Devoir de préparation au concours blanc

Réponses

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n de variable réelle définie par

$$f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Justifier que l'ensemble de définition commun aux fonctions f_n est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Déterminer la parité de f_n en fonction de n.
La fonction f_n a même parité que l'entier n, si on ose dire.

3. Cas où $n = 0$. (*On choisit la convention :* $0^0 = 1$)

a. Étudier la convergence de la fonction f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$. *(on pourra tirer profit de la parité)*

$$f_0(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad f_0(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$$

b. Montrer que f_0 n'admet pas de limite en 0. *(on attend une rédaction précise)*

c. Justifier que la fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_0'.

$$f_0'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

d. Justifier que sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ la dérivée de la fonction f_0 s'annule au moins une fois.

4. Cas où $n = 1$.

a. Étudier la convergence de la fonction f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f_1(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$$

b. Étudier la convergence de la fonction f_1 en 0, en déduire un prolongement par continuité de la fonction f_1 en 0 que l'on appellera $\tilde{f}_1$.
$\tilde{f}_1(0) = 0$

c. Justifier que la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_1'.

$$f_1'(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

d. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_1$ en 0.
Non dérivable.

5. Cas où $n = 2$.

a. Étudier la convergence de la fonction f_2 en 0.
$f_2(x) \underset{0}{\rightarrow} 0$

b. Justifier que la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et montrer qu'elle admet un prolongement par continuité $\tilde{f}_2$ en 0.
$\tilde{f}_2(0) = 0$

c. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_2$.
La fonction $\tilde{f}_2$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}_2'(0) = 0$.

6. Pour $n > 2$, étudier la convergence, la continuité (*proposer un prolongement par continuité si possible*) et la dérivabilité des fonctions f_n.
Pour tout $n > 2$, la fonction f_n admet une limite nulle en 0, elle est donc prolongeable par continuité en posant $\tilde{f}_n(0) = 0$.
Les fonctions $\tilde{f}_n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Suites définies par une relation de récurrence

Dans chacun des cas suivants, étudier la suite u, c'est à dire déterminer sa monotonie (sauf si u possède des termes non réels) et étudier sa convergence. On établira une formule explicite donnant chaque terme u_n en fonction de n chaque fois que cela sera possible.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 2.$
$u_n = 3,8\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + 1,2.$ La suite u n'est pas monotone et converge vers $\dfrac{6}{5}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

a. $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}i$
$u_n = j^n - \overline{j}^n$ avec $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. La suite ne converge pas.

b. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$
$u_n = 2\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) + \dfrac{8}{3}\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right).$ La suite ne converge pas.

3. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + \dfrac{3}{2}.$

a. $u_0 = 2$
La suite u est décroissante et converge vers 1.

b. $u_0 = 4$
La suite u est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x \qquad (E)$$

1. En posant $x = 0$, déterminer une condition sur les solutions y de cette équation différentielle.
$y(0) = 1$

2. Dans cette question on considère $x > 0$.

a. Justifier que l'équation (E) est alors équivalente à :

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x \qquad (E_1)$$

b. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E_1).

Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E_1) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

c. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) *(si elle n'apparaît pas, on pourra mettre en oeuvre la méthode dite de variation de la constante)*
exp

d. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_1).
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(x) = \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

3. Résoudre l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_-^*$.
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$y(x) = \mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } D \text{ est une constante réelle.}$$

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer les solutions de l'équation (E).
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y dont la restriction à $\mathbb{R}_-$ est la fonction exponentielle, et dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est définie par

$$y(x) = \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad C \text{ constante réelle.}$$

Problème 1 : Matrices et suites

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes les puissances de A.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Décomposition

On définit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer C puis C^2, et préciser, pour tout entier n supérieur à deux, C^n.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \forall n \in [\![2, +\infty[\![, \qquad C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer P^2 et établir la relation : $P^2 = 2P - I_3$, I_3 étant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déduire de la question précédente que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On pose $D = P^{-1}BP$. Calculer D et vérifier que D est diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}B^nP$.

6. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de B^n en explicitant ses neuf coefficients.

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en explicitant ses neuf coefficients.

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & 1+n2^{n-1}-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : Étude de suites définies par une relation de récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe trois nombres réels a_n, b_n et c_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser, pour tout n, les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, ainsi que les valeurs de a_0, b_0 , c_0, a_1, b_1 et c_1.
On montrera notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = 2c_n - 1$.

On a :

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 = c_1 = -1 \quad ; \quad b_1 = 0.$$

Si on a posé $A^{n+1} = A^n A$ on obtient : $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 2^n \\ b_{n+1} = 2b_n - c_n \\ c_{n+1} = 2c_n - 1 \end{cases}$.

Si on a posé $A^{n+1} = AA^n$ on obtient : $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 2^n \\ b_{n+1} = b_n - a_n \\ c_{n+1} = c_n - 2^n \end{cases}$.

Dans ce dernier cas, on établit par récurrence la relation $c_{n+1} = 2c_n - 1$.

2. Déterminer, pour tout n, l'expression de c_n en fonction de n.

$$c_n = 1 - 2^n.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

b. En déduire, pour tout n, l'expression de a_n en fonction de n.

$$a_n = -\frac{1}{2}n \times 2^n = -n \times 2^{n-1}.$$

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

a. Donner, sans justifier, un exemple de matrice de $\mathscr{E}$ et un exemple de matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathscr{E}$.

$$\text{Par exemple :} \quad I_3 \in \mathscr{E} \quad \text{et} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathscr{E}.$$

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Non.

c. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $(M, N) \in \mathscr{E}^2$ alors $MN \in \mathscr{E}$.

d. Montrer que pour tout n, la matrice A^n appartient à $\mathscr{E}$.

e. En déduire, pour tout n, l'expression de b_n en fonction de n.

$$b_n = 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n = 1 + 2^{n-1}(n-2)$$

Problème 2 : Ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1

On s'intéresse aux suites numériques réelles vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n).$$

On appellera f la fonction itératrice associée à cette relation de récurrence.

1. Existence

a. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en justifiant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le premier terme u_0 pour qu'il existe une unique suite u vérifiant la relation de récurrence.
Dans la suite du problème on considère que u_0 vérifie cette condition.
Strictement positif.

2. Dans cette question on considère $u_0 > 1$

a. Déterminer la monotonie de la suite u.
Strictement décroissante.

b. Étudier la convergence de la suite u.
$u_n \to 1$.

3. Si $u_0 < 1$, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite u ?
$u_n \to 1$, non monotone.

4. Dans cette question on considère $u_0 \in]1, 3]$.

a. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

b. En déduire la majoration : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 1 + v_n$,
v étant une suite géométrique que l'on précisera.
La suite v a pour raison $\frac{2}{3}$ et pour premier terme $u_0 - 1$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
(on pourra faire usage de l'approximation $\mathrm{e} \approx 2,7$*).*

5. Dans cette question on considère $u_0 \in \left[1 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 3\right]$.
Déterminer une valeur de $\alpha \in]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha |u_n - 1|$.

Avec la théorème des accroissements finis on trouve au mieux : $\alpha = \frac{2}{3}$

∼