Concours Blanc

Épreuve de mathématique

Ce sujet est constitué de quatre exercices et d'un problème, chacun sur l'un des grands thèmes vus jusqu'au mois de février : fonctions et suites récurrentes, intégration, équations différentielles, matrices et espaces vectoriels. On y retrouve, à des doses plus ou moins importantes, des nombres complexes, des développements limités, des suites de référence, des sommes, des coefficients binomiaux...

Commencez par lire le sujet et repérez les parties où vous pensez que votre savoir faire sera le mieux mis en valeur.
Prenez le temps de bien vérifier vos calculs, les justifier et soignez la rédaction.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, signalez-le clairement sur votre copie, apportez les modifications qui vous semblent nécessaires et continuez l'épreuve en conséquence.

La dernière question de l'exercice 2 est une question ouverte d'approfondissement qui referme plusieurs étapes. Un candidat à l'aise sur les idées en jeu et leur rédaction pourra avec profit l'attaquer.

Le problème est d'un niveau global significativement plus élevé que celui des exercices. Selon son niveau, on pourra vouloir s'y attaquer résolument, ou plutôt montrer des compétences ponctuelles en répondant aux questions les plus abordables et en laissant celles qui sont plus difficiles.

Exercice 1 : Équation différentielle

Dans cet exercice, on étudie les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad (E)$$

pour différentes expressions de la fonction réelle f.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E).

2. On suppose dans cette question que f est la fonction constante égale à 1.
Déterminer une solution particulière φ_1 de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \qquad (E_1)$$

3. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = x + 2$.
Montrer que la fonction $\varphi_2 : x \mapsto \dfrac{1}{16}(2x+5)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_2)$$

4. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = \sin(x)$.

a. Déterminer une solution particulière complexe $\varphi_{\mathbb{C}}$ de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-1)} \qquad (E_{\mathbb{C}})$$

b. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire $Z_1 = (a + \mathrm{i}b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sous forme algébrique.

c. En déduire l'écriture algébrique de $Z_2 = (a + \mathrm{i}b)\,\mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-1)}$.

d. Déduire des questions ci-dessus une solution particulière réelle φ_3 de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_3)$$

5. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = 16x + 29 + 4\sin(x)$.
A l'aide des questions précédentes, déduire en fonction de φ_1, φ_2 et φ_3, les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = \big(16x + 29 + 4\sin(x)\big)\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_4)$$

On rédigera soigneusement la réponse, et on ne se lancera pas dans de longs calculs.

Exercice 2 : Fonction et suite récurrente

On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Régularité de f au voisinage de 0

a. Rappeler les développements limités en 0 de la fonction sh à l'ordre 4, et de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 1.

b. En déduire que si f admet un développement limité d'ordre 3 en 0, alors celui-ci est
$$1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3).$$

c. Justifier que f admet bien ce développement limité en 0.
En déduire que f est continue et dérivable en 0.

d. Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, et préciser en justifiant les positions relatives de f et de T au voisinage de 0.

2. Propriétés de la fonction f

a. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
(on ne cherchera pas à déterminer α)

b. Justifier que $\alpha > 0$, puis calculer $\mathrm{ch}(\alpha)$ et exprimer $f(\alpha)$.

c. Déterminer la parité de la fonction f.
En déduire qu'une restriction du domaine d'étude de la fonction f à $\mathbb{R}_+$ est légitime.

d. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$ est strictement positive.

e. En déduire que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, puis que $\alpha < 1$.

f. Déterminer un équivalent simple de la fonction g au voisinage de 0.

g. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}^2(x)$.

h. Établir que la fonction f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3. Étude de suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Justifier la suite u est bien définie, et que tous ses termes sont positifs.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(u_0 - \alpha)$.

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

e. <u>*Question d'approfondissement*</u> : Établir le résultat ci-dessus en utilisant (*entre autres*) le théorème de convergence monotone.

Exercice 3 : Matrices

Les matrices de cet exercice appartiennent à l'ensemble $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer les puissances de la matrice M par trois méthodes différentes.

Partie 1 – À l'aide d'une matrice diagonale

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2 et P^3.

2. Vérifier que $P^3 - 3P^2 + P + I = 0_3$. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

3. Vérifier que la matrice $D = P^{-1}MP$ est diagonale.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}M^nP$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

Partie 2 – À l'aide de suites

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis en déduire directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de A^n en fonction de A.

2. Exprimer M en fonction de A et I.
En déduire une expression de M^2 en fonction de A et I.

3. Démontrer qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = I + u_nA$.
(on pourra mettre en oeuvre un raisonnement par récurrence)

4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 4$.
En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de M^n.

Partie 3 – Par le binôme de Newton

On considère la matrice $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$.

1. Calculer J^2 et en déduire directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de J^n.

2. Justifier que la matrice J n'est pas inversible.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de M^n en fonction de n, I et J.

Exercice 4 : Espaces vectoriels

1. Déterminer si les ensembles ci-dessous sont ou non des sous espaces vectoriels.
Selon les cas, en proposer une base et en déduire la dimension, ou établir qu'ils sont de dimension infinie.

a. $E_1 = \{(a, -2a, 5a), a \in \mathbb{R}\}$

b. $E_2 = \left\{(x, y, x+y, x-y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

c. $E_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\}$

d. $E_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\right\}$

e. $E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$

f. $E_6 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) + f(1) = f(2)\right\}$

g. $E_7 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ est convergente }\right\}$

2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u(1, -1, 1, -1)$, $v(-2, 1, 1, 0)$ et $w(0, -1, 3, -2)$.
Soit le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
On pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + t = 0\}$.

a. Déterminer une base et la dimension de F.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer une base et la dimension de G.

d. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

e. Montrer que la famille $((1, -1, 1, -1), (-2, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

f. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Problème : Intégration

Pour tout entier naturel n on considère :

$$I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t$$

Dans la suite, toutes les questions invoquant n impliquent le sous-entendu : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

Partie 1 : Une expression explicite de I_n.

1. Calculer simplement I_0 et I_1.

2. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t - t^2)^n \,\mathrm{d}t = 0$.

On pourra effectuer le changement de variable : $u = t - t^2$.

b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} I_n$.

On pourra remarquer que $t^n(1-t)^n = (t - t^2)^n$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n \,\mathrm{d}t$.

4. **a.** Justifier que : $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n \,\mathrm{d}t.$

b. En déduire, à l'aide des questions **2.** et **3.**, que : $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)} I_n.$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$

Partie 2 : Lien entre I_n et J_n

1. Calculer J_0, J_1 et J_2.

2. Montrer que : $J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(x) \,\mathrm{d}x.$

On pourra effectuer le changement de variable : $t = \pi - x$ dans J_n.

3. Montrer que : $I_n = \dfrac{1}{4^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(2u)\big)^{2n+1} \,\mathrm{d}u.$

On pourra effectuer le changement de variable : $t = \cos^2(u)$ dans I_n.

4. En déduire, à l'aide du changement de variable $v = 2u$, que : $I_n = \dfrac{1}{4^n} J_{2n+1}.$

Partie 3 : Des résultats sur les sommes

1. **a.** A l'aide de l'identité géométrique, écrire sous forme de quotient la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} (t-t^2)^k.$$

b. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t.$

2. On pose : $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t.$

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t.$

b. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $(t(1-t))^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}.$

c. Déduire des questions précédentes : $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9 \times 4^{n+1}}.$

d. Justifier que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3. En déduite la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}.$

4. A l'aide de la formule du binôme de Newton et des résultats de la partie 1, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

$\sim$