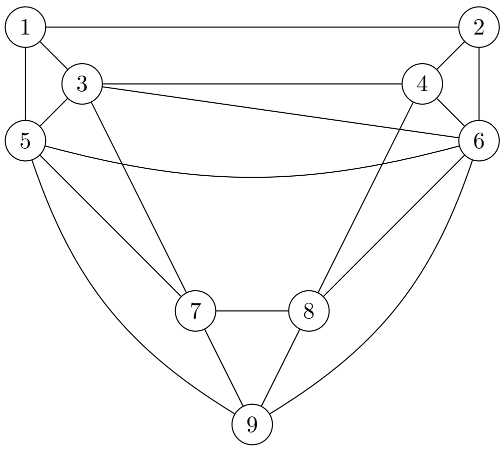
Graphes



Sujet Central 2016

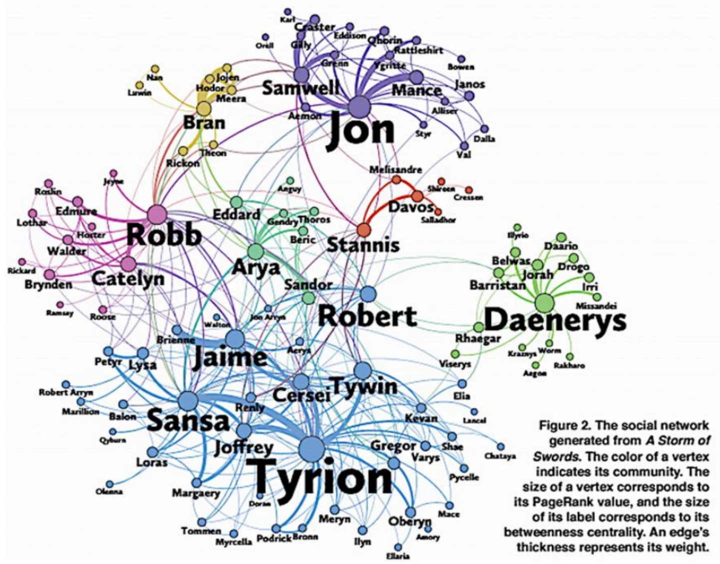


Image issue de maa.org

1 Définition d'un graphe

1.1 Graphes orientés

Définition 1.1.1. (graphe orienté)
Un graphe orienté G est la donnée d'un ensemble fini S et d'un ensemble A de couples d'éléments de S (c'est-à-dire que A est un sous-ensemble du produit cartésien $S \times S$). On note alors $G = (S; A)$.

Définition 1.1.2. (Sommet)
Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle sommet (ou noeud) du graphe G tout élément de S

Définition 1.1.3. (Arc)
Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle arc du graphe G tout élément de A.
De plus, si $a = (s_1; s_2)$ on dit :

- que s_1 est l'origine (ou sommet initial) de l'arc a,
- que s_2 est l'extrêmité (ou sommet terminal) de l'arc a,
- que l'arc a est sortant en s_1 et incident en s_2,
- que s_1 est un prédécesseur de s_2 et que s_2 est un successeur de s_1.

Remarque 1.1.4.

La définition 1.1.1 peut être interprétée comme suit :
On appelle graphe orienté la donnée d'un ensemble S de sommets et d'un ensemble A de relations entre ces sommets, représentées par des flèches (d'où l'adjectif ***"orienté"***) reliant deux sommets, de sorte qu'il n'y ait jamais deux arcs distincts qui aient le même sommet de départ et le même sommet d'arrivée.

Exemple 1.1.5.

- Algorithme de recherche de google (pagerank)
- Réseaux sociaux
- Graphe des relations entre personnages d'une série télé ; voici une étude du cas de games of thrones :

  https ://networkofthrones.wordpress.com/
- Cartes des trains

Définition 1.1.6. (boucle)
Soit $G = (S, A)$ un graphe, et $a = (s_1, s_2) \in A$ un arc de G. On dit que a est une boucle si $s_1 = s_2$.

Définition 1.1.7. (degré)
Soit $G = (S; A)$ un graphe. Soit $s \in S$.

- On appelle degré entrant de s, et on note $d_-(s)$, le nombre d'arcs dont le sommet terminal est s (c'est-à-dire de la forme $(v; s)$).
- On appelle degré sortant de s, et on note $d_+(s)$, le nombre d'arcs dont le sommet initial est s (c'est-à-dire de la forme $(s; v)$).

1.2 Graphes non orientés

Définition 1.2.1. (graphe non orientés)
Un graphe non orienté est la donnée d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble A de paires (*donc sans ordre*) de sommets distincts (*donc sans boucle*).

Définition 1.2.2. (Sommet)
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle sommet (ou noeud) du graphe G tout élément de S

Définition 1.2.3. (Arête)
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle arête du graphe G tout élément de A.
Soit $a = \{s_1; s_2\}$. On dit

- l'arête a est incidente à s_1 et à s_2
- les sommets s_1 et s_2 sont adjacents

Définition 1.2.4. (Degré)
Soit $G = (S; A)$ un graphe non orienté. Soit $s \in S$. On appelle degré de s, et on note $d(s)$, le nombre d'arêtes incidentes à s.

Exemple 1.2.5. (Les 7 Ponts de Königsberg)

Définition 1.2.6. (Ordre et taille d'un graphe)
Soit $G = (S; A)$ un graphe non orienté.

- On appelle ordre de G le nombre de sommets de G ; c'est $\mathrm{Card}(S)$.
- On appelle taille de G le nombre d'arêtes de G ; c'est $\mathrm{Card}(A)$.

2 Chemin d'un sommet à un autre

2.1 Cas des graphes orientés

Définition 2.1.1. (Chemin dans un graphe orienté)
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un chemin d'un sommet u vers un sommet v est une suite $s_0, s_1, s_2, \dots, s_k$ de sommets adjacents tels que $u = s_0$, $v = s_k$, c'est-à-dire tels que que

$$s_0 = u, \qquad s_k = v, \qquad \forall i \in [\![1; k]\!], (s_{i-1}; s_i) \in A.$$

On dira que le chemin contient les sommets $s_0, s_1, \dots, s_k$ et les arcs $(s_0; s_1), (s_1; s_2), \dots, (s_{k-1}; s_k)$.

De plus, le chemin est dit élémentaire si les sommets qu'il contient sont deux à deux distincts.

Définition 2.1.2. (Longueur d'un chemin)
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. La longueur d'un chemin de sommets $s_0, s_1, \dots, s_k$ est le nombre d'arcs dans le chemin, c'est-à-dire k.

Définition 2.1.3. (Accessibilité)
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que v est accessible à partir de u s'il existe un chemin de u à v.

Définition 2.1.4. (Circuit)
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un chemin $s_0, s_1, \dots, s_k$ forme un circuit si $s_0 = s_k$ et si le chemin comporte au moins un arc ($k \geq 1$).

Remarque 2.1.5.
Une boucle est un circuit de longueur 1.

2.2 Cas des graphes non orientés

Comme tout graphe non orienté se traduit sous la forme d'un graphe orienté, les définitions de la sous-section précédentes peuvent être utilisées aussi pour les graphes non orienté à une nuance sur le vocabulaire près :

- on utilise le mot chaîne plutôt que le mot chemin ;
- on utilise le mot cycle plutôt que le mot circuit

Définition 2.2.1. (Acyclicité)
Un graphe non orienté est dit acyclique s'il ne contient aucun cycle.

2.3 Connexité des graphes non orientés

Définition 2.3.1. (Graphe connexe)
Un graphe non orienté est dit connexe si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet, c'est-à-dire si pour tout $u \in S$ et tout $v \in S$ il existe une chaîne qui relie u et v.

Définition 2.3.2. (Sous-graphe)
Soient $G = (S; A)$ et $G' = (S'; A')$. On dit que G' est un sous-graphe de G si

$$S' \subset S \qquad \text{et} \qquad A' \subset A.$$

Définition 2.3.3. (Composantes connexes d'un graphe)
Une composante connexe d'un graphe non-orienté G est un sous-graphe G' de G qui est connexe et maximal pour l'inclusion (c'est-à-dire qu'aucun autre sous-graphe connexe de G ne contient G').

3 Implémentation des graphes

Dans toute la suite, on considère un graphe $G = (S; A)$ d'ordre n. On énumère les sommets de G :

$$S = \{\ s_1; \ldots ; s_n\ \}.$$

Définition 3.1. (Liste d'adjacence)
La liste d'adjacence de G est une liste T de longueur n telle que l'élément $T[i]$ soit la liste des sommets adjacents au sommet s_{i+1}.

En particulier, la liste d'adjacence T est une liste de listes. Elle peut donc être pensée comme une matrice.

Définition 3.2. (Matrice d'adjacence)
La matrice d'adjacence de G est la matrice $M = (m_{i,j})$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]$ ont ait

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_j \text{ est un successeur de } s_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 3.3.
Plutôt qu'utiliser une liste adjacence, on pourrait aussi représenter le grahe à l'aide d'un dictionnaire indexé par les sommets.

Proposition 3.4.
Soit M la matrice d'adjacence du graphe G. On donne un nom aux coefficients de la puissance n-ième M^n de M :

$$M^n = (\alpha_{i,j}).$$

Alors le coefficient $\alpha_{i,j}$ à la ligne i et la colonne j de M^n contient le nombre de chemins distincts de longueur n du sommet s_i vers le sommet s_j.
En particulier, on compte le nombre de circuits de longueur n sur la diagonale.

∼