Devoir de préparation au concours blanc

Proposition de corrigé

Ces propositions ne sont pas « la façon dont il fallait répondre », mais une façon de rédiger des idées de résolution, à comparer avec les idées que vous avez eues et la rédaction que vous avez réalisée.

Exercice 1 : Continuité et dérivabilité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n de variable réelle définie par

$$f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Justifier que l'ensemble de définition commun aux fonctions f_n est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.
La fonction inverse n'est pas définie en 0. Par contre les fonctions carré, inverse, sinus et puissances sont définies sur $\mathbb{R}$.
On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{D}_{f_n} = \mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Déterminer la parité de f_n en fonction de n.
L'ensemble $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_n(-x) = (-x)^n \sin\left(\frac{1}{(-x)^2}\right) = (-1)^n f_n(x).$$

On en déduit que si n est pair, alors la fonction f_n est paire, et si n est impair, la fonction f_n est impaire.

3. Cas où $n = 0$. *(On choisit la convention : $0^0 = 1$)*

a. Étudier la convergence de la fonction f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$. *(on pourra tirer profit de la parité)*
$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_0(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Or $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, donc par continuité de la fonction sinus en 0 :

$$f_0(x) \xrightarrow[+\infty]{} \sin(0) = 0.$$

La symétrie induite par la parité de la fonction f_0 entraîne : $f_0(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$.

b. Montrer que f_0 n'admet pas de limite en 0. *(on attend une rédaction précise)*

Considérons la suite u définie par : $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}}$

et la suite v définie par : $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2} + k\pi}}$.

Par produit, somme, composition avec la fonction racine carré et quotient on a :

$$u_n \to 0 \qquad \text{et} \qquad v_n \to 0.$$

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_0(u_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad f_0(v_k) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1.$$

Ces deux suites sont constantes et admettent pour limite respectivement 1 et -1.
Or la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction affirme que si une fonction admet une limite en 0, alors toutes les suites convergeant vers 0 ont des images par cette fonction qui convergent vers une même limite.
Par contraposée on peut conclure que la fonction f_0 n'admet pas de limite en 0.

c. Justifier que la fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_0'.

Sur $\mathbb{R}^*$, f_0 apparaît comme la composée de la fonction carrée, de la fonction inverse et de la fonction sinus, toutes dérivables sur leur ensemble de définition. On a :

$$f_0(x) = \sin(x^{-2})$$

et par la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée :

$$f_0'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

d. Justifier que sur l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ la dérivée de la fonction f_0 s'annule au moins une fois.

Calculons $f_0\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \sin(\pi) = 0$ et $f_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \sin(2\pi) = 0$.
La fonction f_0 est continue sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] \subset \mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[\in \mathbb{R}^*$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe une valeur $c \in \left]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ telle que $f_0(c) = 0$.

<u>Autre méthode</u> : On a :

$$\begin{aligned}
& f_0'(x) = 0 \\
\iff \quad & -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\
\iff \quad & \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\
\iff \quad & \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\iff \quad & x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$ la racine de la fonction dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}$ *et appartient à l'intervalle considéré.*
La dérivée de la fonction f_0 s'annule donc bien sur l'intervalle considéré.

4. Cas où $n = 1$.

a. Étudier la convergence de la fonction f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a : $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

D'où, par produit d'équivalents : $f_1(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par la symétrie induite par l'imparité de la fonction f_1 : $f_1(x) \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0.$

Autre méthode : Sans les résultats de l'analyse asymptotique, nous aurions dû faire ceci :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f_1(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}.$$

Or $\dfrac{\sin(u)}{u} \underset{0}{\rightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$, *taux de variation de la fonction sinus dérivable en 0.*

Donc par composition : $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1.$

On conclut par produit :

$$f_1(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b. Étudier la convergence de la fonction f_1 en 0, en déduire un prolongement par continuité de la fonction f_1 en 0 que l'on appellera $\tilde{f}_1$.

Au voisinage de 0 la fonction f_1 apparaît comme le produit d'une fonction de limite nulle (la fonction identité) et d'une fonction bornée (fonction composée de dernière composante la fonction sinus). Elle admet donc une limite nulle en 0. *(cf. Théorème 6 §3.3 Chapitre 10).*
On peut donc prolonger la fonction f_1 par continuité en 0 par la fonction $\tilde{f}_1$ confondue avec f_1 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifiant $\tilde{f}_1(0) = 0$.

c. Justifier que la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée f_1'.
Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f_1 est composée et produit de fonctions dérivables, donc dérivable.
D'après la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$f_1' = f_0 + \mathrm{id}\, f_0'.$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f_1'(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

d. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_1$ en 0.
Le taux de variation de $\tilde{f}_1$ en 0 est la fonction qui à x associe :

$$\frac{\tilde{f}_1(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = f_0(x)$$

Or nous avons vu à la question **3.b.** que f_0 n'admet pas de limite en 0.
La fonction $\tilde{f}_1$ n'est donc pas dérivable en 0.

Remarque : Voici un cas de fonction qui en un point est continue mais n'est pas dérivable, ni lipschitzienne au voisinage de ce point.

La recherche de limite de la dérivée ne permet pas de conclure, cf. remarque du théorème 11 §3.4 du chapitre 12.

5. Cas où $n = 2$.

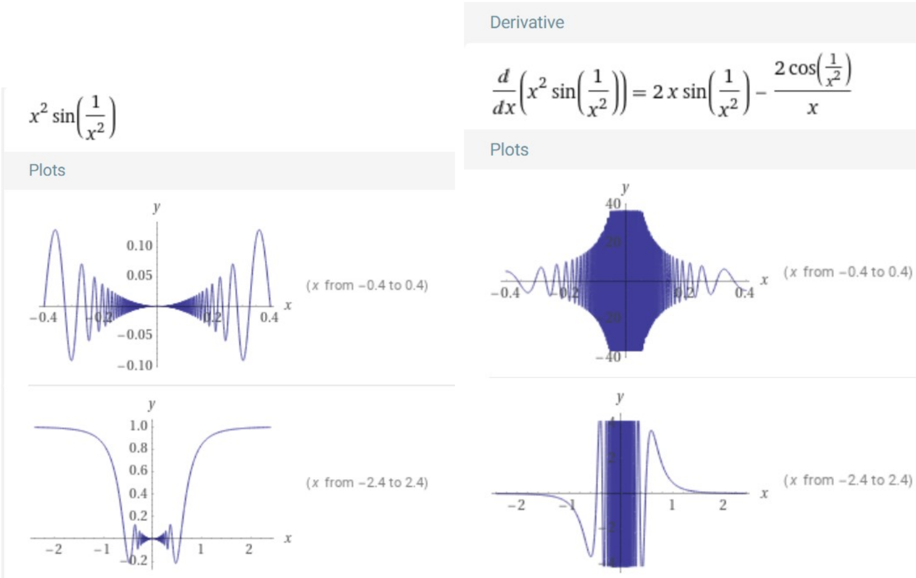
a. Étudier la convergence de la fonction f_2 en 0.
Comme la fonction f_1, la fonction f_2 est écrite comme le produit entre une fonction bornée et une fonction de limite nulle en 0. D'où :

$$f_2(x) \underset{0}{\to} 0.$$

b. Justifier que la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et montrer qu'elle admet un prolongement par continuité $\tilde{f}_2$ en 0.
La fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions continues. En outre $f_2(x) \underset{0}{\to} 0$. La fonction f_2 admet donc un prolongement par continuité en 0 en posant : $\tilde{f}_2(0) = 0$.

c. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_2$.
La fonction $\tilde{f}_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
On a : $\dfrac{\tilde{f}_2(x) - \tilde{f}_2(0)}{x - 0} = f_1(x) \underset{0}{\to} 0.$
La fonction $\tilde{f}_2$ est donc dérivable en 0 et $\tilde{f}_2'(0) = 0$.

Pour étudier la dérivabilité de $\tilde{f}_2$ en 0, on pourrait être tenté de dériver $\tilde{f}_2$ et d'étudier la limite de $\tilde{f}_2'$ en 0. Cette méthode n'aboutit pas car $\tilde{f}_2'$ n'admet pas de limite en 0, donc on ne peut conclure sur la dérivabilité de $\tilde{f}_2$ en 0 (cf. théorème 11 §3.4 chapitre 12).



6. Pour $n > 2$, étudier la convergence, la continuité (*proposer un prolongement par continuité si possible*) et la dérivabilité des fonctions f_n.
Pour tout $n > 2$, la fonction f_n admet une limite nulle en 0 comme produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée, elle est donc prolongeable par continuité en posant $\tilde{f}_n(0) = 0$.
En outre, la limite du taux de variation de la fonction $\tilde{f}_n$ en 0 vaut $f_{n-1}(0) = 0$. Les fonctions $\tilde{f}_n$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Les fonctions f_n sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et les fonctions $\tilde{f}_n$ sont $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Suites définies par une relation de récurrence

Dans chacun des cas suivants, étudier la suite u, c'est à dire déterminer sa monotonie (sauf si u possède des termes non réels) et étudier sa convergence. On établira une formule explicite donnant chaque terme u_n en fonction de n chaque fois que cela sera possible.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 2.$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique dont l'équation au point fixe est :

$$x = -\frac{2}{3}x + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{6}{5}.$$

La suite $v = u - \frac{6}{5}$ est donc géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{6}{5} = 5 - 1,2 = 3,8.$$

On en déduit : $v_n = 3,8\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et donc :

$$\boxed{u_n = 3,8\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1,2}.$$

La suite géométrique v a une raison dans l'intervalle $]-1,0[$ donc elle n'est pas monotone et converge vers 0.
On en déduit que la suite u n'est pas monotone et converge vers $\frac{6}{5}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

a. $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}i$

On reconnaît une suite à termes complexes définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Son équation caractéristique est :

$$r^2 + r + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \in \{j, \bar{j}\} \quad \text{avec } j = \frac{\sqrt{3}i - 1}{2}$$

Les suites qui vérifient la relation de récurrence sont définies par

$$u_n = \lambda j^n + \mu \bar{j}^n, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2.$$

On a en outre :

$$\begin{cases} u_0 = 0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \sqrt{3}i = \lambda j + \mu \bar{j} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(j - \bar{j}) = \sqrt{3}i \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \sqrt{3}i\lambda = \sqrt{3}i \end{cases}.$$

La suite u est donc définie par

$$\boxed{u_n = j^n - \bar{j}^n}.$$

On sait que j est une racine cubique de l'unité donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = \left(j^3\right)^n - \left(\bar{j}^3\right)^n = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad u_{3n+1} = j - \bar{j} = \sqrt{3}i.$$

Ainsi la suite u possède deux suites extraites admettant des limites distinctes, on en conclut que la suite u n'est pas convergeante.

b. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$
On calcule : $u_2 = -u_1 - u_0 = -5$.
Donc $u_1 > u_0$ et $u_2 < u_1$. La suite u n'est donc pas monotone.

On reconnaît une suite à termes réels définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Son équation caractéristique est :

$$r^2 + r + 1 = 0 \iff r \in \{j, \bar{j}\} \quad \text{avec } j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Les suites qui vérifient la relation de récurrence sont définies par

$$u_n = \lambda \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right), \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On a en outre :

$$\begin{cases} u_0 = 2 = \lambda \\ u_1 = 3 = \lambda \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \mu \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = \frac{8}{3}\sqrt{3} \end{cases}.$$

La suite u est donc définie par

$$\boxed{u_n = 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{8}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}.$$

Par périodicité des fonctions sinus et cosinus :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_{3n} = 2 \quad \text{et} \quad u_{3n+1} = 3.$$

Ainsi la suite u possède deux suites extraites admettant des limites distinctes, on en conclut que la suite u n'est pas convergeante.

Remarque : Dans ce cas très particulier ($\rho = 1$), on aurait pu démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{3n} = 2 \quad ; \quad u_{3n+1} = 3 \quad \textit{et} \quad u_{3n+2} = -5.$$

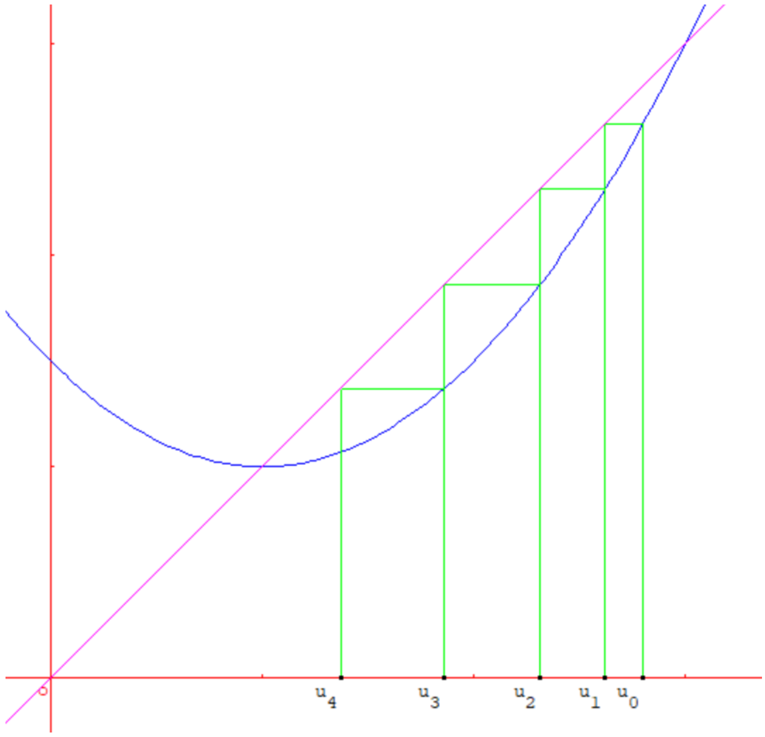
3. $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$.

La suite vérifie une relation de récurrence d'ordre 1.
Sa fonction itératrice f est une fonction trinôme admettant un minimum en

$$x_0 = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1.$$

L'équation au point fixe est :

$$2x = x^2 - 2x + 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0 \iff x \in \{1, 3\}$$



a. $u_0 = 2$

On calcule : $u_1 = \dfrac{3}{2}$. On a donc : $1 < u_1 < u_0 < 3$.

Si pour une valeur donnée de n on a :

$$1 < u_{n+1} < u_n < 3$$

alors, par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[1, 3]$:

$$f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(3) \iff 1 < u_{n+2} < u_{n+1} < 3$$

On en conclut par récurrence que la suite u est décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente.

Sa limite est un point fixe de f dans l'intervalle $[1, 3]$, or $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \geqslant 1$ donc la limite n'est pas 3. La seule possibilité est donc 1.

Donc finalement <u>la suite u est décroissante et converge vers 1</u>.

b. $u_0 = 4$

On calcule : $u_1 = 5,5$. On a donc : $3 < u_0 < u_1$.

Si pour une valeur donnée de n on a :

$$3 < u_n < u_{n+1}$$

alors, par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[3; +\infty[$:

$$f(3) < f(u_n) < f(u_{n+1}) \iff 3 < u_{n+1} < u_{n+2}$$

On en conclut par récurrence que <u>la suite u est croissante</u>, elle admet donc une limite.

Aucun point fixe n'appartient à l'intervalle $[4, +\infty[$, donc <u>la suite u diverge vers $+\infty$</u>.

Exercice 3 : Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = (x^2-1)\mathrm{e}^x \qquad (E)$$

1. En posant $x = 0$, déterminer une condition sur les solutions y de cette équation différentielle.
En posant $x = 0$ l'équation (E) impose : $-y(0) = -\mathrm{e}^0 = -1$.
Toute solution y de (E) vérifie donc $y(0) = 1$.

2. Dans cette question on considère $x > 0$.

a. Justifier que l'équation (E) est alors équivalente à :

$$y' - \frac{1}{x^2}y = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x \qquad (E_1)$$

Avec $x \neq 0$ l'équation est équivalente à l'équation obtenue en divisant chaque membre de l'égalité par x^2, donc $(E) \iff (E_1)$.

b. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (E_1).
Cette équation est

$$y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad (H_1)$$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est la fonction inverse, donc les solutions de (H_1) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

c. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1) *(si elle n'apparaît pas, on pourra mettre en oeuvre la méthode dite de variation de la constante)*
On observe que la fonction exponentielle est une solution évidente de (E_1).

d. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_1).
Les solutions de (E_1) sont la somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène (H_1) à savoir les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(x) = \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

3. Résoudre l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_-^*$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$ la résolution est identique à celle ci-dessus et fournit un ensemble solution similaire, à savoir les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$y(x) = \mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-1/x}, \quad \text{où } D \text{ est une constante réelle.}$$

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer les solutions de l'équation (E).
Après avoir observé que (E_1) est équivalente à (E) sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut affirmer que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 1$, dont la restriction à $\mathbb{R}_-^*$ est une fonction de l'ensemble obtenu à la question **3.**, et dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est une fonction de l'ensemble obtenu à la question **2.d**.
On a : $-\dfrac{1}{x} \underset{0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $-\dfrac{1}{x} \underset{0^-}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition :

$$\mathrm{e}^{-1/x} \underset{0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-1/x} \underset{0^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, toutes les valeurs de la constante C des solutions de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ fournissent des fonctions continues à droite en 0, et aucune des valeurs de la constante D autre que 0 des solutions de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_-^*$ ne fournit de fonction continue à gauche en 0. Nous avons donc la condition $D = 0$.

Le taux de variation à droite d'une solution de l'équation (E) est :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-1/x} - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + C\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x}}.$$

On sait que le premier terme est le taux de variation de la fonction exponentielle en 0, donc $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{0}{\to} 1$.
En outre $\dfrac{\mathrm{e}^u}{u} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparée, donc par composition en amont et en aval avec la fonction inverse :

$$\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{1/x}} \underset{0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, pour toute valeur de la constante C, par produit et somme :

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} \underset{0^+}{\longrightarrow} 1.$$

La limite du taux de variation à droite est donc égal à la limite de la dérivée à gauche de toute solution. Toute valeur de la constante C fournit donc une solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation (E).
Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions y dont la restriction à $\mathbb{R}_-$ est la fonction exponentielle, et dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est définie par

$$y(x) = \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad C \text{ constante réelle.}$$

Problème 1 : Matrices et suites

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes les puissances de A.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Décomposition

On définit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer C puis C^2, et préciser, pour tout entier n supérieur à deux, C^n.

On calcule : $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice nulle étant l'élément absorbant du produit matriciel on a :

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \qquad C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer P^2 et établir la relation : $P^2 = 2P - I_3$, I_3 étant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Posons le produit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où : $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En outre : $2P - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc bien la relation : $P^2 = 2P - I_3$.

3. Déduire de la question précédente que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La relation établie ci-dessus équivaut à : $P(2I_3 - P) = I_3$.

D'après la définition d'une matrice inverse on en conclut que P est inversible d'inverse

$$P^{-1} = 2I_3 - P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On pose $D = P^{-1}BP$. Calculer D et vérifier que D est diagonale.

Réalisons les deux produits matriciels :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matrice diagonale.

5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}B^nP$.

On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} D^n &= (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)...(P^{-1}BP) \\ &= P^{-1}B(PP^{-1})B(PP^{-1})...(PP^{-1})BP \\ &= P^{-1}B^nP \end{aligned}$$

6. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de B^n en explicitant ses neuf coefficients.

On a :

$$P^{-1}B^nP = D^n \iff PP^{-1}B^nPP^{-1} = PD^nP^{-1} \iff B^n = PD^nP^{-1}.$$

Or $\quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc en effectuant les produits matriciels :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on obtient :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en explicitant ses neuf coefficients.

On a : $A = B + C$. Calculons : $BC = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CB$.

Les matrices B et C commutent, donc la formule du binôme de Newton est applicable à l'expression $(B+C)^n$.

D'où, en tenant compte de la nilpotence de la matrice C :

$$A^n = (B+C)^n = B^n + \binom{n}{1} B^{n-1}C = B^n + nB^{n-1}C$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 1-2^{n-1} \\ 0 & 2^{n-1} & 1-2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & 1+n2^{n-1}-2^n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie 2 : Étude de suites définies par une relation de récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe trois nombres réels a_n, b_n et c_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser, pour tout n, les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, ainsi que les valeurs de a_0, b_0 , c_0, a_1, b_1 et c_1.

On montrera notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = 2c_n - 1$.

On a : $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 2^0 & a_0 & b_0 \\ 0 & 2^0 & c_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'égalité est valable au rang 0 avec $\underline{a_0 = b_0 = c_0 = 0}$.

Supposons que pour une valeur donnée de n l'égalité est vraie. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2a_n - 2^n & 2b_n - c_n \\ 0 & 2^{n+1} & 2c_n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par récurrence que l'égalité est vraie pour tout n, avec les conditions :

$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 2^n \\ b_{n+1} = 2b_n - c_n \\ c_{n+1} = 2c_n - 1 \end{cases}$. On a : $a_1 = c_1 = -1$ et $b_1 = 0$.

Remarque : Si au lieu de poser $A^{n+1} = AA^n$ on écrit $A^{n+1} = A^nA$, on obtient les relations de récurrence $b_{n+1} = b_n - a_n$ et $c_{n+1} = c_n - 2^n$.
Les deux versions sont naturellement équivalentes.
Si on a ainsi $c_{n+1} = c_n - 2^n$, on démontre que l'on a également $c_{n+1} = 2c_n - 1$ par récurrence. L'hérédité se prouvant ainsi :

$$c_{n+2} = c_{n+1} - 2^{n+1} = 2c_n - 1 - 2^{n+1} = 2(c_n - 2^n) - 1 = 2c_{n+1} - 1$$

2. Déterminer, pour tout n, l'expression de c_n en fonction de n.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique de raison 2 dont l'équation au point fixe est :

$$x = 2x - 1 \iff x = 1.$$

La suite $c - 1$ est géométrique de raison 2 et de premier terme -1. Donc pour tout entier naturel n :

$$c_n = 1 - 2^n.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0.$$

Méthode 1 : par récurrence
On a : $a_2 = 2a_1 - 2^1 = 2 \times (-1) - 2 = -4.$
Calculons :

$$a_2 - 4a_1 + 4a_0 = -4 - 4 \times (-1) + 4 \times 0 = 0.$$

La relation est vraie au rang 0.
Si pour une valeur donnée de n la relation est vraie alors :

$$\begin{aligned} a_{n+3} - 4a_{n+2} + 4a_{n+1} &= 2a_{n+2} - 2^{n+2} - 4\left(2a_{n+1} - 2^{n+1}\right) + 4\left(2a_n - 2^n\right) \\ &= 2\left(a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n\right) + 2^n(-4 + 8 - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par récurrence on conclut que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 : directement
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1} = 2a_n - 2^n \qquad \text{et} \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2^{n+1} = 2(2a_n - 2^n) - 2^{n+1}$$

Dès lors :

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4a_n - 2^{n+2} - 4(2a_n - 2^n) + 4a_n = 0a_n - 2^{n+2} + 4 \times 2^n = 0.$$

b. En déduire, pour tout n, l'expression de a_n en fonction de n.

La relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants s'écrit aussi :

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

Son polynôme caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ et admet $r_0 = 2$ comme racine double. Il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

Or $a_0 = 0$ donc $\lambda = 0$ et $a_1 = -1$ donc $2\mu = -1$.
D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = -\frac{1}{2}n \times 2^n = -n \times 2^{n-1}.$$

Remarque : Penser à tester la formule pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.

a. Donner, sans justifier, un exemple de matrice de $\mathscr{E}$ et un exemple de matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathscr{E}$.

$$I_3 \in \mathscr{E} \quad \text{et} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathscr{E}.$$

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Le vecteur nul 0_3 n'appartient pas à $\mathscr{E}$, donc $\mathscr{E}$ n'est pas un espace vectoriel, il ne peut donc être un sous-espace vectoriel.

c. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $(M, N) \in \mathscr{E}^2$ alors $MN \in \mathscr{E}$.

Soit $(M, N) \in \mathscr{E}^2$, alors : $\qquad (MN)U = M(NU) = MU = U.$

Donc $MN \in \mathscr{E}$.

d. Montrer que pour tout n, la matrice A^n appartient à $\mathscr{E}$.

Calculons

$$AU = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U.$$

Par une récurrence évidente à partir du résultat de la question précédente on établit que les puissances de toute matrice de $\mathscr{E}$ est encore une matrice de $\mathscr{E}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathscr{E}.$$

Remarque : On observe que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

e. En déduire, pour tout n, l'expression de b_n en fonction de n.

D'après la question précédente :

$$A^n U = U$$

soit

$$\begin{pmatrix} 2^n & -n \times 2^{n-1} & b_n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$2^n - n \times 2^{n-1} + b_n = 1$$

D'où l'expression de b_n en fonction de n :

$$b_n = 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n = 1 + 2^{n-1}(n-2)$$

Problème 2 : Ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 1

On s'intéresse aux suites numériques réelles vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n).$$

On appellera f la fonction itératrice associée à cette relation de récurrence.

1. Existence

a. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en justifiant.

On a : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln(x) \end{array}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

En outre $\ln(x) \underset{0}{\rightarrow} -\infty$ donc par produit et somme : $f(x) \underset{0}{\rightarrow} +\infty$.

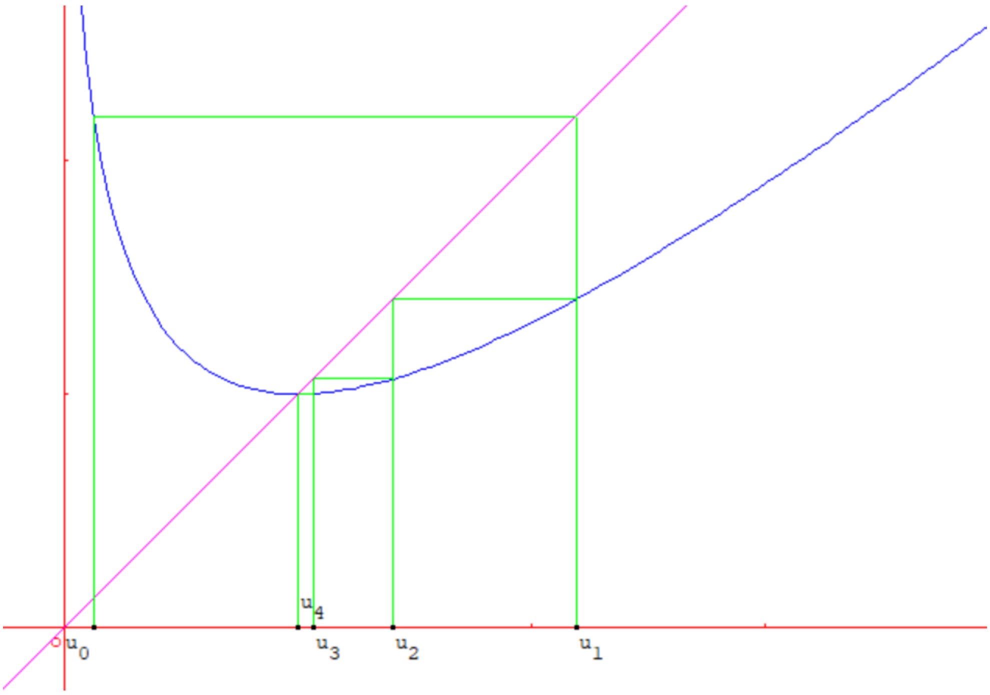
De plus : $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

Or par croissance comparée : $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc par somme et produit :

$$f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty.$$

On en déduit le tableau de signe de f' et de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le premier terme u_0 pour qu'il existe une unique suite u vérifiant la relation de récurrence.
Dans la suite du problème on considère que u_0 vérifie cette condition.
Si $u_0 \leqslant 0$, u_1 n'est pas défini.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or f admet un minimum de 1 sur cet intervalle, donc il est stable par f.
On en déduit que la suite u est définie si et seulement si $u_0 > 0$.

2. Dans cette question on considère $u_0 > 1$

a. Déterminer la monotonie de la suite u.
L'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par f, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
Soit $P(n)$ la propriété :
$$1 < u_{n+1} < u_n.$$
On a : $u_1 = u_0 - \ln(u_0)$, soit $u_1 - u_0 = -\ln(u_0)$.
Or $u_0 > 1$, donc $\ln(u_0) > 0$. On en déduit : $u_1 < u_0$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.
Si, pour une valeur donnée de n, $P(n)$ est vraie alors, en appliquant à chaque membre

de la double inégalité la fonction f croissante sur $]1,+\infty[$ on obtient :

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}.$$

On en conclut par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite u est donc strictement décroissante.

b. Étudier la convergence de la suite u.
La question précédente a établi que la suite u est décroissante et minorée par 1, on en conclut qu'elle est convergente.
Sa limite est un point fixe de f, or le seul point fixe de f dans l'adhérence de l'intervalle $]1,+\infty[$ est 1.
On en conclut : $u_n \to 1$.

3. Si $u_0 < 1$, que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de la suite u ?
Si $u_0 < 1$ alors $u_1 = f(u_0) > 1$ d'après le tableau de variation de la fonction f.
La suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc la même limite que la suite étudiée à la question **2.** :

$$\boxed{u_n \to 1}.$$

Cette suite extraite est strictement décroissante donc $u_2 < u_1$.
Par contre $u_0 < 1 < u_1$.
La suite u n'est donc pas monotone.

4. Dans cette question on considère $u_0 \in]1,3]$.

a. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

La fonction f est croissante sur $]1,3]$, donc :

$$f(]1,3]) \subset]f(1), f(3)] =]1, 3 - \ln(3)] \subset]1,3].$$

L'intervalle $]1,3]$ est donc stable par f, les suites étudiées dans cette question sont donc à valeur dans l'intervalle $]1,3]$.
On a : $f'(3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
En outre f' est la composée de la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction affine décroissante, donc elle est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent :

$$1 < x \leqslant 3 \quad \Longrightarrow \quad f'(1) < f'(x) \leqslant f'(3) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < f'(x) \leqslant \frac{2}{3}.$$

Dès lors, $\forall x \in]1,3[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$.
Donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1| \qquad \text{soit :} \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|.$$

b. En déduire la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 1 + v_n$,
v étant une suite géométrique que l'on précisera.

Soit v la suite définie par $v_n = (u_0 - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Alors $v_0 = u_0 - 1$ donc $u_0 \leqslant 1 + v_0$.
Appelons $P(n)$ la propriété : $\quad u_n \leqslant 1 + v_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} & u_n \leqslant 1 + v_n \\ \Longleftrightarrow \quad & u_n - 1 \leqslant v_n \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{2}{3}(u_n - 1) \leqslant \frac{2}{3} v_n \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, et parce que $u_n \geqslant 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{2}{3}(u_n - 1).$$

On en conclut :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant v_{n+1}, \qquad \text{soit :} \quad u_{n+1} \leqslant 1 + v_{n+1}.$$

On conclut par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leqslant 1 + v_n$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$.
(on pourra faire usage de l'approximation $\mathrm{e} \approx 2,7$*).*
Nous avons établi à la question précédente que la dérivée de la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f est convexe.
D'après la caractérisation de la convexité par la pente des sécantes on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1 < u_n < 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} \leqslant \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} \leqslant \frac{2 - \ln(3)}{2}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \ln(3)}{2} \leqslant \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad & -\ln(3) \leqslant -1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln(3) \geqslant 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3 \geqslant \mathrm{e}^1 \approx 2,7. \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie. On en conclut :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \text{soit :} \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

5. Dans cette question on considère $u_0 \in \left[1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}, 3\right]$.
Déterminer une valeur de $\alpha \in]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha |u_n - 1|$.

Comme établit précédemment la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & f'\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant f'(x) \leqslant f'(3) \\ \Longleftrightarrow \quad & 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{1 - \mathrm{e}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Or $\quad \mathrm{e} > 2,5 \quad$ donc $\quad 1 - \mathrm{e} < -1,5 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{1-\mathrm{e}} > \dfrac{1}{-1,5} = -\dfrac{2}{3}$.

D'où l'encadrement : $\quad -\dfrac{2}{3} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3} \quad$ dont découle la majoration : $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

(f' est $\frac{2}{3}$-lipschitzienne sur $[1-\frac{1}{e}, 3]$.)

On en conclut, en reprenant le raisonnement de la question **4.a.** que pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \alpha |u_n - 1|.$$

Remarque : En utilisant la caractérisation de la convexité par la pente des sécantes on a l'assurance de trouver une valeur de α inférieure à $\dfrac{2}{3}$.

$\sim$