Test de mathématique

Semaine 2

Proposition de corrigé *(avec commentaires)*

Exercice 1

Démontrer : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe un nombre rationnel positif dont le carré vaut 3.
Soit $\frac{a}{b}$ son écriture sous forme de fraction irréductible.
Alors on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3 \qquad \text{d'où :} \qquad a^2 = 3b^2$$

On a : $3 \mid a^2$ *("3 divise a^2")*.
Donc 3 est présent dans la décomposition de a^2 en produit de facteurs premiers. Ceci n'est possible que si 3 est présent dans la liste des diviseurs premiers de a, donc $3 \mid a$.
Dit autrement : $\exists k \in \mathbb{N}, a = 3k$.
Avec cet entier k, la condition devient :

$$(3k)^2 = 3 \times b^2 \qquad \text{soit} \qquad b^2 = 3k^2.$$

On peut alors affirmer que le nombre premier 3 divise b^2, donc b.
Nous venons d'établir que a et b sont nécessairement des multiples de $3 \neq 1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse affirmant que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.
Par un raisonnement par l'absurde nous concluons que l'hypothèse initiale est fausse, c'est à dire qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut 3 : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{Z}$, l'inéquation (I) : $\dfrac{x-2}{x-1} > \sqrt{x+4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cette inéquation (*les valeurs de x pour lesquelles les expressions écrites sont définies*).
Le quotient est défini si et seulement si $x \neq 1$, et la racine carrée est définie si et seulement si $x \geqslant -4$.
On en déduit que l'ensemble de définition de l'inéquation est $\mathscr{D} = [-4; +\infty[\setminus\{1\}$.

2. Étudier le signe du membre de gauche de l'inéquation. En déduire de nouvelles valeurs de x qui ne peuvent pas être solution de l'inéquation (I).
Tableau de signe :

valeur de x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{x-2}{x-1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi le membre de gauche de l'inéquation est strictement négatif si et seulement si $x \in]1; 2[$.
Une racine carrée n'est jamais strictement négative, donc les valeurs de x de l'intervalle $]1, 2[$ ne peuvent pas être solution de l'inéquation (I).

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'ensemble des valeurs de x qui n'ont pas été éliminées aux deux questions précédentes.

a. Montrer que pour $x \in \mathscr{D}'$, $\quad (I) \iff x(x^2+x-3) < 0$.
Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, chaque membre de l'inéquation est positif. Or la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{x-2}{x-1} > \sqrt{x+4} \\
\iff\quad & \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} > x+4 \\
\iff\quad & (x-2)^2 > (x-1)^2(x+4) \qquad \text{car } (x-1)^2 \text{ est strictement positif} \\
\iff\quad & x^2-4x+4 > (x^2-2x+1)(x+4) \\
\iff\quad & x^2-4x+4 > x^3-2x^2+x+4x^2-8x+4 \\
\iff\quad & x^3+x^2-3x < 0 \\
\iff\quad & x(x^2+x-3) < 0
\end{aligned}$$

b. En déduire l'ensemble solution S de l'inéquation (I) dans $\mathbb{R}$.
Le discriminant du trinôme x^2+x-3 est : $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-3) = 13 > 0$.
Le trinôme admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} > -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

A l'aide de la règle du signe d'un trinôme, et de celle d'un produit on obtient le tableau de signe :

x	-4		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		0		1		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2+x-3		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x^2+x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) dans $\mathbb{R}$:

$$S = \left[-4\ ;\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup\ ]\,0\ ;\ 1\,[.$$

4. Ensemble solution de l'inéquation (I) dans $\mathbb{Z}$

a. A partir de l'encadrement $9 < 13 < 16$, démontrer l'encadrement :

$$-2,5 < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2.$$

On a :

$$\begin{array}{lc}
 & 9 < 13 < 16 \\
\Longrightarrow & 3 < \sqrt{13} < 4 \\
\Longrightarrow & \dfrac{-1-3}{2} > \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} > \dfrac{-1-4}{2} \quad \textit{(on a appliqué une fonction affine décroissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Longrightarrow & -2,5 < \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2.
\end{array}$$

Remarque : On aurait pu écrire des équivalences ($\Longleftrightarrow$) plutôt que des implications ($\Longrightarrow$), mais les implications suffisent.

b. Déterminer l'ensemble S' solution de l'inéquation (I) dans $\mathbb{Z}$.
L'encadrement obtenu à la question précédente nous permet d'affirmer que les seuls entiers de l'intervalle $\left[-4\ ;\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right[$ sont -4 et -3.
Il n'y a pas d'entier dans l'intervalle ouvert $]0,1[$.On en déduit finalement :

$$S' = \{-4\ ;\ -3\ \}.$$

Remarque : On vérifie par calcul mental que -4 et -3 sont solution.

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, calculer les deux sommes $\quad U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \left(5^k - 4k - 2n + 3\right) \quad$ et $\quad V_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-2k}$.

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(5^k - 4k - 2n + 3\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} 5^k - 4\sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} (-2n+3) \\
&= \frac{1-5^{n+2}}{1-5} - 4\frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+2)(3-2n) \\
&= \frac{5^{n+2}-1}{4} - 2(n+1)(n+2) + (n+2)(3-2n) \\
&= \frac{5^{n+2}-1}{4} + (n+2)(-2n-2+3-2n) = \frac{5^{n+2}-1}{4} + (n+2)(1-4n)
\end{aligned}$$

Remarque : On vérifie que $U_0 = 8$ avec les deux expressions.

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{9}\right)^k 3^n$$

On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{9}$ et de premier terme 3^n. On en déduit :

$$V_n = 3^n \frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3^{n+2}}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$$

Remarque : On vérifie que $V_0 = 1$ avec les deux expressions.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on veut calculer la somme : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{(k+1)!}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

$S_1 = 0$
$S_2 = 0 + \dfrac{3}{3!} = \dfrac{1}{2}$
$S_3 = S_2 + \dfrac{8}{4!} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

2. Pour $n \in \{1;2;3\}$, calculer $1 - \dfrac{1}{n!}$.
En déduire une conjecture sur une expression simple de S_n en fonction de n.

On a : $\quad 1 - \dfrac{1}{1!} = 0 \;;\quad 1 - \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2} \;;\quad 1 - \dfrac{1}{3!} = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.
On peut raisonnablement conjecturer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 - \dfrac{1}{n!}$.
Remarque : Ça fonctionne même avec $n = 0$.

3. Prouver cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel non nul n, appelons (P_n) la propriété : $\quad S_n = 1 - \dfrac{1}{n!}$.
On a : $S_1 = 0 = 1 - \dfrac{1}{1!}$, donc (P_1) est vérifiée.
Montrons que si, pour une valeur donnée de n la propriété (P_n) est vérifiée *(hypothèse de récurrence)*, alors la propriété (P_{n+1}) l'est aussi .*(c'est l'hérédité)*
On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2-1}{(k+1)!} && \textit{c'est la définition de } S_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{(k+1)!} + \frac{(n+1)^2-1}{(n+2)!} && \textit{on a fait apparaître } S_n \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n(n+2)}{(n+2)!} && \textit{on a fait intervenir l'hypothèse de récurrence} \\
&= 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} && \textit{on réduit au même dénominateur} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} && \textit{CQFD (Ce Qu'il Fallait Démontrer)}
\end{aligned}$$

La propriété (P_n) est donc vraie au premier rang et héréditaire, on en conclue, d'après le principe de récurrence, qu'elle est vraie pour tout entier naturel non nul n.

4. En recherchant une simplification télescopique, et en passant par un changement d'indice bien indiqué, trouver une façon directe de calculer S_n.

On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \textit{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \textit{changement d'indice :} \quad p=k-1, \quad k=p+1 \\
&= 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} \\
&= 1 - \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

∼