Test de mathématique

Semaine 2

Exercice 1

Démontrer : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{Z}$, l'inéquation (I) : $\dfrac{x-2}{x-1} > \sqrt{x+4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cette inéquation (*les valeurs de x pour lesquelles les expressions écrites sont définies*).

2. Étudier le signe du membre de gauche de l'inéquation. En déduire de nouvelles valeurs de x qui ne peuvent pas être solution de l'inéquation (I).

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'ensemble des valeurs de x qui n'ont pas été éliminées aux deux questions précédentes.

- **a.** Montrer que pour $x \in \mathscr{D}'$, $\quad (I) \iff x(x^2+x-3) < 0$.
- **b.** En déduire l'ensemble solution S de l'inéquation (I) dans $\mathbb{R}$.

4. Ensemble solution de l'inéquation (I) dans $\mathbb{Z}$

- **a.** A partir de l'encadrement $9 < 13 < 16$, démontrer l'encadrement :

$$-2,5 < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2.$$

- **b.** Déterminer l'ensemble S' solution de l'inéquation (I) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, calculer les deux sommes $\quad U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \left(5^k - 4k - 2n + 3\right) \quad$ et $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-2k}$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on veut calculer la somme : ${}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{(k+1)!}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

2. Pour $n \in \{1;2;3\}$, calculer $1 - \dfrac{1}{n!}$.
En déduire une conjecture sur une expression simple de S_n en fonction de n.

3. Prouver cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

4. En recherchant une simplification télescopique, et en passant par un changement d'indice bien indiqué, trouver une façon directe de calculer S_n.

∼