Exercice 1 —

Déterminer, en justifiant soigneusement, un équivalent simple en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes. En déduire leur convergence en $+\infty$.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^3) - 4x\sqrt{x}}{x + \cos(x) + \sqrt{x^3}}$

On a : $x\sqrt{x} = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$.

En outre :

$$\ln(x^3) = 3\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(4x^{\frac{3}{2}}\right)$$

donc

$$\ln(x^3) - 4x\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} -4x\sqrt{x}.$$

De même

$$\cos(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x) \qquad \text{et} \qquad x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

donc

$$x + \cos(x) + \sqrt{x^3} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^3}.$$

D'où par quotient :

$$\frac{\ln(x^3) - 4x\sqrt{x}}{x + \cos(x) + \sqrt{x^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-4x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = -4.$$

Cette fonction converge donc en $+\infty$ vers -4.

2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+2}$

On serait tenté ici d'écrire $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $\ln(x^2+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^2)$ mais il s'agirait ici d'une composition à gauche, qui n'est pas valable dans le cas général.

On a : $\ln(x^2+1) = \ln\left(x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Or par quotient, somme et composition on a : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

D'où : $\ln(x^2+1) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$.

Comme en outre $x^2 + 2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ on conclut par quotient :

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

Or $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$ donc

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+2} \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

3. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)$

On observe que l'argument de la fonction $\ln$ tend vers 1, on tente donc de se ramener à une expression de la forme $\ln(1+u)$.

On a :
$$\frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{x^2+2-1}{x^2+2} = 1 - \frac{1}{x^2+2}.$$

Or $\quad \dfrac{1}{x^2+2} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad$ et $\quad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \quad$ donc
$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}.$$

On conclut par quotient :
$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

Remarque : Ce dernier résultat s'obtient plus simplement à partir de l'expression $\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2+2}\right)$ *par quotient, somme et composition. L'équivalent nous donne cependant une information supplémentaire, c'est la « vitesse de convergence » de la fonction ainsi que son signe au voisinage de* $+\infty$.

4. $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$

On a : $\quad \sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}.$

Or $\quad \dfrac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad$ et $\quad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \quad$ donc $\quad \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}.$

On en déduit :
$$\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Dès lors par quotient :
$$\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

5. $x \mapsto \left\lfloor 1-\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ *(on rappelle que* $\lfloor a \rfloor$ *désigne la partie entière du réel* a*)*

On a :
$$x > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < -\frac{1}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < 1-\frac{1}{x} < 1.$$

Donc pour tout x supérieur à 1 $\left\lfloor 1-\dfrac{1}{x}\right\rfloor = 0$. On en conclut : $\left\lfloor 1-\dfrac{1}{x}\right\rfloor \underset{+\infty}{\sim} 0.$

Remarque : On rappelle à toutes fins utiles que seule une fonction nulle dans un voisinage est équivalente à 0 à l'intérieur de ce voisinage.

Exercice 2 —

Question de cours : Montrer que deux espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul.

Supposons que F et G aient en commun un vecteur u non nul.
Soit $x \in F + G$ et $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Alors, d'après les propriétés de l'addition d'un espace vectoriel on peut écrire :

$$x = x_1 + x_2 + 0_E = x_1 + x_2 + u - u = (x_1 + u) + (x_2 - u)$$

Or $x_1 + u = x_1' \in F$ car $(x_1, u) \in F^2$. On établit de même : $x_2 - u = x_2' \in G$.

Ainsi il existe un deuxième couple de vecteurs (x_1', x_2') de l'ensemble $F \times G$ distinct du premier dont la somme est x.
On en conclut que les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas en somme directe.
Comme le vecteur nul appartient à tout sous-espace vectoriel, on conclut par contraposée :

$$F \oplus G \implies F \cap G = \{0_E\}$$

Réciproquement, si F et G ne sont pas en somme directe, il existe un élément x de $F + G$ tel que $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ avec $(x_1, x_1) \in F^2$, $(x_2, x_2') \in G^2$, $(x_1', x_2') \neq (x_1, x_2)$.
Alors $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$.
La première différence est un vecteur de F et la seconde est un vecteur de G, l'une au moins (donc les deux) étant non nulle.
On en conclut que $F \cap G \neq \{0_E\}$. D'où, par contraposée :

$$F \cap G = \{0_E\} \implies F \oplus G$$

La double implication établit le théorème.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on note

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = x - z - 2t = 0\}$$

et

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, a), (2, 0, 2, 1)), \quad \text{où } a \text{ est un réel quelconque.}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

<u>Remarque</u> : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E on peut montrer qu'il est non vide et que $(u, v, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R} \implies u + \lambda v \in F$, mais la méthode ci-dessous le prouve tout en fournissant une base.

On a :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -x - y - z \\ z = x - 2t = 3x + 2y + 2z \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2x + y \\ z = -3x - 2y \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, -3x - 2y, 2x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, -3, 2) + y(0, 1, -2, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, -3, 2), (0, 1, -2, 1)) \end{aligned}$$

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de E dont une base est constituée des deux vecteurs non colinéaires $(1,0,-3,2)$ et $(0,1,-2,1)$.

2. La famille $((1,1,1,1),(1,-1,1,0),(0,2,0,a),(2,0,2,1))$ est elle une famille libre dans $\mathbb{R}^4$? En déduire une base de G.
On distinguera des cas si besoin selon la valeur du paramètre a.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,0)+\gamma(0,2,0,a)+\delta(2,0,2,1)=(0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases}\alpha+\beta+2\delta=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta+2\delta=0\\ \alpha+a\gamma+\delta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta+2\delta=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\\ \alpha+a\gamma+\delta=0\end{cases}$$

Si $\gamma=0$ et $\alpha=1$ alors $\beta=1$ et $\delta=-1$.
Il existe donc une combinaison linéaire à coefficients non nuls des vecteurs de la famille qui donne le vecteur nul.
Remarque : On aurait pu observer plus simplement que le dernier vecteur est égal à la somme des deux premiers.

On en déduit que quel que soit le paramètre a, la famille n'est pas libre.

Le troisième vecteur s'écrivant comme combinaison linéaire des deux premiers, le retirer de la famille qui génère G fournit une autre famille qui génère G. Cette nouvelle famille génératrice de G est une base si est seulement si elle est libre.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,0)+\gamma(0,2,0,a)=(0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha+a\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta+2\gamma=0\\ \alpha+a\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha=-\gamma\\ \alpha=-a\gamma\end{cases}$$

Les deux dernières égalités imposent : $\gamma(a-1)=0$.
Si $a\neq 1$, cela implique $\gamma=0$, et par voie de conséquence $\alpha=\beta=0$. La famille est alors libre. Comme elle est génératrice de G, on en conclut que c'est une base de G.

Si $a=1$, alors par exemple $\gamma=1$, $\alpha=-1$ et $\beta=1$ est une solution du système *(dit autrement, le premier vecteur est la somme des deux autres)* .
Avec le même raisonnement que précédemment, on conclut que dans ce cas la famille $((1,-1,1,0),(0,2,01))$ constituée de deux vecteurs non colinéaires est une base de G.

3. On suppose pour cette question que $a=0$.

a. Déterminer une base de $F\cap G$.

Un vecteur (x,y,z,t) appartient à $F\cap G$ si et seulement si il verifie les deux équations définissant F et il est combinaison linéaire des vecteurs de la base de G obtenue à la question précédente. Ainsi :

$$(x,y,z,t) \in G \quad \Longleftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \\ \text{t} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors : $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \beta \\ t = \alpha \end{cases}$.

Les deux équations définissant F impliquent alors :

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2\gamma \end{cases}.$$

On en déduit :

$$(x,y,z,t) \in F \cap G \iff \exists\gamma \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \\ \text{t} \end{pmatrix} = -2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}2\gamma \\ 4\gamma \\ \text{-}2\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = -2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $F \cap G$ est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,-2,1,0)$. La famille $((1,-2,1,0))$ est donc une base de $F \cap G$.

Remarque : Par acquis de conscience, on pense à vérifier que ce vecteur appartient bien à F et à G.

b. En déduire une base de $F+G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Si les sous-espaces F et G sont supplémentaires alors ils sont en somme directe. Or leur intersection n'est pas réduite au vecteur nul. On en conclut par contraposée que F et G ne sont pas en somme directe.

Baptisons les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \text{-3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a : $F = \text{Vect}\,(u_1,u_2)$, $G = \text{Vect}\,(u_3,u_4,u_5)$ et $F \cap G = \text{Vect}\,(u_6)$.

Or : $u_1 = u_6 + 2u_2$ donc $\text{Vect}(u_1,u_2) = \text{Vect}(u_1,u_6) = F$.

En outre : $u_5 = 2u_4 - 2u_6$ donc $\text{Vect}(u_3,u_4,u_5) = \text{Vect}(u_3,u_4,u_6) = G$.

D'où :

$$F + G = \text{Vect}(u_1,u_3,u_4,u_6)$$

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4 + \delta u_6 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \beta-\gamma-2\delta=0 \\ -3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \iff \begin{array}{r} L1-L3 \\ L4 \\ L2+L3 \\ L3 \end{array} \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \delta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

On en déduit que la famille génératrice (u_1, u_3, u_4, u_6) est également libre, elle constitue donc une base de $F+G$.

c. Déterminer deux vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $v+w=(1,2,3,4)$.
Cette décomposition est elle unique ?

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4 + \delta u_6 = (1,2,3,4)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=1 \\ \beta-\gamma-2\delta=2 \\ -3\alpha+\beta+\gamma+\delta=3 \\ 2\alpha+\beta=4 \end{cases} \iff \begin{array}{l} L1-L3 \\ L4 \\ L2+L3 \\ L3 \end{array} \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{2} \\ \beta=5 \\ \frac{3}{2}+10-\delta=5 \\ \frac{3}{2}+5+\gamma+\delta=3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{2} \\ \beta=5 \\ \delta=\frac{13}{2} \\ \gamma=-10 \end{cases}$$

Choisissons

$$v = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{13}{2}u_6 = (6\ ;\ -13\ ;\ 8\ ;\ -1)$$

et

$$u = 5u_3 - 10u_4 = (-5\ ;\ 15\ ;\ -5\ ;\ 5)$$

Cette décomposition n'est pas unique car F et G ne sont pas en somme directe.

Remarque : On aurait pu choisir par exemple $u = -\frac{1}{2}u_1$ *et* $v = 5u_3 + \frac{13}{2}u_4 - 10u_6$
.

∼