Devoir de préparation au concours blanc

Ce devoir de préparation regroupe quelques situations centrales du programme de révision du concours blanc, mais n'en couvre pas la totalité (ne s'y trouve pas, notamment, les nombres complexes, le calcul intégral, ainsi que des exercices solides sur les espaces vectoriels et l'analyse asymptotique - travaillés récemment -).

Il se destine au travail en autonomie.
A cette fin, trois documents d'accompagnement son accessibles sur cahier de prépa :

- *des indications pour présenter une ou plusieurs idées qui aboutissent ;*
- *des réponses pour contrôler ce que l'on a trouvé ;*
- *un corrigé pour voir une résolution possible avec, important, une proposition de rédaction.*

Chacun.e, en fonction des besoins qu'il.elle aura identifiés, organisera ses révisions à partir des cours, TD, et évaluations passées avec un soucis d'efficacité : ne pas passer trop de temps sur les notions et techniques déjà acquises, ne pas s'attaquer à des exercices trop difficiles.

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n de variable réelle définie par

$$f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Justifier que l'ensemble de définition commun aux fonctions f_n est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Déterminer la parité de f_n en fonction de n.

3. Cas où $n = 0$. (*On choisit la convention :* $0^0 = 1$)

  a. Étudier la convergence de la fonction f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$. *(on pourra tirer profit de la parité)*

  b. Montrer que f_0 n'admet pas de limite en 0. *(on attend une rédaction précise)*

  c. Justifier que la fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_0'.

  d. Justifier que sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ la dérivée de la fonction f_0 s'annule au moins une fois.

4. Cas où $n = 1$.

  a. Étudier la convergence de la fonction f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

  b. Étudier la convergence de la fonction f_1 en 0, en déduire un prolongement par continuité de la fonction f_1 en 0 que l'on appellera $\tilde{f}_1$.

  c. Justifier que la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_1'.

  d. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_1$ en 0.

5. Cas où $n = 2$.

  a. Étudier la convergence de la fonction f_2 en 0.

  b. Justifier que la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et montrer qu'elle admet un prolongement par continuité $\tilde{f}_2$ en 0.

c. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_2$.

6. Pour $n > 2$, étudier la convergence, la continuité (*proposer un prolongement par continuité si possible*) et la dérivabilité des fonctions f_n.

Exercice 2 : Suites définies par une relation de récurrence

Dans chacun des cas suivants, étudier la suite u, c'est à dire déterminer sa monotonie (sauf si u possède des termes non réels) et étudier sa convergence. On établira une formule explicite donnant chaque terme u_n en fonction de n chaque fois que cela sera possible.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 2$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

a. $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}i$ **b.** $u_0 = 2$, $u_1 = 3$

3. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + \dfrac{3}{2}$.

a. $u_0 = 2$ **b.** $u_0 = 4$

Exercice 3 : Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x \qquad (E)$$

1. En posant $x = 0$, déterminer une condition sur les solutions y de cette équation différentielle.

2. Dans cette question on considère $x > 0$.

a. Justifier que l'équation (E) est alors équivalente à :

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x \qquad (E_1)$$

b. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E_1).

c. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) *(si elle n'apparaît pas, on pourra mettre en oeuvre la méthode dite de variation de la constante)*

d. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_1).

3. Résoudre l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer les solutions de l'équation (E).

Problème 1 : Matrices et suites

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes les puissances de A.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Décomposition

On définit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer C puis C^2, et préciser, pour tout entier n supérieur à deux, C^n.
2. Calculer P^2 et établir la relation : $P^2 = 2P - I_3$, I_3 étant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Déduire de la question précédente que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On pose $D = P^{-1}BP$. Calculer D et vérifier que D est diagonale.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}B^nP$.
6. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de B^n en explicitant ses neuf coefficients.
7. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en explicitant ses neuf coefficients.

Partie 2 : Étude de suites définies par une relation de récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe trois nombres réels a_n, b_n et c_n tels que
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Préciser, pour tout n, les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, ainsi que les valeurs de a_0, b_0 , c_0, a_1, b_1 et c_1.
On montrera notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = 2c_n - 1$.
2. Déterminer, pour tout n, l'expression de c_n en fonction de n.
3. **a.** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence
$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$
   b. En déduire, pour tout n, l'expression de a_n en fonction de n.

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

a. Donner, sans justifier, un exemple de matrice de $\mathscr{E}$ et un exemple de matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathscr{E}$.

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

c. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $(M, N) \in \mathscr{E}^2$ alors $MN \in \mathscr{E}$.

d. Montrer que pour tout n, la matrice A^n appartient à $\mathscr{E}$.

e. En déduire, pour tout n, l'expression de b_n en fonction de n.

Problème 2 : Ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1

On s'intéresse aux suites numériques réelles vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n).$$

On appellera f la fonction itératrice associée à cette relation de récurrence.

1. Existence

a. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en justifiant.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le premier terme u_0 pour qu'il existe une unique suite u vérifiant la relation de récurrence.
Dans la suite du problème on considère que u_0 vérifie cette condition.

2. Dans cette question on considère $u_0 > 1$

a. Déterminer la monotonie de la suite u.

b. Étudier la convergence de la suite u.

3. Si $u_0 < 1$, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite u ?

4. Dans cette question on considère $u_0 \in]1, 3]$.

a. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

b. En déduire la majoration : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 1 + v_n$,
v étant une suite géométrique que l'on précisera.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$.
(on pourra faire usage de l'approximation $\mathrm{e} \approx 2,7$*).*

5. Dans cette question on considère $u_0 \in \left[1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}, 3\right]$.
Déterminer une valeur de $\alpha \in]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha |u_n - 1|$.

$\sim$