Devoir de préparation au concours blanc

Indications

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n de variable réelle définie par

$$f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Justifier que l'ensemble de définition commun aux fonctions f_n est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Déterminer la parité de f_n en fonction de n.
Ne pas oublier en préalable la symétrie de $\mathscr{D}$ par rapport à 0.
Méthode classique pour démontrer la parité ou l'imparité : exprimer $f_n(-x)$, et voir si on trouve $f_n(x)$ ou $-f_n(x)$.

3. Cas où $n = 0$. (*On choisit la convention :* $0^0 = 1$*)*

a. Étudier la convergence de la fonction f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$. *(on pourra tirer profit de la parité)*
Continuité de la fonction sin en 0 ou limite par composition.

b. Montrer que f_0 n'admet pas de limite en 0. *(on attend une rédaction précise)*
Chercher à exhiber deux suites u et v qui tendent vers 0 et dont les images par f_0 ne tendent pas vers une même limite, puis conclure par la contraposée de la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.

c. Justifier que la fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_0'.
Composée de fonctions dérivables.
Dérivée d'une fonction composée.

d. Justifier que sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ la dérivée de la fonction f_0 s'annule au moins une fois.
Deux possibilités : chercher une racine de f_0 dans l'intervalle ; utiliser le théorème de Rolle.

4. Cas où $n = 1$.

a. Étudier la convergence de la fonction f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
Équivalent.

b. Étudier la convergence de la fonction f_1 en 0, en déduire un prolongement par continuité de la fonction f_1 en 0 que l'on appellera $\tilde{f}_1$.
Produit entre une fonction bornée et une fonction de limite nulle (Théorème 6 §3.3 Chapitre 10).

c. Justifier que la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_1'.
Composée et produit de fonctions dérivables.
Dérivée d'un produit et d'une fonction composée.

d. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_1$ en 0.
Le taux de variation de $\tilde{f}_1$ au voisinage de 0 est f_0.

5. Cas où $n = 2$.

a. Étudier la convergence de la fonction f_2 en 0.
Même idée que pour f_1.

b. Justifier que la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et montrer qu'elle admet un prolongement par continuité $\tilde{f}_2$ en 0.
Même idée que pour f_1.

c. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_2$.
Le taux de variation de la fonction $\tilde{f}_2$ en 0 est la fonction f_1.

6. Pour $n > 2$, étudier la convergence, la continuité (proposer un prolongement par continuité si possible) et la dérivabilité des fonctions f_n.
Se traitent ensemble, même idées que précédemment.

Exercice 2 : Suites définies par une relation de récurrence

Dans chacun des cas suivants, étudier la suite u, c'est à dire déterminer sa monotonie (sauf si u possède des termes non réels) et étudier sa convergence. On établira une formule explicite donnant chaque terme u_n en fonction de n chaque fois que cela sera possible.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 2.$
Suite arithmético-géométrique, équation au point fixe, suite auxiliaire géométrique.

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

a. $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}i$
Suite à termes complexes définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ; équation caractéristique à deux solutions distinctes ; l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence est l'espace vectoriel engendré par les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$; détermination des constantes grâce à u_0 et u_1.
On a le droit d'invoquer la racine cubique de l'unité $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Pour la convergence, on peut exhiber deux suites extraites n'admettant pas une même limite.
La monotonie est sans objet.

b. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$
Même situation que précédemment à ceci près que la suite est à termes réels.
La monotonie peut ici se traiter en préalable, car il apparaît clairement que les termes u_0 et u_1, et u_1 et u_2 sont dans des ordres différents.
L'équation caractéristique possédant des racines distinctes non réelles, par correction

vis à vis du lecteur, on lui présentera la suite sous la forme $\rho^n(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta))$ où ρ et θ sont respectivement le module et un argument de l'une des solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
Pour la convergence, on peut exhiber deux suites extraites n'admettant pas une même limite.

3. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$.
Suite vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1 ; fonction itératrice.
Équation au point fixe, établir les résultats par récurrence.
Une illustration graphique permet de voir ce qui est à prouver, et comment procéder.

a. $u_0 = 2$
En utilisant le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1, 3]$, établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 1 < u_{n+1} < u_n < 3$.
Les conclusions en découlent.

b. $u_0 = 4$
En utilisant le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[3, +\infty[$, établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 3 < u_n < u_{n+1}$.
Les conclusions en découlent.

Exercice 3 : Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x \qquad (E)$$

1. En posant $x = 0$, déterminer une condition sur les solutions y de cette équation différentielle.
Ne pas oublier que quand on écrit y dans une équation différentielle, on veut dire : $y(x)$.

2. Dans cette question on considère $x > 0$.

a. Justifier que l'équation (E) est alors équivalente à :

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x \qquad (E_1)$$

Bien écarter le cas : $x = 0$.

b. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E_1).
Chapitre 6 §1.2 théorème 4.

c. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) *(si elle n'apparaît pas, on pourra mettre en oeuvre la méthode dite de variation de la constante)*
Ne pas chercher bien loin.

d. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_1).
Chapitre 6 §1.1 Théorème 3.

3. Résoudre l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_-^*$.
Penser à la résolution, comprendre que ce que l'on écrirait serait quasiment identique à ce qui a été fait pour $\mathbb{R}_+^*$, proposer une rédaction qui évite les redites.

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer les solutions de l'équation (E).
Une solution d'une équation différentielle est nécessairement dérivable, donc continue.
Réfléchir à la continuité de la fonction en 0 selon les valeurs des constantes associées aux solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dans les cas où il y a continuité, étudier la dérivabilité.

Problème 1 : Matrices, suites et espaces vectoriels

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes les puissances de A.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Décomposition

On définit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer C puis C^2, et préciser, pour tout entier n supérieur à deux, C^n.
Soustraction et produit de matrices à faire à la main.

2. Calculer P^2 et établir la relation : $P^2 = 2P - I_3$, I_3 étant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer séparément chaque membre de l'égalité, et constater que les résultats sont égaux.
« Deux choses égales à une troisième sont aussi égales entre elles. »
Première notion ordinaire du livre I des Éléments d'Euclide.

3. Déduire de la question précédente que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Utiliser la relation de la question précédente pour écrire : $P \times ... = I_3$.
Par définition, la matrice ... est P^{-1}.
Remarque : On pourrait calculer le produit entre P et la matrice donnée, mais ça ne répondrait pas à la question « Déduire de ... ».

4. On pose $D = P^{-1}BP$. Calculer D et vérifier que D est diagonale.
Calcul...

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}B^nP$.
Faire usage de l'associativité de la multiplication matricielle et de la propriété caractéristique de la matrice identité.

6. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de B^n en explicitant ses neuf coefficients.
Multiplier l'égalité précédente à gauche par P, et à droite par P^{-1}, afin d'avoir une expression de B^n, puis calcul.
On vérifiera (sans l'écrire) que l'expression obtenue est valide pour $n = 0$ et $n = 1$.

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en explicitant ses neuf coefficients.
Utiliser $A = B + C$, montrer que B et C commutent (coup de chance ! :-o), et utiliser le binôme de Newton. La nilpotence de C sera très appréciée.
L'expression obtenue n'est pas très simple, on se rassurera à peu de frais en vérifiant qu'elle est conforme pour $n = 0$ et $n = 1$.

Partie 2 : Étude de suites définies par une relation de récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe trois nombres réels a_n, b_n et c_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser, pour tout n, les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, ainsi que les valeurs de a_0, b_0 , c_0, a_1, b_1 et c_1.
On montrera notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = 2c_n - 1$.

Initialisation, hérédité, conclusion.

2. Déterminer, pour tout n, l'expression de c_n en fonction de n.
La relation de récurrence implique que c est une suite arithmético-géométrique.

*Remarque : On aura soin, à chaque étape, de vérifier que les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n sont bien celles obtenues à la question **7.** de la **partie 1**.*

3. **a.** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

On dispose d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 avec un coefficient variable, et on voudrait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on sait traiter. Deux méthodes loisibles : une directe et une par récurrence.

b. En déduire, pour tout n, l'expression de a_n en fonction de n.
Équation caractéristique...

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

a. Donner, sans justifier, un exemple de matrice de $\mathscr{E}$ et un exemple de matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathscr{E}$.
Imagination au pouvoir, chercher simple si possible.

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Premier réflexe, contient-il le vecteur nul de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, à savoir la matrice 3×3 nulle ?

c. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $(M, N) \in \mathscr{E}^2$ alors $MN \in \mathscr{E}$.

Traduire l'appartenance à $\mathscr{E}$, utiliser l'associativité du produit matriciel.

d. Montrer que pour tout n, la matrice A^n appartient à $\mathscr{E}$.
Se démontre par récurrence à partir du résultat précédent.

e. En déduire, pour tout n, l'expression de b_n en fonction de n.
On dispose de a_n et c_n en fonction de n, la propriété qui vient d'être démontrée (ou admise si on a pas réussi à démontrer) permet d'en déduire l'expression de b_n en fonction de n.

Problème 2 : Ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1

On s'intéresse aux suites numériques réelles vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n).$$

On appellera f la fonction itératrice associée à cette relation de récurrence.

1. Existence

a. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en justifiant.
Ensemble de définition et de dérivabilité, fonction dérivée, signe de la dérivée, sens de variation, extremums locaux et limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le premier terme u_0 pour qu'il existe une unique suite u vérifiant la relation de récurrence.
Dans la suite du problème on considère que u_0 vérifie cette condition.
Intervalle stable par f.

2. Dans cette question on considère $u_0 > 1$

a. Déterminer la monotonie de la suite u.
Établir par récurrence une minoration et un ordre entre u_n et u_{n+1} quel que soit l'entier naturel n.

b. Étudier la convergence de la suite u.
Convergence monotone.

3. Si $u_0 < 1$, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite u ?
La suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de la question **2.**.

4. Dans cette question on considère $u_0 \in]1, 3]$.

a. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

Stabilité de l'intervalle $]1, 3]$ par f ; encadrement de $f'(x)$ dans $]1, 3]$; théorème des accroissements finis.

b. En déduire la majoration : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 1 + v_n$,
v étant une suite géométrique que l'on précisera.
L'inégalité obtenue à la question précédente dit que les écarts à 1 des termes de la suite u sont réduits à minima d'un facteur $\dfrac{2}{3}$ à chaque incrémentation de n.
On comprend que la suite géométrique v aura une raison égale à $\dfrac{2}{3}$.
Pour la rédaction, on peut introduire directement la suite v que l'on a trouvée, et établir qu'elle vérifie la propriété.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$.
(on pourra faire usage de l'approximation $\mathrm{e} \approx 2,7$*).*
Avec l'inégalité des accroissements finis, on ne peut pas faire mieux que le coefficient $\dfrac{2}{3}$ trouvé.
Avec l'expérience, on sait qu'il faut invoquer ici la convexité et la pente des sécantes.

5. Dans cette question on considère $u_0 \in \left[1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}, 3\right]$.
Déterminer une valeur de $\alpha \in]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha|u_n - 1|$.

Question sympathique qui pourra être omise si le temps fait défaut.
Mêmes idées que précédemment, mais avec la possibilité d'un premier terme « à gauche » du point fixe. Présente un cas où la dérivée peut changer de signe dans l'intervalle considéré.

$\sim$