Test 5 de mathématique

Proposition de corrigé

Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ le vecteur $(1,-a,1)$ est-il combinaison linéaire de $(1,1,1)$ et $(a,0,2)$?

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(1,-a,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(a,0,2) \iff \begin{cases} \alpha + a\beta = 1 \\ \alpha = -a \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta(a-2) = 0 \\ \alpha = -a \\ \beta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\alpha \end{cases}$$

Si $a = 2$, le système est équivalent à : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Dans le cas contraire, le système est équivalent à : $\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \\ a = -1 \end{cases}$.

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante est : $a = 2$ ou $a = -1$.

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?

Pour tout réel x on a : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, soit : $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}$.

La première fonction est donc bien combinaison linéaire des deux autres.

Remarque : Si on osait, on dirait qu'elle en est la moyenne.

3. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \sin^2(x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus ?

Si il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad \sin^2(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

Alors

$$x = \frac{\pi}{2} \implies \mu = 1 \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{2} \implies \mu = -1.$$

La première fonction n'est donc pas combinaison linéaire des deux autres.

4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et de A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
Alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (bc-ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+d)A + (bc-ad)I_2$$

Exercice 2

Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0.

On a le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

D'où, si la fonction f admet un développement limité *(même si l'énoncé suppose son existence)* d'ordre 3 au voisinage de 0 il est :

$$-\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)$$

Un tel développement doit être compatible avec la condition : $f(0) = 0$, ce qui est le cas.

On conclut :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

2. La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? de classe $\mathscr{C}_1$ en 0 ?

La fonction f admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0, donc aussi d'ordre 1 *(Chapitre 15 §2.1 Corollaire 6)*. On en conclut, d'après la régularité d'une fonction admettant un développement limité *(Chapitre 15 §2.1 Corollaire 7)* , que la fonction f est continue et dérivable en 0.

Le théorème sur le développement limité d'une dérivée *(Chapitre 15 §2.5 Théorème 18)* nous assure que la fonction f' admet un développement limité d'ordre $3-1=2>0$ en 0, donc elle est continue en 0. La fonction f est donc $\mathscr{C}^1$ en 0.

3. A l'aide du développement limité, déterminer l'équation de la tangente T au graphe Γ de la fonction f en 0, ainsi que la position relative de Γ et T au voisinage de 0.

Le développement limité de f en 0 nous assure l'existence d'une tangente à la courbe

représentative de la fonction f, dont l'équation est : $y = -\frac{1}{2}x$.
La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de la différence :

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

Au voisinage de 0, le terme $\frac{1}{24}x^3$ détermine le signe de l'expression. Donc pour $x < 0$ la courbe est « sous » la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est « au-dessus » de la tangente *(0 est un point d'inflexion de la courbe).*

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si tel est le cas, en proposer une base et donner sa dimension.

1. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\}$.

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\right\} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$$

L'ensemble considéré est donc un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est le singleton : $((1,1))$.
(dit autrement : ... la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,1)$.)

2. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - 5y - 1 = 0\right\}$.
Le vecteur nul n'appartient pas à l'ensemble, ce n'est donc pas un espace vectoriel.

3. $\{(x, 2x, 3x) | x \in \mathbb{R}\}$.

$$\{(x, 2x, 3x) | x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2,3) | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2,3))$$

L'ensemble considéré est donc un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est le singleton :$((1,2,3))$.

4. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + x + y^2 = 0\right\}$.
Le couple $(-1, \sqrt{2})$ appartient à l'ensemble, mais pas son opposé $(1, -\sqrt{2})$.
Donc l'ensemble n'est pas un espace vectoriel.

5. $\left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(0) + f(1) = f'(0)\right\}$.
La fonction nulle appartient à l'ensemble donc il est non vide.
Soit f et g deux éléments de l'ensemble et un scalaire λ.
Alors

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)(0) + (f+\lambda g)(1) &= f(0) + \lambda g(0) + f(1) + \lambda g(1)\\ &= f(0) + f(1) + \lambda(g(0) + g(1))\\ &= f'(0) + \lambda g'(0)\\ &= (f+\lambda g)'(0) \qquad \text{par linéarité de la dérivation}\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, que l'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $f : x \mapsto x^n - \frac{1}{2}$ appartient à l'ensemble.
Cet ensemble est donc de dimension infinie.

Exercice 4

Calculer les développements limités des fonctions suivantes au voisinage de 0.
(*on admet qu'il n'y a pas de problème de définition ni d'existence*).

1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x \operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 4

On a : $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ et $\mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$.

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x \operatorname{Arctan}(x) &\underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)\\ &\underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\\ &\underset{0}{=} x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

2. $f_2 : x \mapsto \ln(1+x^2)\sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 4

On a : $\ln(1+x^2) \underset{0}{=} x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

et :

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2!} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2)\sqrt[3]{1+x} &\underset{0}{=} \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right)\\ &\underset{0}{=} x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right)x^4 + o(x^4)\\ &\underset{0}{=} x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{18}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3

On a : $\sin(2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

D'où :

$$f_3(x) \underset{0}{=} 2x - x^2 - \frac{7}{12}x^3 + o(x^3)$$

4. $f_4 : x \mapsto \sin^4(x)$ à l'ordre 8

On a : $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8)$.

Donc :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &\underset{0}{=} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + o(x^8)\right)^2 \\ &\underset{0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{36}\right)x^6 + o(x^7)\end{aligned}$$

$$f_4(x) \underset{0}{=} x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)$$

5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}$ à l'ordre 3

On a : $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$ et $\dfrac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$.

On en déduit :

$$f_5(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)} \underset{0}{=} \frac{2}{1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)} \underset{0}{=} 2\left(1 + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)\right) \underset{0}{=} 2 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$$

6. $f_6 : x \mapsto (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

$$f_6(x) \underset{0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{7\mathrm{e}}{24}x^2 - \frac{3\mathrm{e}}{16}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$.

On a :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$(A - I_3)(A + 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

A partir du résultat précédent :

$$\begin{aligned} & (A - I_3)(A + 3I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \iff \quad & A^2 + 2A - 3I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \iff \quad & A(A + 2I_3) = 3I_3 \\ \iff \quad & A \times \frac{1}{3}(A + 2I_3) = I_3. \end{aligned}$$

Par définition de l'inversibilité d'une matrice et d'une matrice inverse, on en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $B = A - I_3$ et $C = A + 3I_3$.
Exprimer A en fonction de B et C, sous la forme $A = b\,B + c\,C$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode 1 : La plus efficace
La première égalité fournit : $I_3 = A - B$, et avec la seconde : $C = A + 3(A - B)$, soit

$$A = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C.$$

Méthode 2 :
Le coefficient de C de la deuxième ligne et deuxième colonne est nul.
Cela impose : $-3 = b \times (-4)$, d'où : $b = \dfrac{3}{4}$.
L'égalité des coefficients de la première ligne et de la première colonne *(par exemple)* impose : $2 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 5c$, soit $c = \dfrac{1}{4}$.
On vérifie par calcul mental sur les autres coefficients que l'on a bien :

$$A = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C.$$

4. Que valent BC et CB ? Montrer que B^2 et C^2 sont proportionnels à B et C respectivement.
Nous avons établi à la question **1.** que $BC = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Remarque : Deux matrices carrées dont un produit est nul ne commutent pas nécessairement. On peut simplement calculer les coefficients du produit CB, ou procéder comme suit :

On a : $\quad BC = (A - I_3)(A + 3I_3) = A^2 + 2A - 3I_3$

et $\quad CB = (A + 3I_3)(A - I_3) = A^2 + 2A - 3I_3.$

On en déduit : $\quad CB = BC = O_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$

Remarque : Un calcul brut nous donnerait le résultat, mais tentons d'utiliser le premier résultat de la question.
B^2 est proportionnel à B si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $B^2 = kB$, soit $B(B - kI_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Cela n'impose pas que $C = B - kI_3$, mais si tel est le cas, le résultat est prouvé.

On observe que $C = B + 4I_3$, donc on a :

$$B(B + 4I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \qquad \text{ou encore} \qquad B^2 = -4B.$$

Symétriquement : $B = C - 4I_3$, donc $C(C - 4I_3) = 0$, soit $C^2 = 4C$.

Les matrices B^2 et C^2 sont donc bien proportionnelles à B et C respectivement.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels b_n et c_n tels que $A^n = b_nB + c_nC$.

Méthode 1 : Par récurrence
Pour $n = 0$: $A^0 = \mathrm{I}_3 = A - B = C - 3I_3 + B$.
Or on observe que $C - B = 4I_3$.
Dès lors :

$$A^0 = C + B - \frac{3}{4}(C - B) = \frac{5}{4}B + \frac{1}{4}C$$

Supposons que pour une valeur donnée de n il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = b_nB + c_nC$$

Alors

$$A^{n+1} = A^nA = (b_nB+c_nC)A = b_nBA+c_nCA = b_nB(C-3I_3)+c_nC(B+I_3) = -3b_nB+c_nC$$

car $BC = CB = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
On conclut par récurrence le résultat.

Méthode 2 : A l'aide de la formule du binôme de Newton
Les résultats des questions **1.** et **4.** nous assurent que les matrices B et C commutent, et que leur produit est nul. La formule du binôme de Newton est donc applicable dans le cas ci-dessous et fournit :

$$A^n = \left(\frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C\right)^n = \left(\frac{3}{4}B\right)^n + \left(\frac{1}{4}C\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n B^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n C^n.$$

Or

$$B^n = B^2B^{n-2} = -4BB^{n-2} = -4B^{n-1}$$

Par une récurrence immédiate on obtient : $B^n = (-4)^{n-1}B$.
De même on obtient : $C^n = 4^{n-1}C$. On en conclut :

$$A^n = (-1)^{n+1}\frac{3^n}{4}B + \frac{1}{4}C.$$

6. À l'aide des relations obtenues à la question précédente, déterminer les expressions de b_n et de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Si on a utilisé la formule du binôme de Newton dans la question précédente, les formules ont déjà été obtenues. Si on a utilisé la méthode 2 on peut procéder comme suit.

La question précédente a établi les relations de récurrence suivantes :
$\forall n \in \mathbb{N} : b_{n+1} = -3b_n$ et $c_{n+1} = c_n$ faisant apparaître la suite c comme une suite constante et b comme une suite géométrique de raison -3. On obtient alors :

$$b_n = (-3)^nb_0 = -\frac{(-3)^n}{4} \qquad \text{et} \qquad c_n = c_0 = \frac{1}{4}.$$

7. Donner alors l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On précisera ses 9 coefficients.

On obtient alors, par produit d'une matrice avec un scalaire :

$$b_nB = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -2(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} \\ 2(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -4(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -2(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} \\ (-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -2(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} & -(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_nC = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

et somme de matrices :

$$A^n = \begin{pmatrix} -\dfrac{(-3)^n}{4} + \dfrac{5}{4} & \dfrac{(-3)^n}{2} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{(-3)^n}{4} - \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{(-3)^n}{2} + \dfrac{1}{2} & (-3)^n & \dfrac{(-3)^n}{2} - \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{(-3)^n}{4} + \dfrac{1}{4} & \dfrac{(-3)^n}{2} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{(-3)^n}{4} + \dfrac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5-(-3)^n}{4} & \dfrac{(-3)^n-1}{2} & \dfrac{(-3)^n-1}{4} \\ \dfrac{1-(-3)^n}{2} & (-3)^n & \dfrac{(-3)^n-1}{2} \\ \dfrac{1-(-3)^n}{4} & \dfrac{(-3)^n-1}{2} & \dfrac{3+(-3)^n}{4} \end{pmatrix}$$

$\sim$