DS 5 de mathématique

Prénom : .... *Nom :* ....

Sujet à rendre avec la copie

Exercice : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

1. Calculer u_2 et u_3. Peut-on en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

3. Convergence

- **a.** Déterminer une suite v extraite de la suite u admettant $+\infty$ pour limite.
- **b.** Déterminer une suite w extraite de la suite u admettant $-\infty$ pour limite.
- **c.** En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par : $a_n = 3^{-n/2}u_n$.

- **a.** Déterminer la convergence de la suite a.
- **b.** Déterminer une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants que vérifie la suite a.

Problème : Suite récurrente d'ordre 1

On cherche à déterminer l'existence puis à étudier une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la propriété :

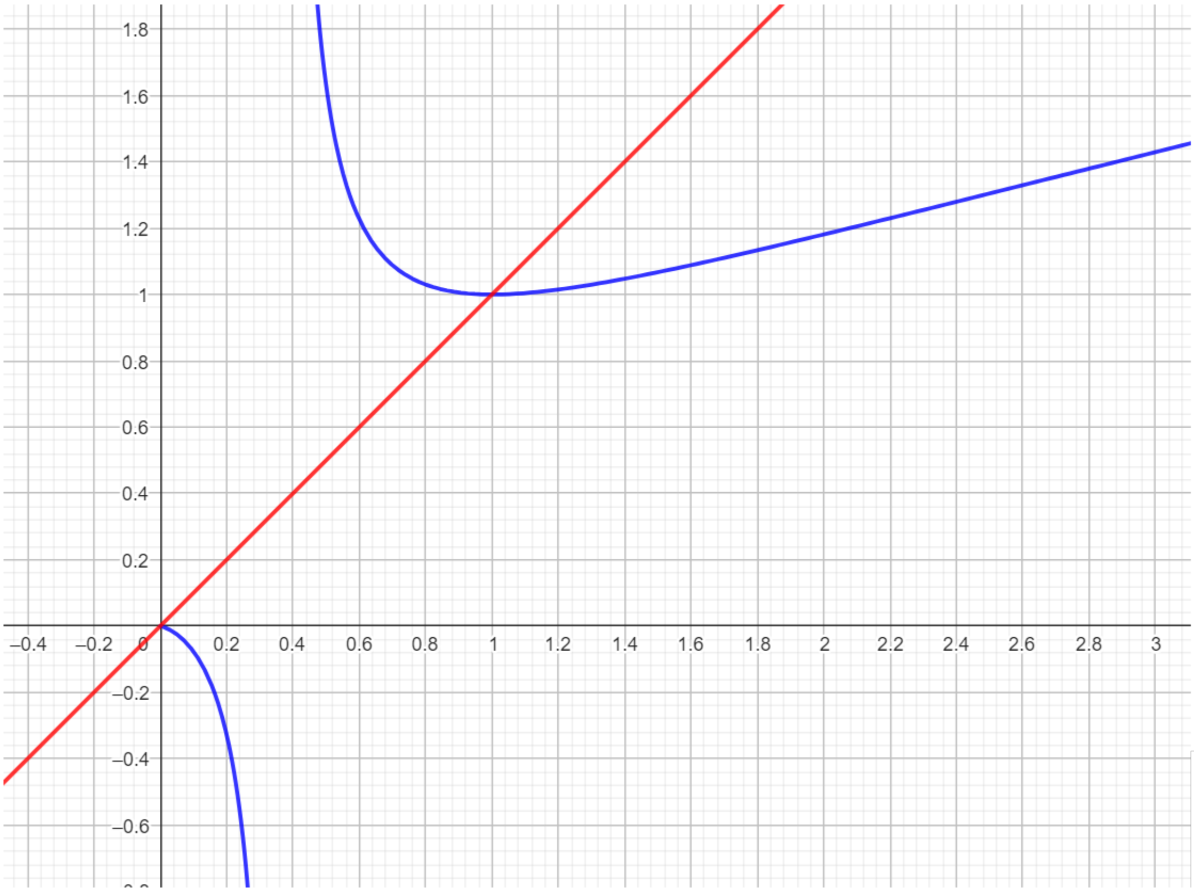
$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln(u_n)+1}.$$

1. Considérations sur une fonction

On considère la fonction : $\quad f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$.

Une représentation du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en repère orthonormé est donnée ci-dessous, accompagnée du graphe Δ de la fonction identité.

Aucun résultat que permettrait de conjecturer cette illustration ne sera pris pour vrai sans démonstration.



a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.

b. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

c. Montrer que pour tout x de $\mathscr{D}$: $\quad f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2}$.

d. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathscr{D}$.

e. Déterminer les intervalles de $\mathscr{D}$ où f est convexe et ceux où elle est concave.
En déduire l'existence d'un point d'inflexion.

f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
Pour la suite, le même symbole f désignera ce prolongement.

g. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

h. Déterminer les variations de la fonction f.

i. Déterminer les points fixes de la fonction f.

j. Justifier que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f.

2. Valeurs possibles pour u_0

a. Si $u_0 \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.

b. Si $u_0 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.

c. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]0, 1/\mathrm{e}[$.
Si $u_0 \in]0, 1/\mathrm{e}[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle définie ? Justifier.

3. Cas où $u_0 = 2$

a. Sur le graphique ci-contre, construire les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in [1, \mathrm{e}]$.

c. Montrer que pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$: $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}\,|u_n - 1|$.

e. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}$.

f. En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

g. Donner la valeur de $f(2) - f(1)$. En déduire un réel k strictement inférieur à $1/4$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant k\,|u_n - 1|.$$

4. Montrer que : $\qquad x > 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) < x$.

5. Selon les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, déterminer la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

∼