Test 4 de mathématique

Prénom : .... *Nom :* ....

Les exercices peuvent être traités dans un ordre différent.

Exercice 1 : Dérivabilité

On donne la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x)-1}{x} \end{array}$$

1. Justifier que f est continue et dérivable sur son ensemble de définition.

2. Déterminer la fonction dérivée de f.

3. Continuité en 0

a. Justifier que la fonction f est le taux de variation de la fonction cosinus en 0.

b. En déduire que la fonction f admet une limite finie en 0 et déterminer cette limite.

c. En déduire un prolongement par continuité de la fonction f en 0.
Dans la suite nous appellerons encore f ce prolongement.

4. Dérivabilité en 0

a. Montrer que pour tout réel x non nul : $\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$

b. En déduire la dérivabilité de la fonction f en 0.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)-x\sin(x)}{x^2}$ est un réel, que l'on déterminera.

Exercice 2 : Suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la propriété :

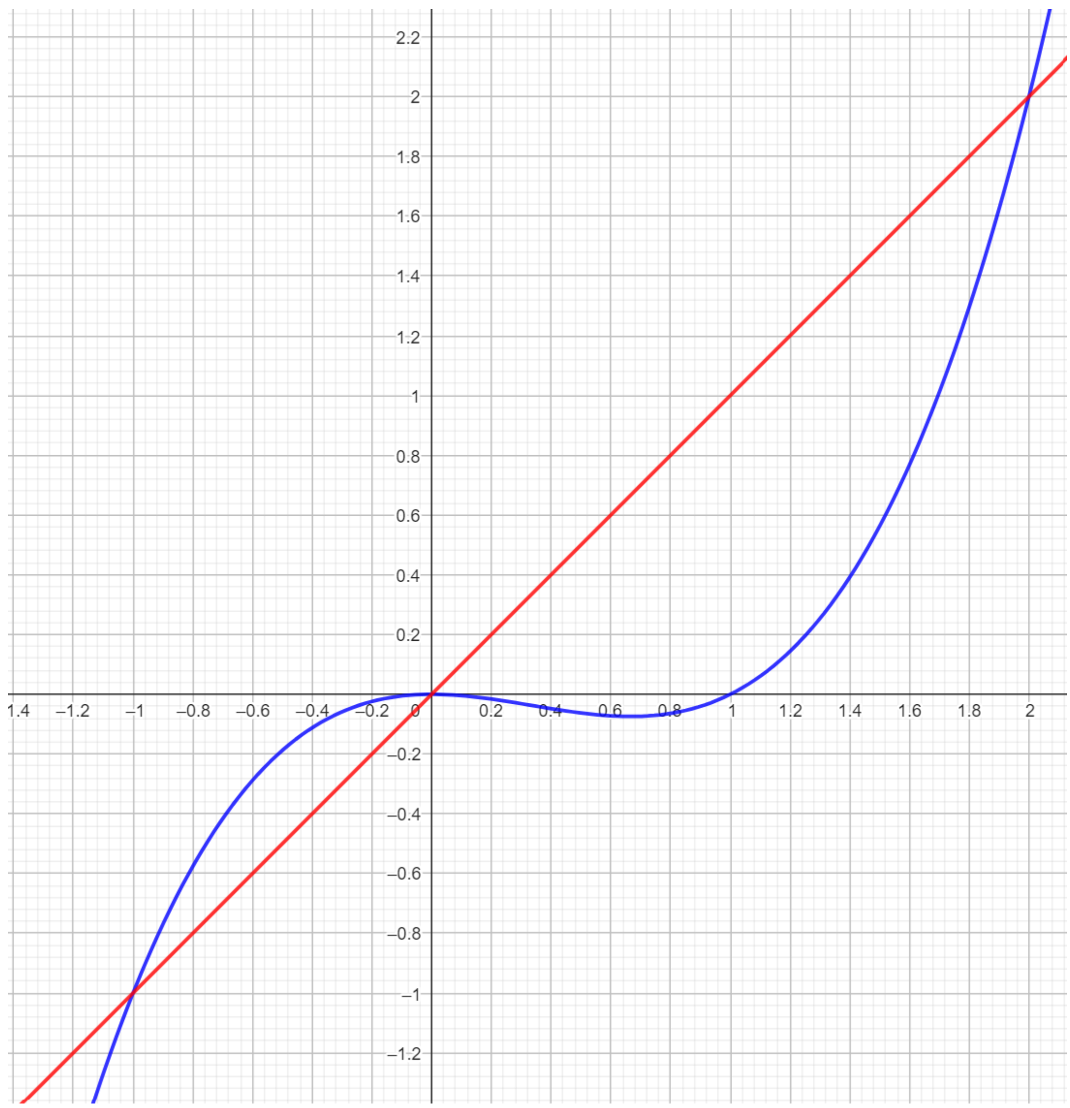
$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2(u_n - 1).$$

1. **Considérations sur une fonction**

   On considère la fonction $f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^2(x-1) \end{array}$.

   Une représentation du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en repère orthonormé est donnée ci-dessous, accompagnée du graphe Δ de la fonction identité.

   Aucun résultat que permettrait de conjecturer cette illustration ne sera pris pour vrai sans démonstration.



a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.

b. Justifier que l'intervalle $[0, 2]$ n'est pas stable par f.

c. Même question pour l'intervalle $[1, 2]$.

d. Déterminer les points fixes de la fonction f, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = x$.

e. Déterminer un point d'inflexion de la fonction f.

2. Cas où $u_0 < -1$

a. Justifier que $u_1 \leqslant u_0$.

b. Justifier que l'intervalle $]-\infty, -1[$ est stable par f.

c. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

3. Cas où $u_0 \in]-1, 0]$

a. Justifier que l'intervalle $]-1, 0]$ est stable par f.

b. Établir que la fonction f est concave sur l'intervalle $]-1, 0]$.

c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la première bissectrice du repère Δ sur l'intervalle $]-1, 0]$.

d. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e. Déterminer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f. En déduire qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

g. Vitesse de convergence d'une suite extraite
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+n_0}$ dont tous les termes sont dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

i. Calculer $f'(-\frac{1}{3})$.

ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n|$.

iii. Calculer $f(-\frac{1}{3})$.

iv. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{9}|v_n|$.

v. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0|.$$

4. Déterminer la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \in]0, 1[$.

5. Sur le graphique de la page précédente, construire soigneusement les cinq premiers termes de la suite u lorsque $u_0 = 1,8$.
En déduire une conjecture sur la monotonie et la convergence de la suite u lorsque $u_0 \in]0, 2[$ *(on ne cherchera pas à démontrer cette affirmation)*

∼