Test 5 de mathématique

Les exercices peuvent être traités dans un ordre différent.

Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(1, -a, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$?
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \sin^2(x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus ?
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et de A.

Exercice 2

Soit $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? de classe $\mathscr{C}_1$ en 0 ?
3. A l'aide du développement limité, déterminer l'équation de la tangente T au graphe Γ de la fonction f en 0, ainsi que la position relative de Γ et T au voisinage de 0.

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si tel est le cas, en proposer une base et donner sa dimension.

1. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}$.
2. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - 5y - 1 = 0\right\}$.
3. $\{(x, 2x, 3x) | x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + x + y^2 = 0\right\}$.
5. $\left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$.

Exercice 4

Calculer les développements limités des fonctions suivantes au voisinage de 0.
(*on admet qu'il n'y a pas de problème de définition ni d'existence*).

1. $f_1 : x \mapsto e^x \operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 4
2. $f_2 : x \mapsto \ln(1+x^2)\sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 4
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
4. $f_4 : x \mapsto \sin^4(x)$ à l'ordre 8
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}$ à l'ordre 3
6. $f_6 : x \mapsto (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. On pose $B = A - I_3$ et $C = A + 3I_3$.
   Exprimer A en fonction de B et C, sous la forme $A = b\,B + c\,C$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.
4. Que valent BC et CB ? Montrer que B^2 et C^2 sont proportionnels à B et C respectivement.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels b_n et c_n tels que $A^n = b_n B + c_n C$.
6. À l'aide des relations obtenues à la question précédente, déterminer les expressions de b_n et de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner alors l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On précisera ses 9 coefficients.

∼