Exercice 1 —

Déterminer, en justifiant soigneusement, un équivalent simple en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes. En déduire leur convergence en $+\infty$.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^3) - 4x\sqrt{x}}{x + \cos(x) + \sqrt{x^3}}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+2}$
3. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)$
4. $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$
5. $x \mapsto \left\lfloor 1 - \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ *(on rappelle que $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière du réel a)*

Exercice 2 —

Question de cours : Montrer que deux espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on note

$$F = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t = x-z-2t = 0\}$$

et

$$G = \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(1,-1,1,0),(0,2,0,a),(2,0,2,1)), \quad \text{où } a \text{ est un réel quelconque.}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
2. La famille $((1,1,1,1),(1,-1,1,0),(0,2,0,a),(2,0,2,1))$ est elle une famille libre dans $\mathbb{R}^4$?
   En déduire une base de G.
   On distinguera des cas si besoin selon la valeur du paramètre a.
3. On suppose pour cette question que $a = 0$.
   - **a.** Déterminer une base de $F \cap G$.
   - **b.** En déduire une base de $F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?
   - **c.** Déterminer deux vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $v + w = (1,2,3,4)$.
     Cette décomposition est elle unique ?

$\sim$