliser l'inégalité des accroissements finis

Sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}, 0]$, la dérivée seconde de f est négative, donc la dérivée de f est décroissante. Dès lors :

$$-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0 \implies f'(-\tfrac{1}{3}) \geqslant f'(x) \geqslant f'(0) \implies 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2} \implies |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

D'où, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in]-\tfrac{1}{3}, 0], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$

et en particulier :

$$\forall v_n, \quad |f(v_n) - f(0)| \leqslant \frac{1}{2}|v_n - 0|$$

On a donc bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|.$$

Remarque : La suite v tend au-moins aussi vite vers 0 que la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $\frac{1}{2}$.

iii. Calculer $f(-\frac{1}{3})$.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{27}$$

iv. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1}| \leqslant \frac{2}{9}|v_n|$.

La concavité de la fonction f sur $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$ nous assure que le taux de variation en 0 sur l'intérieur de cet intervalle est décroissant, *(Chapitre 12 §4.3 Théorème 13 (Caractérisation de la convexité par les pentes des sécantes)* donc :

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{3}, 0[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant \frac{f(-\frac{1}{3}) - f(0)}{-\frac{1}{3} - 0} = \frac{-\frac{2}{27}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}$$

En choisissant $x = v_n$ on obtient : $\dfrac{f(v_n)}{v_n} \leqslant \dfrac{2}{9}$.

Or la suite v est strictement négative, donc on a : $v_{n+1} \geqslant \frac{2}{9}v_n$.

Et par décroissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}^-$ on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{n+1}| \leqslant \frac{2}{9}|v_n|$$

Remarque : La suite v tend au-moins aussi vite vers 0 que la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $\frac{2}{9}$. Résultat plus fort que celui de la question ii.

v. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons $P(n)$ la propriété : $|v_n| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |v_0|$.

$P(0)$ est trivialement vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai.

Alors, d'après la question précédente :

$$|v_{n+1}| \leqslant \frac{2}{9}|v_n| \leqslant \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n |v_0| = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} |v_0|$$

c'est à dire que $P(n+1)$ est également vraie.

On en conclut par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

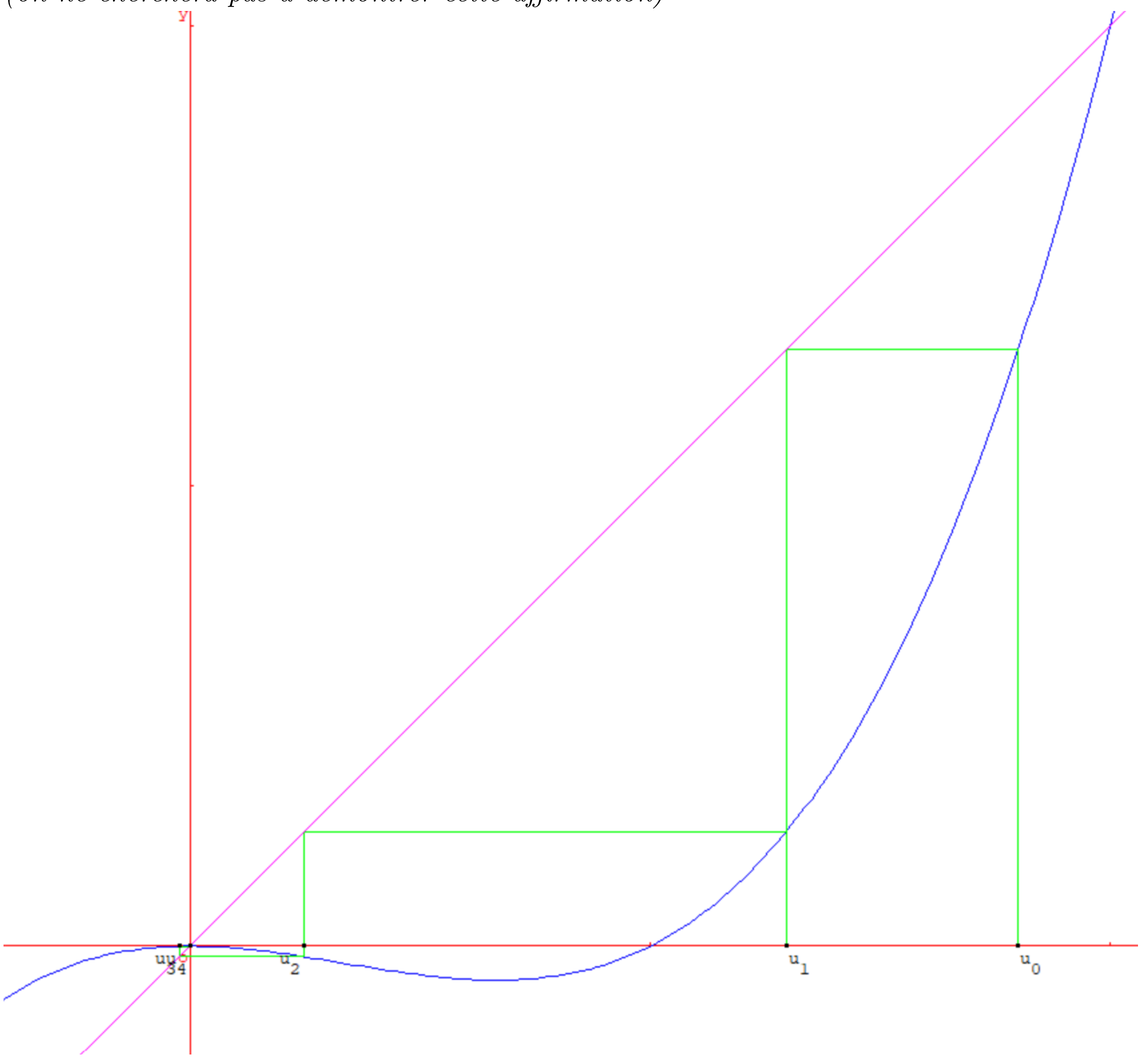
Or v_0 est un terme de la suite u qui est négative et croissante.

Dès lors : $v_0 \geqslant u_0$ et $|v_0| \leqslant |u_0|$.

On en conclut :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0|.$$

4. Déterminer la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \in]0,1[$.
On sait que la fonction f est négative sur $[0, \frac{2}{3}]$ et positive sur $[\frac{2}{3}, 1]$.
En outre : $f(0) = f(1) = 0$ et $f(\frac{2}{3}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{27} > -1$.
Sur l'intervalle $]0,1[$, la fonction f est donc majorée par 0 et minorée par -1.
Dès lors $u_1 = f(u_0) \in]-1, 0]$.
A partir du rang 1, la suite u a donc les mêmes caractéristiques que les suites de la question **3.**.
Ainsi $u_1 < 0 < u_0$ et $u_2 > u_1$.
On en déduit que la suite u n'est alors pas monotone mais converge vers 0.

5. Sur le graphique de la page précédente, construire soigneusement les cinq premiers termes de la suite u lorsque $u_0 = 1,8$.
En déduire une conjecture sur la monotonie et la convergence de la suite u lorsque $u_0 \in]0,2[$ *(on ne cherchera pas à démontrer cette affirmation)*



Conjecture : comme dans le cas précédent, la suite u n'est pas monotone mais converge *(vite !)* vers 0.

∼