DS 5 de mathématique

Proposition de corrigé *(avec commentaires)*

Exercice : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

1. Calculer u_2 et u_3. Peut-on en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_2 = 2u_1 - 2u_0 = 2$ et $u_3 = 2u_2 - 2u_1 = 0$.

On a : $u_1 > u_0$ et $u_3 < u_2$, donc la suite u est non monotone.

2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \iff (r-1)^2 + 1 = 0 \iff (r-1-\mathrm{i})(r-1+\mathrm{i}) = 0$$

Les solutions sont donc les deux nombres complexes :

$$r_1 = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad r_2 = 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il existe donc un unique couple de réels (λ, μ) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_n = \sqrt{2}^n \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Pour $n = 0$ on a la condition : $\lambda = 1$.
Pour $n = 1$ on a la condition : $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mu\right) = 2$, soit $\mu = 1$.
D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

3. Convergence

a. Déterminer une suite v extraite de la suite u admettant $+\infty$ pour limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_{8n} = 16^n\left(\cos(2n\pi) + \sin(2n\pi)\right) = 16^n$$

La suite extraite v est donc une suite géométrique de limite $+\infty$.

b. Déterminer une suite w extraite de la suite u admettant $-\infty$ pour limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = u_{8n+4} = 4 \times 16^n\left(\cos(2n\pi + \pi) + \sin(2n\pi + \pi)\right) = -4 \times 16^n$$

La suite extraite w est donc une suite géométrique de limite $-\infty$.

c. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la suite u admet une limite, alors toutes ses suites extraites admettent cette même limite.
Or il a été établit aux questions **a.** et **b.** que la suite u possède deux suites extraites de limite différente. Par contraposée, on en conclut que la suite u n'admet pas de limite.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par : $a_n = 3^{-n/2}u_n$.

a. Déterminer la convergence de la suite a.
D'après la question **2.** on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 3^{-n/2}2^{n/2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}^{\,n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

La suite $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}^{\,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de limite nulle,
et la suite $\left(\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 2 et -2.
La suite a est donc le produit entre une suite bornée et une suite de limite nulle *(Chapitre 9 §4.1 Théorème 8 : Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle)* , c'est donc une suite de limite nulle.

b. Déterminer une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants que vérifie la suite a.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
Or $u_n = \sqrt{3}^{\,n} a_n$, donc : $\sqrt{3}^{\,n+2} a_{n+2} = 2 \times \sqrt{3}^{\,n+1} a_{n+1} - 2 \times \sqrt{3}^{\,n} a_n$.
D'où la relation de récurrence à coefficients constants :

$$3a_{n+2} = 2\sqrt{3}\,a_{n+1} - 2a_n \qquad \text{ou si l'on préfère :} \qquad a_{n+2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n$$

Problème : Suite récurrente d'ordre 1

On cherche à déterminer l'existence puis à étudier une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la propriété :

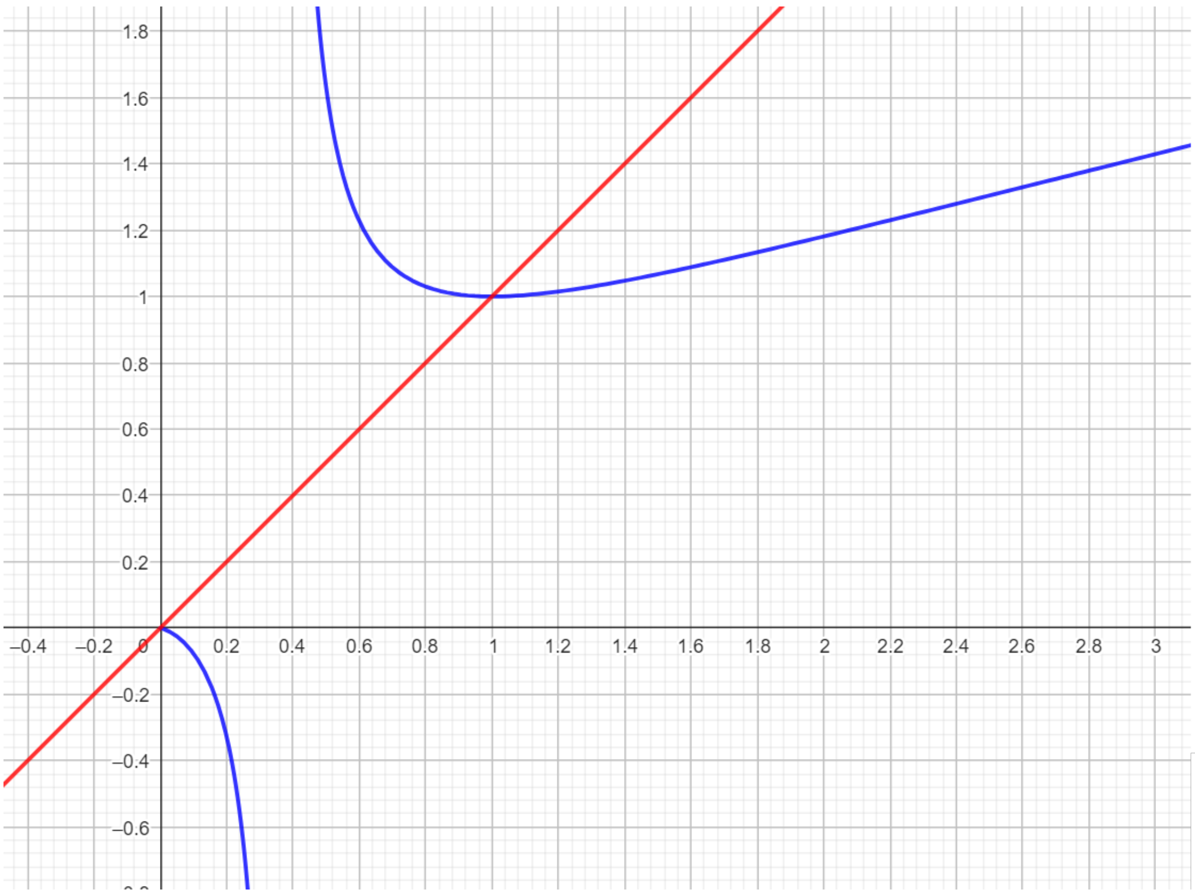
$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln(u_n)+1}.$$

1. Considérations sur une fonction

On considère la fonction : $\quad f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$.

Une représentation du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en repère orthonormé est donnée ci-dessous, accompagnée du graphe Δ de la fonction identité.

Aucun résultat que permettrait de conjecturer cette illustration ne sera pris pour vrai sans démonstration.



a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.
La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le dénominateur de la fraction s'annule si et seulement si $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. On en déduit : $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

b. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.
La fonction f est somme et quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, elle est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

c. Montrer que pour tout x de $\mathscr{D}$: $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2}$.
On a, pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) + 1 - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2}.$$

d. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathscr{D}$.
De même :

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x)+1)^2 - \ln(x) \times 2(\ln(x)+1) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^4} = \frac{\ln(x) + 1 - 2\ln(x)}{x(\ln(x)+1)^3} = \frac{1-\ln(x)}{x(\ln(x)+1)^3}.$$

e. Déterminer les intervalles de $\mathscr{D}$ où f est convexe et ceux où elle est concave.
En déduire l'existence d'un point d'inflexion.
On a :

$$1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e}$$

et

$$\ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

étrangeD'après la règle du signe d'un quotient on en déduit le signe de la fonction f'' : strictement positive sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right[$ et strictement négative dans l'intérieur de son complémentaire dans $\mathscr{D}$.

La fonction f est donc strictement convexe sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right[$, et strictement concave sur $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ ainsi que sur $]\mathrm{e}, +\infty[$.
La fonction f possède donc un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.
(pas flagrant en regardant la courbe...)

f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
Pour la suite, le même symbole f désignera ce prolongement.
On a : $\ln(x) + 1 \underset{0}{\rightarrow} -\infty$ par somme, donc par quotient : $f \underset{0}{\rightarrow} 0$.
La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

g. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

Méthode 1 : Utilisation du théorème 11 du chapitre 12 paragraphe 3.4.

On a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x)+1-1}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{1}{\ln(x)+1} - \frac{1}{(\ln(x)+1)^2} \underset{0}{\rightarrow} 0 \quad \text{par somme, produit et quotient.}$$

La fonction f est continue en 0 et sa dérivée admet une limite finie en 0, la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Méthode 2 : Utilisation de la définition du nombre dérivé

On a :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln(x) + 1} \underset{0}{\rightarrow} 0 \quad \text{par somme et quotient.}$$
Le taux de variation admet une limite finie *(i.e. converge)* en 0 donc, par définition, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Remarque : Finalement la seconde méthode est plus simple dans ce cas.

---

h. Déterminer les variations de la fonction f.

(faire un tableau de signe de la dérivée, et de variation de la fonction avec mention des extremums locaux)

On connaît le signe de la fonction ln, donc d'après la règle du signe d'un quotient et le théorème sur la caractérisation des fonctions monotones dérivables sur un intervalle *(Chapitre 13 paragraphe 3.4)* on peut affirmer que la fonction f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right[$, et croissante sur $]1, +\infty[$.

i. Déterminer les points fixes de la fonction f.
On sait que $f(0) = 0$ donc 0 est un point fixe.
Résolvons sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{x}{\ln(x) + 1} = x \iff \frac{1}{\ln(x) + 1} = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \iff \ln(x) + 1 = 1 \iff x = 1$$
Les points fixes de f sont donc 0 et 1.

j. Justifier que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f.
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f est croissante, donc :
$$f([1, +\infty[) \subset [f(1), +\infty[= [1, +\infty[$$

2. Valeurs possibles pour u_0

a. Si $u_0 \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.
La fonction f est définie sur $[1, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f, donc si u_0 appartient à cet intervalle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie.

b. Si $u_0 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.
Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.
Si $u_0 < 0$,la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie car f n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$.

c. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]0, 1/\mathrm{e}[$.
Si $u_0 \in]0, 1/\mathrm{e}[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.
Sur l'intervalle $]0, 1/\mathrm{e}[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec
$$f \xrightarrow[x \to 1/\mathrm{e}^-]{} -\infty$$

Donc

$$f\,(]0,1/\mathrm{e}[) =]-\infty,0[.$$

On en déduit que si $u_0 \in]0,1/\mathrm{e}[$, alors $u_1 < 0$, et u_2 ne sera pas défini.
La suite n'est donc pas définie si $u_0 \in]0,1/\mathrm{e}[$.

3. Cas où $u_0 = 2$

a. Sur le graphique ci-contre, construire les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in [1,\mathrm{e}]$.

On a : $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}$.
Soit n tel que $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.
Alors, par croissance de la fonction f sur $[1,+\infty[$:

$$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\mathrm{e}) \quad\iff\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2} \leqslant \mathrm{e}$$

On en conclut par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1,\mathrm{e}]$.

<u>Autre méthode</u> : On pouvait aussi dire que l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ est stable par f.

c. Montrer que pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$: $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Nous avons établi à la question **1.d.** que la fonction f'' est positive sur $[1,\mathrm{e}]$.
La fonction f' est donc croissante sur cet intervalle et, en particulier, pour tout x de $[1,\mathrm{e}]$:

$$f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(\mathrm{e}) \quad\iff\quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

<u>Autre méthode</u> : Pour tout x de l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ la fonction f' est positive donc :

$$\begin{aligned}
& & |f'(x)| &\leqslant \frac{1}{4}\\
&\iff & f'(x) &\leqslant \frac{1}{4}\\
&\iff & \frac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2} &\leqslant \frac{1}{4}\\
&\iff & 4\ln(x) &\leqslant (\ln(x)+1)^2\\
&\iff & (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1 &\geqslant 0\\
&\iff & (\ln(x)-1)^2 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul, donc l'inégalité est vraie pour tout x de $[1,\mathrm{e}]$.

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}\,|u_n - 1|$.

Sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$ la fonction f est à dérivée bornée, donc elle est lipschitzienne de constante $\dfrac{1}{4}$ *(« un quart - lipschitzienne »).*
Or : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,\mathrm{e}]$.
On en déduit, en particulier :

$$|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 1| \quad\iff\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 1|.$$

<u>Remarque</u> : On aurait pu de façon équivalente invoquer l'inégalité des accroissements finis.

e. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons $P(n)$ la propriété : $\quad |u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}$.

On a : $\quad u_0 - 1 = 1 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{2^{2\times 0}} = 1, \quad$ donc $P(0)$ est vraie.

Si $P(n)$ est vraie pour une valeur donnée de n, alors, d'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2(n+1)}},$$

c'est à dire que $P(n+1)$ est également vraie.

On conclut par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2^{2n}}.$$

f. En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

On a : $\quad \dfrac{1}{2^{2n}} \to 0 \quad$ donc $\quad |u_n - 1| \to 0 \quad$ soit $\quad u_n \to 1$.

g. Donner la valeur de $f(2) - f(1)$. En déduire un réel k strictement inférieur à $1/4$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant k\,|u_n - 1|.$$

On calcule :

$$f(2) - f(1) = \frac{2}{\ln(2) + 1} - 1 = \frac{1 - \ln(2)}{1 + \ln(2)} = k$$

Ce nombre est le taux de variation de la fonction f en 1 entre les points 1 et 2.
La fonction f étant convexe sur l'intervalle $]1, 2]$ ce taux de variation est croissant sur cet intervalle, donc pour tout $x \in]1, 2]$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leqslant k$$

En choisissant $x = u_n$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant k\,|u_n - 1|.$$

La concavité de la fonction f sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ nous assure que

$$f'(2) < f'(\mathrm{e})$$

et que le taux de variation entre 1 et 2 est inférieur à $f'(2)$. Dès lors :

$$k = \frac{1 - \ln(2)}{1 + \ln(2)} < \frac{1}{4}.$$

La condition est donc remplie.

Remarque : Graphiquement on vérifie que $f(2) - f(1) < 0,2 < \dfrac{1}{4}$.

4. Montrer que : $\quad x > 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) < x$.

On a :

$$x > 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln(x) + 1 > 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\ln(x) + 1} < 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) < x$$

5. Selon les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, déterminer la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et de limite u_0.

- Si $u_0 > 1$, la question précédente associée à la stabilité par f de l'intervalle $]1, +\infty[$ nous permet d'affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) = u_{n+1} < u_n$$

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc dans ce cas strictement décroissante.
  Étant alors minorée par 1, elle converge vers un point fixe appartenant à l'adhérence de l'intervalle $]1, +\infty[$. Le seul candidat est donc l'élu :

$$\boxed{u \to 1}.$$

- Enfin, comme la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right[$, si $\frac{1}{\mathrm{e}} < u_0 < 1$, $u_1 \in [1, +\infty[$.
  On en déduit d'une part que $u_1 > u_0$, et d'autre part que la suite extraite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 1 d'après ce qui précède.
  On en déduit qu'alors la suite est non monotone, et converge vers 1.

$\sim$