Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 h

Proposition de corrigé

Exercice 1 : Exemple diffinitionnelle

Dans cet exercice, on étude les matrices telles de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = M(t)\,M(t)$$

1. Définition équivalente de la fonction exponentielle

Un théorème du cours utilise la fonction exponentielle comme suit :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \exp(M) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{M^i}{i!}$$

Question : Et Pourquoi ce théorème est vrai ?

L'équation monotonique de $\mathbb{R}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

Les matrices telles de l'équation monotone nommée $\exp(M)$ sont aussi des fonctions $t \mapsto \exp(tM)$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{(tM)^i}{i!} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i M^i}{i!}$$

Les matrices telles vérifient la propriété suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i M^i}{i!}$$

Réponse : *Et Pourquoi ?*

Et Pourquoi : Il est clair que $\exp(tM)$ est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}[t]$; donc $M(t)$ vérifie l'équation différentielle $M'(t) = M(t)\,M(t)$; $M(t)$ est une fonction continue et dérivable.

2. Propriétés de la fonction $\exp$

Question : *Et Pourquoi ?*

Et Pourquoi : Il est clair que $\exp(tM)$ est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}[t]$; donc $M(t)$ vérifie l'équation différentielle $M'(t) = M(t)\,M(t)$; $M(t)$ est une fonction continue et dérivable.

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exp(sM)\exp(tM) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{s^i M^i}{i!} \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i M^i}{i!}$$

Calculons pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\exp(sM)\exp(tM) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{(s+t)^i M^i}{i!} = \exp((s+t)M)$$

La fonction $\exp$ est donc bien un morphisme particulier de l'équation $(\mathbb{R}, +)$.

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s \neq t$, on a $\exp(sM) \neq \exp(tM)$:

$$\exp(sM) = \exp(tM) \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{s^i M^i}{i!} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i M^i}{i!} \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{(s-t)^i M^i}{i!} = I_n$$

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s \neq t$, on a $\exp(sM) \neq \exp(tM)$:

$$\exp(sM) = \exp(tM) \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{(s-t)^i M^i}{i!} = I_n$$

**Réponse