Table des matières

Chapitre 1

Rappels et compléments calculatoires

Objectifs

- Revoir les ensembles de nombres usuels, introduire de nouvelles notations
- Rappeler ou introduire les règles de calcul usuelles
- S'entraîner à effectuer efficacement les premiers calculs à la main

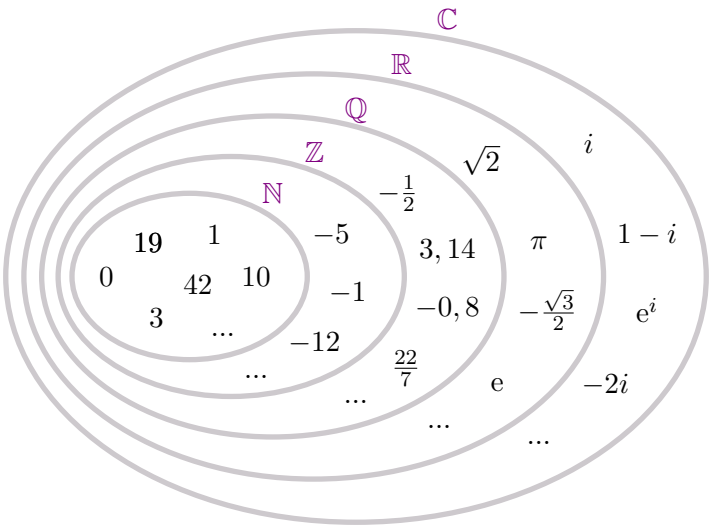
1 Ensembles de nombres

1.1 Ensembles usuels

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fraction dont le numérateur et le dénominateur sont **entiers**.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, que l'on peut définir comme l'ensemble des limites de suites convergentes de rationnels.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, que l'on peut définir comme l'ensemble $\mathbb{R}$ augmenté d'un nombre dont le carré vaudrait -1, et de tous les nouveaux nombres que l'on obtiendrait par addition et multiplication *(sera étudié dans un chapitre ultérieur)*.

On a les inclusions successives : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$**.**

Illustration



- $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ **privés de 0**
- On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels **positifs ou nuls** (**on dit plus simplement "positifs"**), $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels **strictement positifs**. De même, on note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble **des réels négatifs**, et $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble **des réels strictement négatifs**.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour tous réels a et b (dit autrement : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$), avec $a \leqslant b$, on définit des ensembles de nombres appelés ***intervalles*** de la façon suivante :

- les intervalles ***ouverts***, du type $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
  ou $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- les intervalles ***semi-ouverts***, du type $[a,b[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
  ou $[a,+\infty[= \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
- les intervalles ***fermés bornés*** ou ***segments*** : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

1.3 Intervalles de $\mathbb{Z}$

Pour tous entiers relatifs a et b (dit autrement : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2$), avec $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris entre a et b.

$$[\![a,b]\!] = \mathbb{Z} \cap [a,b] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$$

2 Divisibilité, nombres premiers et forme irréductible d'un rationnel

Définition 1 (Divisibilité, diviseur, multiple)
Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un **multiple** *de b ou que a est* **divisible** *par b ou que b est un* **diviseur** *de a ou que b* **divise** *a lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.*
On note cette relation $b \mid a$.

Définition 2 (Nombre premier)
Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$.

- *p est un* **nombre premier** *lorsque ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1* ***et lui-même****.*
- *Sinon, p est dit* **composé***.*
  Dans ce cas, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $1 < k < p$ et $k \mid p$.

Théorème - Définition 1 (Décomposition en produit de facteurs premiers)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
Il existe des nombres premiers p_1, p_2, ..., p_r et des entiers naturels non nuls α_1, α_2, ..., α_r tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_r^{\alpha_r} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

Cette écriture s'appelle la décomposition de n en produit de facteurs premiers, ou **décomposition primaire** *de n, et est unique, à l'ordre des facteurs près.*

Théorème 2 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)
Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*

Exercice 1
Montrer que pour tout nombre premier p, $\sqrt{p}$ est irrationnel. *

Définition 3 (Entiers naturels premiers entre eux)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On dit que a et b sont **premiers entre eux** *lorsque 1 est leur seul diviseur commun, i.e. lorsque leurs décompositions primaires ne comportent aucun facteur en commun.*

Théorème 3 (Forme irréductible d'un nombre rationnel)
Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$r = \frac{p}{q} \qquad \text{avec } |p| \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Vocabulaire
On dit alors que la fraction $\frac{p}{q}$ est **irréductible**, *ou que r est présenté sous* **forme irréductible**.

3 Valeur absolue

Définition 4 (Valeur absolue)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** *de x et on note $|x|$ le réel positif défini par :*

$$|x| = x \ \text{ si } \ x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| = -x \ \text{ si } \ x < 0.$$

Définition 5 (Interprétation géométrique)
$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on appelle **distance entre les points d'abscisse x et d'abscisse y** *(sur la droite des réels) le réel positif $|x - y|$.*

Proposition 1 (Distance à l'origine)
Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine de la droite des réels (la valeur absolue se dit parfois "distance à zéro") . On a :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

et si y est un réel,

$$|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y).$$

Théorème 4 (Valeur absolue d'un produit, d'un quotient, d'une somme)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les propriétés suivantes :

$$|xy| = |x| \times |y| \qquad et \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ (avec } y \neq 0)$$

Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Il y a égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Remarque : Valeur absolue d'une différence :

$$|x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y| \quad \text{donc} \quad |x - y| \leqslant |x| + |y|.$$

4 Puissances et racines carrées

Définition 6 (Racine carrée)
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle **racine carrée de** *x et on note $\sqrt{x}$ l'unique nombre réel positif dont le carré vaut x.*

Proposition 2 (Règles de calcul sur les racines carrées)
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

- ***Racine carrée d'un produit :*** $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
- ***Racine carrée d'un quotient :*** *si $y \neq 0$,* $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

La racine carrée d'une somme (d'une différence), n'est pas la somme (la différence) des racines carrées dans le cas général.

Définition 7 (Puissances entières d'un nombre réel)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- *si $n = 0$, on pose $x^0 = 1$;*
- *si $n > 0$,* $x^n = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$;
- *si $n < 0$,* $x^n = \dfrac{1}{x^{|n|}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{|n|}$.

Remarque : Si $x = 0$, on convient que $0^0 = 1$. Les puissances de zéro d'exposant strictement positif sont nulles, et les puissances d'exposant strictement négatif ne sont pas définies.

Vocabulaire
Dans l'écriture x^n, x s'appelle la **base** *et n l'***exposant**.

Proposition 3 (Règles de calcul avec les puissances d'exposants entiers)
$\forall\,(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2, \forall\,(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ *:*

- $x^n\times x^m = x^{n+m}$
- $(x^n)^m = x^{n\times m}$
- $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
- $x^n\times y^n = (xy)^n$
- $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Remarque : Ne pas oublier que m et n peuvent être des entiers négatifs !

5 Résolution d'équations

Résoudre une équation $\mathscr{E}$ d'inconnue x dans un ensemble E (souvent $\mathbb{R}$, un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, ...) c'est déterminer l'ensemble, que l'on note habituellement $\mathscr{S}$, des valeurs de l'inconnue x de E qui font que l'égalité de l'équation est vraie.

On a l'équivalence :

$$x \text{ est solution de l'équation } \mathscr{E} \text{ dans } E \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\mathscr{S}$$

La plupart du temps, on tentera de résoudre les équations par équivalence.

Proposition 4 (Quelques règles de manipulation des égalités)
Soit a,b,c des réels.

1. *Un produit est nul si et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs est nul*
$$ab=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=0 \text{ ou } b=0$$
2. *Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.*
$$\frac{a}{b}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=0 \text{ et } b\neq 0$$
3. *Si $c\neq 0$, alors* $a=b \quad\Longleftrightarrow\quad ac=bc$.
4. $a=b \quad\Longrightarrow\quad a^2=b^2$.
   Si a et b sont de ***même signe****, alors* $a=b \quad\Longleftrightarrow\quad a^2=b^2$.
5. *Si f est une fonction, et que a et b sont dans le domaine de définition de f, alors*
$$a=b \Longrightarrow f(a)=f(b).$$
   Si de plus f ne prend jamais deux fois la même valeur, et en particulier si f est strictement monotone (ce qui est notamment le cas des fonctions logarithme, exponentielle, cube et racine carrée, mais pas de la fonction carré), alors
$$a=b \quad\Longleftrightarrow\quad f(a)=f(b)$$

6 Inégalités dans $\mathbb{R}$, résolution d'inéquations

Théorème 5 (Règles de manipulation des inégalités)
Soit a, b, c, d et λ des réels.

- ***Addition d'un réel :*** *Si* $a \leqslant b$ *alors* $a + c \leqslant b + c$
- ***Multiplication par un réel positif :*** *Si* $a \leqslant b$ *et si* $\lambda \geqslant 0$ *alors* $\lambda a \leqslant \lambda b$
- ***Multiplication par un réel négatif :*** *Si* $a \leqslant b$ *et si* $\lambda \leqslant 0$ *alors* $\lambda b \leqslant \lambda a$
- ***Passage à l'inverse :***
  - *Si* $0 < a \leqslant b$ *alors* $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. *De même si* $0 < a < b$ *alors* $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.
  - *Si* $a \leqslant b < 0$ *alors* $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. *De même si* $0 < a < b$ *alors* $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.
- ***Effet d'une fonction monotone et strictement monotone*** *Plus généralement,*
  - *Si f est une fonction croissante sur un intervalle contenant a et b et si* $a \leqslant b$ *alors*
    $$f(a) \leqslant f(b)$$
  - *Si f est une fonction décroissante sur un intervalle contenant a et b et si* $a \leqslant b$ *alors*
    $$f(b) \leqslant f(a)$$
  - *Si f est une fonction strictement croissante sur un intervalle contenant a et b et*
    $$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(a) < f(b)$$
  - *Si f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle contenant a et b et*
    $$\text{si } a < b \quad \text{alors} \quad f(b) < f(a)$$
- ***Addition membre à membre :***
  - *Si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$ *alors* $a + c \leqslant b + d$
  - *Si* $a < b$ *et* $c \leqslant d$ *alors* $a + c < b + d$
- ***Multiplication membre à membre de nombres positifs :***
  Si $0 \leqslant a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant c \leqslant d$ *alors* $0 \leqslant ac \leqslant bd$

On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre des inégalités.

Chapitre 2

Nombres réels, sommes et produits

Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'oeuvre de l'Homme.
LEOPOLD KRONECKER

Dans ce chapitre n désigne un entier naturel quelconque, sauf précision contraire.

1 Sommes et produits finis

1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Nous serons souvent amenés à considérer des sommes (ou des produits) dont le nombre de termes (de facteurs) est grand ou indéterminé.
La notation avec des pointillés (du style : $u_1 + u_2 + ... + u_n$) a ses limites. Nous allons utiliser une notation plus systématique. Pour toute liste de n réels $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = \sum_{k \in [\![1,n]\!]} x_k$$

$$x_1 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = \prod_{k \in [\![0,n]\!]} x_k$$

Par convention, si I est l'ensemble vide ($I = \{\,\} = \varnothing$) alors $\sum\limits_{i \in \varnothing} x_i = 0$ et $\prod\limits_{i \in \varnothing} x_i = 1$.
Remarque : L'entier k est dit ***muet*** en ce sens qu'il n'est nommé que par la somme (ou le produit), et n'est défini qu'en son sein.
La même notion en programmation est désignée par *"variable locale"*.
En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

De même :

$$\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{j=0}^{n} j^3 = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Exemple 1 (les nombres factoriels)
Un produit d'usage fréquent et une notation :

$$1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k = n! \qquad \textit{(se lit "factorielle n" ou "factorielle de n")}$$

En accord avec la convention qui veut qu'un produit sur un ensemble vide vaut 1 on convient :

$$0\,! = 1 \qquad \textit{(on verra dans la suite que cela nous arrange bien)}$$

Comment interpréter la réponse ci-dessous ?
"Combien d'années faut-il pour construire un EPR ?" "4 !"

1.2 Règles de calcul avec les symboles $\sum$ et $\prod$

Les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité des opérations sur $\mathbb{R}$ se traduisent à l'aide des notations $\sum$ et $\prod$.

La plupart d'entre elles sont très intuitives, et doivent être comprises bien plus qu'apprises par coeur.

Proposition 1 (Linéarité de la somme)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k + y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Proposition 2 (Relation de Chasles)
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p < n$, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{p} x_k \times \prod_{k=p+1}^{n} x_k$$

Exemple 2

Calculons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$. *

Remarque : La relation de Chasles peut se généraliser de la manière suivante : si $I_1, \ldots, I_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints, et si $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, alors

$$\sum_{k \in I} x_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in I_i} x_k$$

On parle alors de sommation par paquets.

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons d'une autre manière : $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$. *

Proposition 3 (propriété du produit)
Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels et λ un autre nombre réel. Alors pour tous entiers naturels n et p tels que $p < n$,

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$$

$$\prod_{k=0}^{n}(\lambda x_k \times y_k) = \lambda^{n+1} \times \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\prod_{k=0}^{n} y_k\right)$$

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda^{x_k} = \lambda^{\sum_{k=0}^{n} x_k}$$

⚠ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(x_k \times y_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x_k + y_k) \neq \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right) + \left(\prod_{k=0}^{n} y_k\right)$

1.3 Changements d'indice

Comme l'addition et la multiplication sont commutatives, l'ordre dans lequel on effectue l'addition (ou la multiplication) est sans importance. Le résultat est donc inchangé lorsqu'on réarrange les termes (ou les facteurs).

Proposition 4 (Changement d'indice)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. Alors :

- ***Symétrie de l'indice :*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{p=0}^{n} x_{n-p}$
- ***Décalage (ou translation) de l'indice :*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{p=0}^{n-1} x_{p+1}$

Proposition 5 (Télescopage)
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels, telles que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_k = a_{k+1} - a_k.$$

Alors, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

Remarque : Le télescopage peut également se présenter sous la forme : $x_k = a_k - a_{k+1}$ et dans ce cas la valeur de la somme sera : $a_0 - a_{n+1}$.

Exemple 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. *

1.4 Sommes de référence

Théorème 1 (Somme d'une progression arithmétique de nombres réels ou complexes)
Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique alors, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leqslant n$ on a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n - p + 1)$$

en particulier :

$$\sum_{k=p}^{n} k = \frac{p + n}{2} \times (n - p + 1)$$

Ces formules se retiennent sous la forme :

$$\frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2} \times (nombre\ de\ termes)$$

ou encore

$$(demi\text{-}somme\ des\ termes\ extrêmes) \times (nombre\ de\ termes)$$

Théorème 2 (Somme d'une progression géométrique de nombres réels ou complexes)

Si q est un nombre réel tel que $q \neq 1$ alors : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Plus généralement, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leqslant n$ on a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Ces deux formules se retiennent sous la forme : $(1er\ terme) \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$.

Remarque : Dans le cas où $q = 1$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times (n-p+1)$

Exemple 5

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ calculons : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}}$ *

Théorème 3 (Identité géométrique ou Troisième identité remarquable généralisée)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$$

Remarque : Lorsque $a \neq b$, on peut aussi écrire cette identité sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Dans le cas particulier où $b = 1$, on retrouve la formule qui permet de calculer la somme des premiers termes de la suite ***géométrique*** de raison a et de premier terme 1, d'où le nom d'Identité géométrique.

- Pour $n = 1$, on retrouve : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Pour $n = 2$, on obtient : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ d'où le nom de Troisième identité remarquable généralisée.
- En particulier, si n est impair :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}\right)$$

Proposition 6 (Somme des premiers entiers et des premiers carrés)
$\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* *

2 Formule du binôme

2.1 Coefficients binomiaux

Définition 1

Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ on définit un nombre noté $\binom{n}{k}$ et appelé **coefficient binomial** *par :*

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *si* $0 \leqslant k \leqslant n$
- $\binom{n}{k} = 0$ *sinon.*

Remarque : Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, après simplification des nombres factoriels, il vient :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{\text{produit de } k \text{ facteurs consécutifs à partir de } n}{\text{produit de } k \text{ facteurs consécutifs à partir de } k}$$

Proposition 7 (Propriétés des coefficients du binôme)
Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

- ***Propriété de symétrie :*** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- ***Relation de* Pascal** $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

*

Remarque : La relation de Pascal est une relation de récurrence qui permet de construire de proche en proche la table des coefficients binomiaux, appelée ***triangle de* Pascal**.

2.2 Interprétation(s) des coefficients binomiaux

Lorsqu'on vous a défini les coefficients binomiaux en première, vous n'avez jamais parlé de factorielles... $\binom{n}{k}$ désignait alors le nombre de manières d'obtenir k succès en n répétitions d'épreuves de Bernoulli.
Notons qu'ici, nous ne nous intéressons qu'au nombre d'issues, pas à leur probabilités, et donc que les épreuves de Bernoulli soient indépendantes ou non, équiprobables ou non n'a pas d'importance.

Si on parle en termes d'arbres, $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins de longueur n qui ont emprunté exactement k fois la branche succès dans un arbre binaire.
En effet, notons C_n^k le nombre de « chemins » à n tentatives menant à exactement k succès,

- Par convention, on décide que $C_0^0 = 1$
- $C_n^0 = 1$ car il n'y a qu'un seul moyen de n'avoir aucun succès, c'est d'avoir échoué à chaque tentative
- De même $C_n^n = 1$.
- Enfin, si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors pour avoir k succès en n tentatives, il y a deux façons de faire :
  - soit le dernier essai a été un échec, et donc il fallait avoir déjà eu k succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de C_{n-1}^k manières,
  - soit le dernier essai a été un succès, et donc il fallait avoir eu $k-1$ succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de C_{n-1}^{k-1} façons.

On a donc $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Exercice 1
Prouver par récurrence sur l'entier naturel n la proposition $H(n)$:

$$\textit{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Une autre interprétation importante des coefficients binomiaux, sur laquelle nous reviendrons dans un chapitre ultérieur est la suivante :
$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments.

En effet, pour choisir une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, il faut répéter n fois l'expérience à 2 issues suivantes :
choisir de prendre ou non le premier élément de E, choisir de prendre ou non le second élément de E, etc.
Alors les parties de E à k éléments sont celles pour lesquelles on a obtenu k succès, c'est à dire choisi k éléments, elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$

2.3 La formule du binôme de Newton

Théorème 4 (Formule du binôme de Newton)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On retiendra deux cas particuliers :

Corollaire 1
Pour tout entier naturel n,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Remarque : Dit autrement :
La somme des coefficients de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n ;
La somme alternée des coefficients de chaque ligne du triangle de Pascal est nulle (évident si n est pair par symétrie, moins évident si n est impair). *

Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

Langage, mythologie, institutions sociales sont des techniques de l'imaginaire. C'est seulement avec la mathématique qu'on voit apparaître la première technologie de l'imaginaire.

René Thom, médaillé Fields 1958

Introduction historique

Les nombres complexes sont apparus lors de la recherche des solutions des équations polynomiales de degré trois et quatre (travaux de Tartaglia, Cardan et Bombelli au XVI^{e} siècle).

Dans un premier temps, ils ont été considérés comme des étrangetés, des anomalies qui apparaissaient dans le calcul, puis disparaissaient par simplification pour donner les solutions « réelles ».
La notation i est introduite par Euler en 1777 pour remplacer la notation $\sqrt{-1}$ qui est une écriture impropre.
En effet : $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1 \neq -1.$

Introduction théorique

Soit un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Remarque : Le nombre i n'est pas un nombre réel car il ne peut satisfaire aux règles sur le signe d'un produit de réels.

Si l'on ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels le nombre i ainsi que tous ceux obtenus par somme et produit, alors on crée un ensemble que l'on notera $\mathbb{C}$ et qui sera appelé ***ensemble des nombres complexes***.

Cet ensemble possède des propriétés intéressantes en mathématique. En particulier tout polynôme de degré n y possède exactement n racines (comptées avec leur multiplicité), et il établit un lien étroit entre algèbre et géométrie plane.

Il fournit en outre un modèle et un outil utile à divers domaines des sciences expérimentales et des sciences de l'ingénieur (en particulier en électromagnétisme et électronique, en mécanique des fluides et en mécanique quantique).

1 L'ensemble des nombres complexes

On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$ muni d'une addition et d'une multiplication (que l'on notera comme celles de $\mathbb{R}$) tel que :

Théorème - Définition 1 (Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$)

- $\mathbb{C}$ *contient l'ensemble des nombres réels et un élément* i *tel que* $\mathrm{i}^2 = -1$.
- *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Il existe un couple de réels* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ***unique***, *tel que :*

$$z = x + \mathrm{i}y$$

  Cette écriture est appelée **forme algébrique de** z.
  - *Le nombre réel* x *est appelé la* **partie réelle** *de* z *et est noté* $\mathrm{Re}(z)$.
  - *Le nombre réel* y *est appelé la* **partie imaginaire** *de* z *et est noté* $\mathrm{Im}(z)$.
- *Tout nombre réel* x *s'écrit* $x + \mathrm{i} \times 0 = x + 0 \times \mathrm{i}$. *On retrouve ainsi* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- *On définit l'addition et la multiplication dans* $\mathbb{C}$, *satisfaisant aux mêmes règles de calcul que dans* $\mathbb{R}$. *En particulier, pour tous nombres réels* x, x', y, y' *:*

$$(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$$

$$(x + \mathrm{i}y) \times (x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$

  Ces deux opérations sont associatives et commutatives.
  La multiplication est distributive par rapport à l'addition.
  Elles admettent pour élément neutre, respectivement, 0 et 1.
- *Les éléments de* $\mathbb{C}$ *sont appelés les* ***nombres complexes***.

Remarque : Les propriétés de la somme et du produit étant identiques dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$, tous les résultats établis sur $\mathbb{R}$ à partir de ces propriétés sont valables sur $\mathbb{C}$, en particulier la formule du binôme de Newton, l'identité géométrique, la somme des premiers termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométriques

Il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations de $\mathbb{C}$. On n'écrira donc jamais le symbole $\leqslant$ entre deux nombres complexes qui ne sont pas réels.

Corollaire 1 (Caractérisation d'un nombre complexe par sa partie réelle et sa partie imaginaire)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. $z = z'$ *si et seulement si* $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$. *En particulier,*

$$z = 0 \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

Proposition - Définition 1 (Caractérisation d'un réel par sa partie imaginaire, définition d'un imaginaire pur)
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z *est* **réel** *si et seulement si* $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- z *est dit* **imaginaire pur** *lorsque* $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Notation

$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathbb{C}$ *formé des* ***nombres réels*** *;*

$\mathrm{i}\mathbb{R} = \{iy, y \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$

désigne le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ *formé des nombres* ***imaginaires purs****.*

On note également $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposition 1 (Inverse d'un nombre complexe non nul)
Tout nombre complexe z *non nul possède un* **inverse**, *noté* $\dfrac{1}{z}$ *ou* z^{-1}.
Si $z = x + \mathrm{i}y$ *est un nombre complexe non nul présenté sous forme algébrique :*

$$\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$

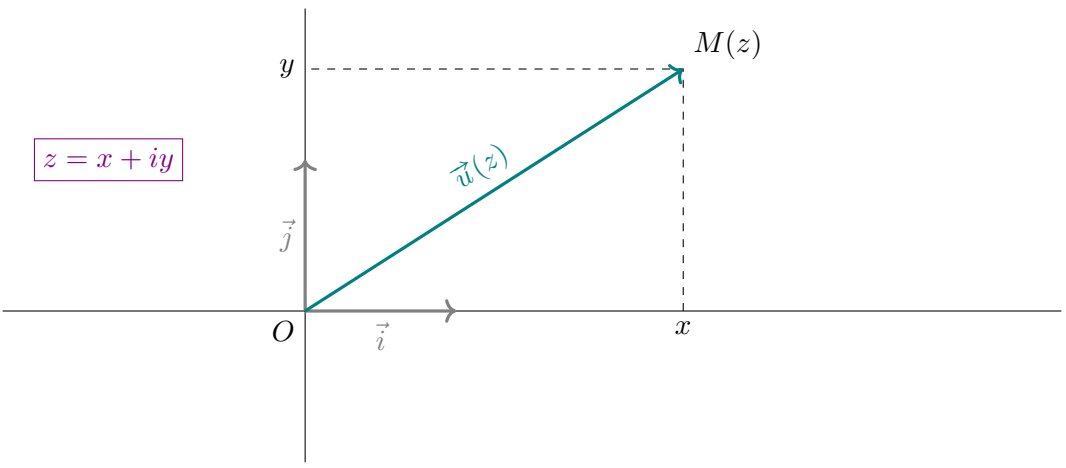
*

2 Le plan complexe

On munit le plan d'un repère **orthonormé direct** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- A tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z_M = x + iy$. Le nombre complexe z_M s'appelle l'***affixe*** du point M.
- Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M de coordonnées (x, y). M s'appelle l'***image ponctuelle*** du nombre complexe z.
- De la même manière, à tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$. Le nombre $z_{\vec{u}}$ s'appelle **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$.
- Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y). Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle **l'image vectorielle** du nombre complexe z.

* ***Illustration***



Les réels sont donc les complexes dont l'image est située **sur l'axe des abscisses**, et les imaginaires purs ceux dont l'image est situé **sur l'axe des ordonnées**.

Remarquons alors qu'il y a une correspondance entre les complexes et les points du plan : à chaque complexe correspond un unique point du plan et vice versa. Nous dirons bientôt que l'application qui à un point du plan associe son affixe réalise une ***bijection*** du plan sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2
Soit A et B deux points du plan.

- *Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe :* $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

*

3 Conjugaison et module

Définition 1 (Nombre complexe conjugué)
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe présenté sous forme algébrique.
On définit le **conjugué** $\overline{z}$ *de z par :*

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z).$$

L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe associe son conjugué est appelée **conjugaison**.

Proposition 2 (Propriétés de la conjugaison : compatibilité avec les opérations)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ un couple de nombres complexes. Alors :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- *Si de plus $z \neq 0$,* $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
- *Si de plus $z' \neq 0$,* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition 3 (Nouvelle caractérisation des réels et des imaginaires purs)
Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors :

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$

Par conséquent, on a les équivalences suivantes : $\begin{cases} z \in \mathbb{R} & \iff & \overline{z} = z \\ z \in \mathrm{i}\mathbb{R} & \iff & \overline{z} = -z \end{cases}$.

Proposition - Définition 2 (Module d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Le produit $z\overline{z}$ est un nombre ***réel positif****. On définit le* **module** *du nombre complexe z, et on note $|z|$ le nombre* **réel positif** *:*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Corollaire 2 (Expression du module en notation algébrique)
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe sous forme algébrique, alors : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque :

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0$
- Si $z \in \mathbb{R}$, le module correspond à **la valeur absolue ("distance à zéro")**.

Proposition 4 (Premières propriétés du module)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ un couple de nombre complexes. Alors :

- ***Module du conjugué :*** $|\overline{z}| = |z|$. *De plus, on a* $z = 0 \iff |z| = 0$
- ***Module d'un produit :*** $|zz'| = |z||z'|$.
- ***Module d'un quotient :*** *Si de plus* $z' \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

Proposition 5 (Inégalité triangulaire et cas d'égalité)

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Remarque : Il y a égalité si et seulement si les vecteurs d'affixes z et z' sont **colinéaires et de même sens**.

4 Nombres complexes de module 1

Nous allons étudier dans cette section l'ensemble, noté $\mathbb{U}$, des nombres complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Cette notation provient du fait que l'image de $\mathbb{U}$ dans le plan complexe est le cercle **u**nité (ou cercle trigonométrique). Réciproquement, tout point du cercle unité est l'image ponctuelle d'un nombre complexe de module 1.

On dit qu'on *identifie* le cercle trigonométrique et l'ensemble des nombres complexes de module 1.

En outre, $\mathbb{U}$ possède des propriétés de stabilité très intéressantes pour le produit des nombres complexes. En effet, la proposition 4 entraîne que :

- le produit de deux nombres complexes de module 1 est encore de module 1 ;
- l'inverse, l'opposé et le conjugué d'un nombre de $\mathbb{U}$ est encore un nombre de $\mathbb{U}$.

Exercice 1 (Inverse et conjugué d'un complexe de module 1)
Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que :

$$z^{-1} = \overline{z}.$$

*

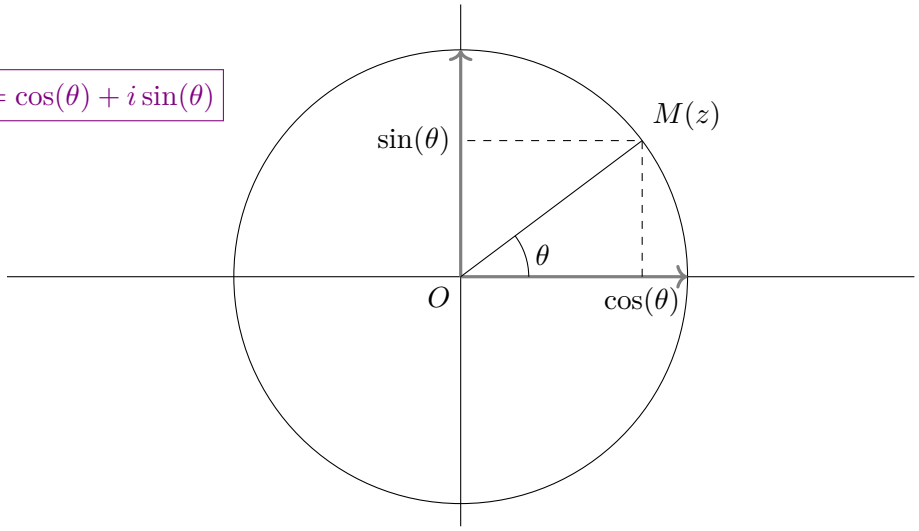
Théorème - Définition 3 (Exponentielle d'un imaginaire pur)
On sait qu'à tout point M du cercle trigonométrique on associe des angles en radian de la forme $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, l'affixe d'un tel point s'écrit : $z_M = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.
On démontre que la fonction exponentielle peut étendre son domaine de définition à l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs, et qu'alors, pour tout réel θ :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Exemple 1
$\mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$; $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $\mathrm{e}^{i\pi} = \mathrm{e}^{-i\pi} = -1$.

Illustration

$z = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$



Notation
Afin d'alléger les écritures et la réflexion on note $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ la relation : « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$ ». On dit alors que θ' est **congru** *à θ* **modulo** 2π.

Théorème 4 (Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire)
$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

1. *Exponentielle d'une somme :* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.
2. *Exponentielle d'une différence :* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$.
3. *Inverse d'une exponentielle :* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
4. *Puissance d'une exponentielle :* $\forall n \in \mathbb{Z}, \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$

Théorème 5 (Formules de Moivre)
La quatrième règle ci-dessus s'écrit aussi, avec les fonctions cosinus et sinus :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

⚠ On n'a cependant pas la formule $(\cos(\theta))^n = \cos(n\theta)$ ni $(\sin(\theta))^n = \sin(n\theta)$.

Exercice 2
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ uniquement. *

Théorème 6 (Formules d'Euler)
On peut exprimer le cosinus et le sinus d'un angle à l'aide de la fonction exponentielle (cela devient même la définition moderne des fonctions cosinus et sinus). Pour tout nombre réel θ :

- $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Exercice 3
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^4(\theta)$ et $\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)$. *

Proposition 6 (Factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié)
Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

*

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Nous avons vu que tous les affixes des points du cercle trigonométrique s'écrivent sous la forme $\mathrm{e}^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$. En multipliant ce nombre complexe par un réel positif on obtient les affixes de tous les points du plan complexe.

Proposition 7 (Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non nul.

- $\exists(\rho\,,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$
- *Il n'y a pas unicité de cette écriture.*
  En effet, pour tous couples $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(\rho', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nous avons l'équivalence :

$$\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases}.$$

Vocabulaire
On fait parfois la distinction entre **écriture exponentielle** *de z pour la forme $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et* **écriture trigonométrique** *pour la forme $\rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$.*

Remarque : Si $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ (et $\theta \in \mathbb{R}$) alors on a nécessairement $\rho = |z|$ qui est donc déterminé de manière unique (au contraire de θ).

Remarque : l'approche présentée ici est constructive, cela signifie que lorsque vous aurez besoin de déterminer l'expression exponentielle d'un nombre complexe z non nul, on pourra reprendre les étapes suivantes :

- déterminez le module $\rho = |z|$ de z
- factorisez z par son module : $z = \rho\,u$
- le nombre $u = \dfrac{z}{|z|}$ a pour module **1** : il s'écrit $u = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
  A vous de reconnaître θ...
- concluez

Exercice 4
Présenter sous forme exponentielle le nombre complexe : $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

Définition 2 (Arguments d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **un argument** *de z tout réel θ tel que*

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

On note $\arg(z)$ *un argument quelconque de z.*

Attention à ne pas parler de **l**'argument d'un nombre complexe : le défaut d'unicité oblige à parler d'**un** argument d'un nombre complexe. Souvent on retient **la mesure principale d'un angle**, à savoir celle qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exercice 5
Déterminer l'argument en mesure principale de $-5\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

Proposition 8 (Propriétés des arguments)

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le théorème 4 fournit directement :

1. *Argument d'un produit :* $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
2. *Argument d'un quotient :* $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$
3. *Argument du conjugué :* $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
4. *Argument d'une puissance :* $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ [2\pi]$

6 Applications à la trigonométrie

Définition 3 (Fonction tangente)
On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *la fonction tangente par :* $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Notation
Dans la suite, si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on notera $\cos^n(x)$ *pour* $(\cos(x))^n$.
On utilisera des notations similaires pour sin *et* tan.

Théorème 7 (Relations fondamentales de trigonométrie circulaire)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ *si* $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	**0**
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**-1**
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	**0**

Proposition 9 (Symétries du cercle trigonométrique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions sin *et* cos *vérifient les propriétés de symétrie suivantes :*

- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
- $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
- $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi-x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

Proposition 10 (Formules d'addition)

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de réels pour lesquels les expressions suivantes sont bien définies, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

*

Corollaire 3 (Formules de duplication)

Les formules d'addition fournissent :
$\forall a \in \mathbb{R}$ *:*

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \quad a \not\equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$

*

Proposition 11 (Formules de linéarisation)

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

*

Corollaire 4
En particulier, pour tout réel a,

- $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1+\cos(2a))$
- $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1-\cos(2a))$

Remarque : Formules que l'on retrouve également à l'aide des formules de duplication

Proposition 12 (Transformations de sommes en produits)
Pour tout couple de réels $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\sin(p)+\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

*

Remarque : Conformément au programme, vous devez savoir retrouver ces formules.

Proposition 13 (Transformation de $a\cos(t)+b\sin(t)$ en $A\cos(t-\varphi)$)
Soit $(a,b,t) \in \mathbb{R}^3$. Il existe un couple de réels (A,φ) tel que

$$a\cos(t)+b\sin(t) = A\cos(t-\varphi).$$

*

Remarques :

- Si (A,φ) est un couple possible, alors $(-A,\varphi+2\pi)$ en est un autre.
- Cette transformation est utilisée en physique et en science de l'ingénieur où A, choisi positif, est appelé l'amplitude et φ le décalage de phase, souvent choisi dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Exercice 6
Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire l'expression $f(x) = 2\cos(x)+\sqrt{12}\sin(x)$ sous la forme : $\rho\cos(x-\theta)$.
Même question avec l'expression $g(x) = \cos(x)+2\sin(x)$.

7 Équations algébriques

Définition 4 (Racines carrées d'un nombre complexe)
Soit $a \in \mathbb{C}$.
On dit qu'un nombre complexe z est une **racine carrée de** *a lorsque $z^2 = a$.*

Proposition 14 (Existence des racines carrées d'un nombre complexe)
Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées. *

Remarques :

- Si $a = 0$, le cas est connu : le nombre 0 admet 0 pour unique racine carrée.
- La notation $\sqrt{a}$ est impropre dès que a n'est pas un réel positif car elle désignerait deux nombres distincts.

Calcul des racines carrées en écriture algébrique
Avec la proposition précédente on sait que tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées.
Cependant, déterminer des racines carrées de cette façon suppose la connaissance de la forme trigonométrique de a, ce qui n'est pas toujours le cas.
Voyons donc une méthode qui permet de déterminer ces racines sans utiliser la forme trigonométrique.
Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe présenté sous forme algrébrique.
Cherchons ses racines carrées sous la forme $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a :

$$z^2 = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = \alpha + \mathrm{i}\beta \\ |z^2| = |\alpha + \mathrm{i}\beta| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ xy = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Par somme et différence membre à membre des deux premières équations on détermine aisément les carrés de x et de y.
La troisième équation nous donne le signe de xy, et permettra ainsi de déterminer les deux couples (x, y) solution du système, et par là les deux racines carrées de a.

La mise sous forme canonique vue au lycée s'appuie sur des propriétés communes à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Or la méthode de résolution des équations du second degré à l'aide du discriminant est obtenue en mettant en oeuvre cette transformation. Dès lors nous avons le résultat ci-dessous.

Théorème 8 (Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{3.1}$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (3.1).

- *Si $\Delta \neq 0$, on note δ l'une des racines carrées (complexes) de Δ.*

  Alors l'équation (3.1) a deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.
- *Si $\Delta = 0$, alors (3.1) admet une unique solution (dite double) $z_0 = z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.*

Corollaire 5
Soit z_1 et z_2 les racines du trinôme $az^2 + bz + c$. On a la factorisation :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Remarque : Dans le cas d'une racine double on obtient naturellement : $a(z - z_0)^2$.

Corollaire 6 (Relation coefficients-racines)
Soit b et c deux nombres complexes. Alors deux complexes z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $\begin{cases} z_1 + z_2 = -b \\ z_1 \times z_2 = c \end{cases}$

Proposition 15 (Cas particulier des équations à coefficients réels)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant (réel) de (3.1).

- *Si $\Delta > 0$ alors la racine carrée δ de Δ est réelle. Par conséquent, l'équation (3.1) possède deux solutions réelles distinctes.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation (3.1) possède une solution réelle double.*
- *Si $\Delta < 0$, les racines carrées complexes de Δ sont $\pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$. Les solutions de l'équation (3.1) sont les nombres complexes conjugués :*

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $a_n \in \mathbb{C}^*$. On considère l'équation

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{3.2}$$

Le ***théorème fondamental de l'algèbre***, que nous retrouverons (et démontrerons) plus tard, peut s'énoncer ainsi :

Théorème 9 (Théorème de d'Alembert-Gauss)
L'équation (3.2) admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Remarques :

- On démontre que cette proposition est équivalente à la proposition suivante, plus forte : *Un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet exactement n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité).*
- Il n'existe pas de méthode générale de résolution dès que le degré excède 4. Dans les exercices proposés, on se ramène à la résolution d'équations de degré inférieur, par factorisation, par changement d'inconnue ou par un autre procédé.

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (1+2i)z^2 + (9i-1)z - 2(1+5i) = 0$$

sachant qu'elle admet au moins une solution réelle.

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

8 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

8.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n = 1 \tag{3.3}$$

Le théorème fondamental de l'algèbre nous assure que cette équation admet exactement n racines.

Définition 5 (Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité)
On appelle **racine $n^{\text{ième}}$** *de l'unité, toute solution de l'équation (3.3).*

Notation
On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines $n^{ièmes}$ de l'unité.

Remarque : Les ensembles $\mathbb{U}_n$ sont inclus dans l'ensemble $\mathbb{U}$.

Théorème 10 (Ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n^{ièmes}$ de l'unité est :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega_n^k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{1, w_n, \dots, w_n^{n-1}\right\}$$

Autrement dit, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, n[\![, \ z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

*

Exemples
Examinons les cas pour $n \in [\![2, 6]\!]$.

Proposition 16 (Images des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans le plan complexe)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Les images dans le plan complexe des n racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone convexe régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, l'un d'eux étant l'image de 1.

Proposition 17 (Sommes des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Posons $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$$

i.e. *la somme des racines $n^{ièmes}$ de l'unité est nulle.* *

8.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque

Définition 6 (Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle **racine $n^{\text{ième}}$** *de a toute solution complexe de l'équation*

$$z^n = a \tag{3.4}$$

Remarque : Si $a = 0$, alors la seule solution de (3.4) est 0, et si $a = 1$, les solutions de (3.4) sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Théorème 11 (Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque non nul)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ présenté sous forme trigonométrique.
L'ensemble des racines $n^{ièmes}$ de a est :

$$\mathscr{S} = \left\{\rho^{1/n}\mathrm{e}^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ k \in [\![0, n[\![\right\} = \left\{\rho^{1/n}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,\omega, \ \omega \in \mathbb{U}_n\right\}.$$

*

9 Exponentielle complexe

Définition 7 (Exponentielle complexe)
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ en notation algébrique. On définit **l'exponentielle de** z*, que l'on note indifféremment* e^z *ou* $\exp(z)$*, par :*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right).$$

Proposition 18 (Exponentielle d'une somme)
Pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ de nombres complexes :

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$$

Proposition 19 (Égalité de deux exponentielles)
Pour tout couple $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ de nombres complexes :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Exercice 9 (Résolution de $\exp(z) = a$)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = a$. *

10 Interprétation géométrique des nombres complexes

Dans cette partie, on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On rappelle qu'alors à tout point du plan $\mathscr{P}$ correspond un unique nombre complexe et vice-versa.

Alors à toute transformation du plan $\mathscr{P}$ correspond une unique application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
En effet, si $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une transformation géométrique (une rotation, une symétrie axiale ou centrale, une translation, etc) du plan, on peut lui associer la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe l'affixe du point $f(M)$, où M a pour affixe z.

Inversement, à toute application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on peut associer la transformation qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $g(z)$.

10.1 Module et argument

Proposition 20 (Interprétation géométrique du module)
Soit A et B deux points d'affixes respectives a et b.

Le module $|b - a|$ est* ***la distance* *AB.*

Proposition 21 (Interprétation géométrique d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$)
Soit A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c.
Tout argument du nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. *

Corollaire 7 (Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité)
Soit A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et c.

- *les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$*
- *Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$*

*

10.2 Transformations géométriques

Définition 8 (Translation)
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ *l'application qui à tout point M du plan $\mathscr{P}$ associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*

Proposition 22 (Fonction complexe associée à une translation)
Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a. Alors la fonction associée à la translation de vecteur $\vec{u}$ est $\begin{array}{rccc} f_a & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z+a \end{array}$. *

Définition 9 (Homothétie)
Soit A un point du plan, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **homothétie de rapport λ et de centre** *A l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$.*

Proposition 23 (Fonction complexe associée à une homothétie)
Soit A un point du plan d'affixe a, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction associée à l'homothétie de rapport λ et de centre A est $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \lambda(z-a)+a \end{array}$. *

Définition 10 (Rotation)
Soit Ω un point du plan, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** *l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.*

Proposition 24 (Fonction complexe associée à une rotation)
Soit Ω un point d'affixe ω et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors la fonction associée à la rotation de centre Ω et d'angle θ est $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$. *

Chapitre 7

Rudiments de logique

Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

Bertrand Russell

Objectifs :

- Fournir les éléments de logique qui justifient les différentes stratégies de démonstration
- Faire un bilan sur l'usage des quantificateurs

1 Éléments de logique

1.1 Généralités

De la vérité en mathématique

Tout le discours mathématique consiste à dire :
« *si ces assertions sont vraies* (postulats, axiomes)*, alors ces autres le sont aussi* (propriétés). »

Les autres sciences peuvent faire usage des résultats et des méthodes mathématiques en observant ou en considérant que certaines propriétés (une *axiomatique*) sont vérifiées dans un domaine donné.

Rédiger un texte mathématique

Un texte mathématique, par exemple dans une copie, doit être rédigé clairement, avec précision, tout en étant le plus court possible. Tout doit être justifié ! Pour utiliser un théorème (ou autre résultat) du cours, on doit :

1. vérifier les hypothèses du théorème ;
2. citer le nom du théorème le cas échéant ;
3. énoncer les conclusions du théorème.

Dans ce chapitre, nous allons introduire les clefs nécessaires à la construction rigoureuse d'une démonstration. Nous allons notamment voir comment "démarrer" les raisonnements.

Définition 1 (Assertion ou proposition logique)
Une **assertion (ou proposition) logique** *P est une phrase dont on peut dire qu'elle est soit vraie soit fausse dans une axiomatique donnée.*

Remarque : La définition ci-dessus traduit précisément qu'une assertion a toujours une valeur logique : elle est soit vraie, soit fausse, mais surtout jamais les deux en même temps. C'est une règle fondamentale qui s'appelle ***le principe du tiers exclu***.

On appelle ***Proposition*** une assertion vraie quelles que soient les valeurs de ses variables. Certaines propositions sont appelées ***Lemme***, ***Théorème*** ou ***Corollaire*** pour les distinguer dans une théorie.

Un ***axiome*** est une assertion non démontrée qui est prise pour vraie. Une ***axiomatique*** est un ensemble d'axiomes cohérents qui permet de démontrer un ensemble de résultats considérés intéressants.

1.2 Opérations logiques élémentaires

Définition 2 (Table de vérité d'une assertion)
Soit P et Q des assertions. La table de vérité d'une assertion N, construite à partir de P et Q, est un tableau qui indique si N est vraie ou fausse, suivant les valeurs logiques de P et Q.

Table de vérité des connecteurs logiques élémentaires

La table de vérité qui suit **définit** les connecteurs logiques élémentaires :

- la ***négation*** de P, notée non P (parfois noté $\neg P$) ;
- la ***disjonction*** de P et Q, notée P ou Q (parfois noté $P \vee Q$) ;
- la ***conjonction*** de P et Q, notée P et Q (parfois noté $P \wedge Q$) ;
- l'***implication*** P entraîne Q, notée $P \implies Q$;
- l'***équivalence*** de P et Q, notée $P \iff Q$.

P	Q	non P	P ou Q	P et Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarques :

- La négation de P est vraie précisément lorsque P est fausse.
- La disjonction de P et Q est vraie lorsque l'une ***au moins*** de ces deux assertions est vraie.
- La conjonction de P et Q est vraie seulement lorsque P et Q sont toutes les deux vraies.
- L'implication est un connecteur logique d'une importance capitale en mathématique. C'est la raison pour laquelle il y beaucoup de façons de dire que « P implique Q ». On peut utiliser la forme du langage courant « si P alors Q » mais on dit aussi que « P est une condition suffisante pour avoir Q » ou que « Q est une condition nécessaire pour avoir P ».
- L'équivalence de deux assertions signifie qu'elles ont toujours la même valeur logique : elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Une implication $P \implies Q$ et une équivalence $P \iff Q$ sont des assertions. En particulier, elles peuvent être vraies ou fausses. De plus, même lorsqu'elles sont vraies, cela ne garantit pas que Q soit vraie.

Remarque : **Usage de $\Longrightarrow$**
Lorsqu'on rédige un raisonnement du type "A donc B", on affirme :
« A est vrai et A implique B est vrai, dès lors B est vrai. »
Lorsqu'on écrit l'implication $A \Longrightarrow B$, on ne dit pas que A est vrai ni que B est vrai. On affirme seulement que **l'implication** est vraie.

- $A \Longrightarrow B$ est une proposition mathématique, une "règle".

  Exemple 1
  Soit $x \in \mathbb{R}$
  $(x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4)$ *est vraie.*

- « A est vrai donc B est vrai » est un raisonnement.

  Exemple 2
  Soit $x \in]2, +\infty[$
  $x > 2$ *donc* $x^2 > 4$
  Derrière le "donc" se cache la règle implicite $(x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4)$

$$A \text{ est vrai, or } \underbrace{A \Longrightarrow B \text{ est vraie}}_{sous-entendu}\text{, donc } B \text{ est vrai}$$

Lorsqu'on rédige une solution, on mène un raisonnement qui est une succession de ces raisonnements élémentaires. Il n'est pas gênant, d'un point de vue mathématique, d'enchaîner les "donc" mais convenons qu'il est plus élégant de varier la rédaction en utilisant les mots :

- donc
- d'où
- ainsi
- par conséquent
- on en déduit
- dès lors
- il s'ensuit
- il en découle
- on en conclue

Définition 3 (Réciproque d'une implication)
Soit P et Q deux assertions.
La **réciproque de l'implication** $P \Longrightarrow Q$ *est l'implication* $Q \Longrightarrow P$.

Proposition 1 (Règles de calcul pour la conjonction et la disjonction)
Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- P *ou* $Q \iff Q$ *ou* P
- $(P$ *ou* $Q)$ *ou* $R \iff P$ *ou* $(Q$ *ou* $R)$
- P *ou* $(Q$ *et* $R) \iff (P$ *ou* $Q)$ *et* $(P$ *ou* $R)$
- P *et* $Q \iff Q$ *et* P
- $(P$ *et* $Q)$ *et* $R \iff P$ *et* $(Q$ *et* $R)$
- P *et* $(Q$ *ou* $R) \iff (P$ *et* $Q)$ *ou* $(P$ *et* $R)$

Proposition 2 (Règles de calcul pour la négation)
Soit P et Q deux assertions. Alors :

- $P \iff non\ (non\ P)$
- $non\ (P\ ou\ Q) \iff (non\ P\ et\ non\ Q)$
- $non\ (P\ et\ Q) \iff (non\ P\ ou\ non\ Q)$

Corollaire 1
Soit P et Q deux assertions.

- $(P \implies Q) \iff (non\ P\ ou\ Q)$
- $non\ (P \implies Q) \iff (P\ et\ non\ Q)$

1.3 Propriétés des éléments d'un ensemble

Nous étudierons de manière plus approfondie le vocabulaire ensembliste dans le prochain chapitre. Pour l'instant, nous avons juste besoin de savoir que :

- On appelle ***ensemble*** une collection d'objets.
- Ces objets s'appellent les ***éléments*** de l'ensemble.
- On admet qu'il existe un unique ensemble, appelé ***ensemble vide***, et qui ne contient aucun élément, que l'on note $\{\}$ ou $\emptyset$.
- Un ensemble de la forme $\{x\}$ qui ne contient qu'un élément x est appelé un ***singleton***.
- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on note $x \in E$. On dit aussi que x ***appartient à*** E. Lorsque x n'est pas élément de E, on note $x \notin E$.

Dans la suite, en l'absence de précision contraire, E désigne un ensemble.

Définition 4 (Quantificateur universel)
On note $\forall x \in E, P(x)$, et on lit "pour tout x appartenant à E, $P(x)$", la proposition qui est vraie lorsque quel que soit l'élément x de E, la proposition $P(x)$ est vraie. Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Définition 5 (Quantificateur existentiel)
On note $\exists x \in E, P(x)$, et on lit "il existe x appartenant à E tel que $P(x)$", la proposition qui est vraie lorsqu'il existe au moins un élément x_0 de E pour lequel la proposition $P(x_0)$ soit vraie. Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

Définition 6 (Quantificateur existentiel unique)
On note $\exists! x \in E, P(x)$, et on lit "il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$", la proposition qui est vraie si il existe un unique élément x_0 de E pour lequel la proposition $P(x_0)$ soit vraie.

$$\exists! x \in E, P(x) \iff (\exists x \in E, P(x)\ et \forall y \in E, P(y) \implies x = y)$$

Proposition 3 (Négation d'une propriété existentielle/universelle)
Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de l'élément x de E.

- $non\ (\exists x \in E,\ P(x)) \iff (\forall x \in E,\ non\ P(x))$
- $non\ (\forall x \in E,\ P(x)) \iff (\exists x \in E,\ non\ P(x))$

Proposition 4 (Interversion de quantificateurs consécutifs de même type)
Soit E et F deux ensembles et $P(x,y)$ une propriété dépendant de l'élément $(x,y) \in E \times F$.

- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$

2 Stratégies de démonstration

2.1 Stratégies pour démontrer une assertion

Soit P une assertion à démontrer et Q une assertion.

La preuve par déduction

$$\begin{cases}\text{Si } Q \text{ est vraie} \\ \text{Si } Q \implies P \text{ est vraie}\end{cases} \quad \text{alors } P \text{ est vraie.}$$

La démonstration par l'absurde

$$\begin{cases}\text{Si non}(P) \implies Q \text{ est vraie} \\ \text{Si non}(P) \implies \text{non}(Q) \text{ est vraie}\end{cases} \quad \text{alors } P \text{ est vraie.}$$

La preuve par disjonction de cas

$$\begin{cases}\text{Si } Q \implies P \text{ est vraie} \\ \text{Si non } (Q) \implies P \text{ est vraie}\end{cases} \quad \text{alors } P \text{ est vraie.}$$

2.2 Stratégies pour démontrer une implication

Lemme 1 (Formulations équivalentes d'une implication)
Soit P et Q deux assertions. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \begin{cases} \bullet\ P \implies Q \\ \bullet\ non(P)\ ou\ Q \\ \bullet\ non(Q) \implies non(P) \\ \bullet\ non(P\ et\ non(Q)) \end{cases}$$

La preuve directe

Soit P et Q deux assertions. On veut démontrer $P \implies Q$.
La ***preuve directe*** consiste à supposer que P est vraie et à démontrer que Q est vraie.

Définition 7 (La démonstration par contraposée)
Lorsqu'on décide de démontrer non$(Q) \implies$ non(P), on dit qu'on fait une **preuve par contraposée**.

Définition 8 (La preuve par l'absurde)
Lorsqu'on décide de démontrer que P et non(Q) est faux, on dit qu'on fait une **preuve par l'absurde**.

2.3 Stratégies pour démontrer une équivalence

Raisonner par équivalences

Pour prouver l'équivalence de deux assertions P et Q, la méthode souvent la plus simple est d'enchaîner les équivalences :

$$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff P_n \iff Q$$

et conclure par transitivité de l'équivalence que $P \iff Q$.

Remarque : Utilisé en règle générale pour résoudre des équations, des inéquations et des systèmes d'équation.

Procéder par double implication

L'enchaînement d'équivalences n'étant pas toujours possible ou pratique, on peut utiliser le résultat suivant :

$$((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)) \implies (P \iff Q)$$

Procéder par disjonction de cas

Vous pouvez aussi démontrer l'équivalence $P \iff Q$ par disjonction de cas :

- vous montrez $P \implies Q$, puis
- vous montrez (non$P$) $\implies$ (non$Q$).

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

2.4 Stratégies pour démontrer une propriété universelle

Considérons une propriété universelle, par exemple $\forall x \in E, P(x)$.

- Si elle fait partie de vos hypothèses, vous êtes en quelque sorte utilisateur de la propriété P : vous pouvez choisir de l'appliquer à n'importe quelle valeur de x, à votre guise.
  Très souvent un choix judicieux de la valeur de x apportera la clé de votre démonstration.
- Si cette propriété universelle est l'une des conclusions que vous devez démontrer. Vous n'êtes pas utilisateur de cette propriété. Au contraire, ce qu'on vous demande de faire c'est de montrer que $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x, afin qu'un futur utilisateur puisse choisir librement la valeur de x à laquelle il souhaite appliquer P.

En pratique : Pour prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$, on commencera par « Soit $x \in E$ », pour arriver à la conclusion que $P(x)$ est vraie.
Ceci signifie que l'on prend un x de E qui peut être n'importe quel élément de E (autrement dit, x est un élément quelconque de E).
Si on arrive alors à prouver $P(x)$, en n'utilisant que les propriétés communes à tous les éléments de E, alors on a bien prouvé $\forall x \in E, P(x)$.

Remarque : Dans le cas particulier des propriétés universelles des entiers naturels, et seulement dans ce cas, nous disposons d'une méthode puissante : le raisonnement par récurrence. La dernière partie du chapitre y est consacrée.

2.5 Stratégies pour démontrer une propriété existentielle

Il est souvent moins facile de prouver des propositions du type $\exists x \in E, P(x)$.

Cas général

- Pour démontrer $\exists x \in E, Q(x)$, on peut essayer de construire un élément x qui vérifie Q. Une fois qu'on a trouvé un tel élément x_0, la rédaction est simple : on peut se contenter de « Posons $x_0 = \dots$ », et on prouve que $P(x_0)$ est vraie.
- Certains théorèmes garantissent l'existence d'objets mathématiques, comme le ***théorème des valeurs intermédiaires***

Analyse-synthèse

La méthode générale qui suit se révèle particulièrement efficace pour démontrer un résultat d'existence et d'unicité :
L'idée pour démontrer l'existence et l'unicité d'un élément x de E vérifiant $Q(x)$ est de déterminer l'ensemble $A = \{x \in E \mid Q(x)\}$.
Méthode : la démonstration s'articule en deux étapes :

- **Analyse** : il s'agit de montrer qu'il n'y a qu'un seul candidat possible. On suppose qu'un tel x existe, et on montre que nécessairement x est un élément bien déterminé x_0 de E.
- **Synthèse** : il s'agit de vérifier que notre candidat x_0 vérifie Q. Pour ce faire, on évalue simplement l'assertion $Q(x_0)$. Deux cas sont possibles :
  - soit $Q(x_0)$ est faux auquel cas, le problème posé n'a pas de solution ;
  - soit $Q(x_0)$ est vrai auquel cas le problème admet x_0 pour unique solution.

3 Démonstration par récurrence

Proposition 5 (Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$)
L'ensemble $\mathbb{N}$, non vide, est totalement ordonnée par $\leqslant$ et vérifie :

($\mathbf{N}_1$) *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.*

($\mathbf{N}_2$) *Tout partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.*

($\mathbf{N}_3$) *$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.*

3.1 Principe de récurrence

Propriété héréditaire

Définition 9
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des nombres entiers. On dit que $\mathcal{P}$ est **héréditaire** *si elle vérifie :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$$

Remarque : $\mathcal{P}$ est héréditaire si dès qu'un entier n a la propriété, son successeur $n+1$ en hérite.

Théorème de récurrence simple

Théorème 1 (Théorème de récurrence simple)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n)) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}$$

3.2 Généralisations

Récurrence incomplète

Théorème 2 (Théorème de récurrence incomplète)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$(\forall n \geqslant n_0, \quad \mathcal{P}(n)) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0), (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}$$

Récurrence double

Théorème 3 (Théorème de récurrence double)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$(\forall n \geqslant n_0, \quad \mathcal{P}(n)) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0), (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)) \end{cases}$$

Exemple 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{9}{14}$, $u_1 = \frac{19}{14}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{3^n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{7}$.

Récurrence forte

Théorème 4 (Théorème de récurrence forte)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$(\forall n \geqslant n_0, \quad \mathcal{P}(n)) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0), (\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \ldots \text{ et } \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Exemple 4
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q+1)$. *

Chapitre 8

Vocabulaire ensembliste et applications

Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à peu près.

STENDHAL

Objectifs

- Introduire le vocabulaire lié à la théorie des ensembles.
- Étendre les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité et introduire les notions d'images directes et réciproques d'une partie pour des applications quelconques.

Dans ce chapitre, en l'absence de précision contraire, E, F et G désignent des ensembles.

1 Notions sur les ensembles

1.1 Appartenance et inclusion

Définition 1 (Inclusion et partie, égalité)

- *On dit que E* **est inclus dans** *F lorsque tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$. Dans ce cas, on dit que E est un* **sous-ensemble** *de F, ou bien que E est une* **partie** *de F.*
- *On dit que E* **et** *F* **sont égaux** *lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.*

Remarques :

- Pour tout ensemble E on a : $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$.
- Deux ensembles E et F sont **différents** si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $x \notin F$ ou $x \in F$ tel que $x \notin E$.
- Pour prouver que $E \subset F$, une rédaction correcte commencera par « Soit $x \in E$ », et s'emploiera à montrer que « $x \in F$ ».
- Pour prouver que $E = F$, on pourra
  - procéder par double inclusion en montrant que $E \subset F$ et $F \subset E$.
  - procéder par équivalence en montrant que $x \in E$ si et seulement si $x \in F$.

Exercice 1
Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - x + 1 = 0\} \subset \mathbb{R}_+$ *

Exercice 2
Soit a et b des réels tels que $a < b$. Montrer que $[a,b] = \{(1-t)a + bt, t \in [0,1]\}$. *

Exercice 3
Soit A et B deux points distincts du plan euclidien $\mathcal{P}$.
Montrer que l'ensemble des points à égale distance des points A et B est la droite perpendiculaire au segment $[AB]$, passant par son milieu I.

Attention à ne pas confondre ***inclusion*** et ***appartenance***, les deux symboles $\subset$ et $\in$ ne s'utilisent pas dans le même contexte. Si E est un ensemble, si F est une partie de E, alors un élément $x \in E$ peut appartenir, ou non, à F , mais pas être inclus dans F .

Proposition 1 (Transitivité de l'inclusion)
Si $F \subset G$ et $G \subset H$, alors $F \subset H$.

Définition 2 (Ensemble des parties d'un ensemble)
L'ensemble dont les éléments sont les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

1.2 Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$

Définition 3 (Réunion, intersection, complémentaire, différence)
Soit A et B deux parties de E. On définit :

- **l'intersection** *de A et B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- **la réunion** *de A et B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*
  On dit que deux parties A et B sont **disjointes** *lorsque $A \cap B = \emptyset$.*
  Dans ce cas, leur réunion $A \cup B$ est plutôt notée $A \sqcup B$.
- **le complémentaire** *de A dans E par $\overline{A} = A^c = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$;*
- **la différence de** *A et B par $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.*

Remarque : On rencontrera parfois la notation $\complement_E A$ pour désigner le complémentaire de A dans E.

Exercice 4
Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $\overline{A}$ lorsque A et B sont les intervalles réels définis par $A =]0,2]$ et $B = [1,3]$.

Définition 4 (Réunion et intersection d'une famille d'ensembles)
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par une partie I de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que pour chaque élément $i \in I$, on dispose d'un ensemble noté A_i). On définit :

- **la réunion** *de la famille : $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans au moins l'un des A_i.*
- **l'intersection** *de la famille : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans tous les A_i.*

Notation
Lorsque les ensembles de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux disjoints**, *c'est-à-dire que $\forall (i,j) \in I^2, (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)$ la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ se note plutôt $\bigsqcup_{i \in I} A_i$.*

Remarque :
La notion de **famille** sera définie rigoureusement dans la suite de ce cours.

Définition 5 (Recouvrement disjoint, partition)
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un même ensemble E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** *de E lorsque $\bigsqcup_{i\in I} A_i = E$.*
Autrement dit :

- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
- *les A_i sont deux à deux disjoints.*

Si de plus, pour tout $i \in$ I, A_i est non vide, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** *de E.*

Proposition 2 (Règles de calcul pour la réunion et l'intersection)
Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble E.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vocabulaire 1
On résume ces propriétés en disant que la réunion et l'intersection sont ***commutatives associatives et distributives l'une sur l'autre.***

Proposition 3 (Caractérisation du complémentaire)
Soit A et B des parties d'un ensemble E.

$$B = \overline{A} \text{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

Corollaire 1
Soit A et B deux parties d'un ensemble E, alors :

- $B = \overline{A}$ *si et seulement si* $A = \overline{B}$.
- $\overline{\overline{A}} = A$

Proposition 4 (Passage au complémentaire)
Soit A et B deux parties d'un ensemble E, alors :

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque : On retient que :

- le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires ;
- le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires.

Définition 6 (Couple d'objets)
Soit x et y deux objets. On appelle **couple** (x, y) *la suite formée de deux objets dont le premier est x et le second est y.*

Il ne faut pas confondre le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$.
Par exemple, lorsque x et y sont deux objets distincts, on a $(x, y) \neq (y, x)$ tandis que $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Remarque : Soit x, x', y et y' des objets.

$$(x, y) = (x', y') \text{ si et seulement si } x = x' \text{ et } y = y'.$$

Définition 7 (Produit cartésien de deux ensembles)
Le **produit cartésien** *de E et F est l'ensemble noté $E \times F$ dont les éléments sont les couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$$

Définition 8 (Produit cartésien de plusieurs ensembles)
Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Étant donnés E_1, E_2, ..., E_n n ensembles, on définit le **produit cartésien** *$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ par :*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

Une liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appelle un **n-uplet**.

Notation
Lorsqu'on a $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, le produit cartésien $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n.

2 Applications

2.1 Définition et exemple d'applications

Intuitivement, une application $f : E \to F$ est un ***procédé*** qui à tout élément de l'ensemble de départ E associe ***sans ambiguïté*** un unique élément de F.

Définition 9 (Graphe d'une application)
Le **graphe de l'application** *$f : E \to F$ est la partie Γ de $E \times F$ définie par*

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$$

Remarque : En pratique, on décrit rarement le graphe d'une application. On insiste au contraire sur le ***procédé*** qui à x associe son image. C'est pour cela qu'une application f de E vers F est notée :

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Vocabulaire 2
Soit $f : E \to F$ une application. Alors

- *E est appelé l'***ensemble de départ**, *F l'***ensemble d'arrivée**.
- *$\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ est appelé le* **graphe** *de f.*
- *Pour tout $x \in E$, l'élément $y = f(x)$ de F est appelé* **image** *de x par f.*
- *Pour tout $y \in F$, un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un* **antécédent** *de y par f.*

Notation
L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Définition 10 (Égalité de deux applications)
Deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : E \mapsto F$ sont dites **égales**, *et on note $f = g$, lorsque $\Gamma_f = \Gamma_g$.*

Proposition 5 (Égalité de deux applications)
Soit $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications.

$$f = g \text{ si et seulement si pour tout } x \in E,\ f(x) = g(x).$$

Proposition - Définition 1 (Composée d'applications)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On définit, pour tout $x \in E$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Le procédé de E vers G qui à tout élément $x \in E$ associe $(g \circ f)(x)$ est une application, appelée la **composée** *de f et g.*

Pour que la composée de deux applications ait un sens, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de la première soit contenu dans l'ensemble de départ de la deuxième !

Remarque : En particulier, la composition n'est pas commutative.

Proposition 6 (Associativité de la composition)
Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Notation
Les parenthèses étant inutiles, on note alors $h \circ g \circ f$ la composée des trois applications.

Définition 11 (Familles)
Soit I un ensemble. On appelle **famille d'éléments** *de E* **indexée** *par l'ensemble I toute application définie sur I à valeurs dans E :*

$$\begin{array}{rccc} e & : & I & \longrightarrow & E \\ & & i & \longmapsto & e_i \end{array}$$

Notation
Pour tout $i \in I$, on note e_i à la place de $e(i)$.
La famille est notée $(e_i)_{i\in I}$ au lieu de $\begin{array}{rccc} e & : & I & \longrightarrow & E \\ & & i & \longmapsto & e_i \end{array}$.
L'ensemble de départ I est appelé l'ensemble des **indices** *de la famille.*
On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E **indexée** *par I.*

Définition 12 (Suites)
Une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E indéxée par $\mathbb{N}$ est appelée **suite d'éléments de** *E.*

2.2 Fonction indicatrice d'une partie

Les fonctions indicatrices de parties établissent un lien entre la théorie des ensembles et celle des applications. Comme conséquence, elles permettent entre autres de remplacer le calcul ensembliste par du calcul dans $\{0, 1\}$.

Définition 13 (Fonction indicatrice d'une partie)
Soit $F \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E. La fonction **indicatrice** *de F est l'application de E vers $\{0, 1\}$, notée $\mathbb{1}_F : E \to \{0, 1\}$ qui à tout élément x de E associe*

$$\mathbb{1}_F(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in F \\ 0 \text{ si } x \notin F \end{cases} .$$

Remarque : En clair, l'indicatrice de F indique si ***oui*** $(\mathbb{1}_F(x) = 1)$ ou ***non*** $(\mathbb{1}_F(x) = 0)$ un élément x de E appartient à F.

Théorème 1 (Propriété fondamentale)
Étant données deux parties F et G de E,

$$F = G \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mathbb{1}_F = \mathbb{1}_G$$

Proposition 7 (Opérations élémentaires sur les fonctions indicatrices)
Soit F et G deux parties d'un ensemble E. Les fonctions indicatrices de $\overline{F}$, $F \cup G$, $F \cap G$ et $F \setminus G$ sont données par :

- $\mathbb{1}_{\overline{F}} = 1 - \mathbb{1}_F$
- $\mathbb{1}_{F\cap G} = \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G$
- $\mathbb{1}_{F\setminus G} = \mathbb{1}_F (1 - \mathbb{1}_G)$
- $\mathbb{1}_{F\cup G} = \mathbb{1}_F + \mathbb{1}_G - \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G$

2.3 Image directe et image réciproque d'une partie

Définition 14 (Image directe et image réciproque d'une partie)
Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$. On définit :

- **l'image directe** *de A par f comme le sous-ensemble de F :*

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

  $f(E)$ est appelée l'image de f. C'est l'ensemble des valeurs prises par f.

- **l'image réciproque** *de B par f comme le sous-ensemble de E :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque : En clair,

- $f(A)$ est l'ensemble des ***images*** des éléments de A par f. On dit souvent que f est ***à valeurs dans*** F. Cela signifie que l'image de f est incluse dans F.
- $f^{-1}(B)$ est l'ensemble formé des ***antécédents*** des éléments de B.
  Il est caractérisé par
  $$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$
  En particulier, si $b \in F$, $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E,\ f(x) = b\}$ est simplement l'ensemble des antécédents de b par f.

Il ne faut pas confondre image réciproque et application réciproque ! L'application réciproque n'est définie que pour les applications bijectives, tandis que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est définie pour n'importe quelle application. On distinguera par exemple $f^{-1}(\{x\})$ qui est toujours défini de $f^{-1}(x)$ qui n'est défini que pour une application bijective.

Définition 15 (Restriction)
Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.
On appelle **restriction** *de f à A l'application, notée $f_{|A}$, définie par* $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Définition 16 (Prolongement)
Soit $f : E \to F$ une application et $\tilde{E}$ un ensemble contenant E.
On appelle **prolongement** *de f à $\tilde{E}$ toute application $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ telle que $\tilde{f}_{|E} = f$,* **i.e.** *$\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$.*

Définition 17 (Application induite)
Soit $f : E \to F$ une application, $A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(F)$ tels que $f(A) \subset B$.
On définit une nouvelle application appelée **application induite** *par f de A vers B par*

$$\begin{array}{rccc} f_{A,B} & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 18 (Injectivité et surjectivité)
Une application $f : E \to F$ est dite :

- **injective** *lorsque pour tout couple (x, x') de $E \times E$, la relation $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$, c'est-à-dire*
$$\forall (x, x') \in E^2, \Big(f(x) = f(x') \implies x = x' \Big)$$
- **surjective** *lorsque pour tout élément y de F, il existe (au moins) un élément x de E tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire*
$$\forall y \in F, \exists x \in E, \ f(x) = y$$

Remarque : Ces deux notions s'interprètent en termes d'antécédents :

- f est surjective lorsque tout élément y de F a ***au moins*** un antécédent par f.
- f est injective lorsque tout élément y de F a ***au plus*** un antécédent par f.

Vocabulaire 3
Une application injective est aussi appelée une **injection**, *une application surjective une* **surjection**.

Proposition 8 (Composition d'applications injectives, d'applications surjectives)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*

Proposition 9 (Composée injective, composée surjective)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
- *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Définition 19 (Application bijective)
Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** *si elle est à la fois injective et surjective.*

Proposition 10 (Une caractérisation des applications bijectives)
Soit $f : E \to F$ une application. f est bijective si et seulement si pour tout élément y de F, il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.

$$\forall y \in F, \ \exists ! \ x \in E, \ y = f(x)$$

Proposition 11 (Point de vue équations)
Soit $f : E \to F$ une application.

f est bijective
si et seulement si
pour tout élément $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution x dans E.

Définition 20 (Application réciproque d'une bijection)
Soit $f : E \to F$ une bijection. Tout élément y de F admet un unique antécédent par f. On note $f^{-1}(y)$ cet antécédent.
Le procédé qui à tout $y \in F$ associe $f^{-1}(y)$ définit une application, notée $f^{-1} : F \to E$ et appelée **application réciproque** *de f.*

Proposition 12
Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors, pour tout couple $(x, y) \in E \times F$,

$$\begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$$

Théorème 2 (Caractérisation de l'application réciproque)
Soit $f : E \to F$ une application.

f est bijective **si et seulement si** *il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}.$$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

En pratique :

- Le point de vue des équations s'avère efficace pour démontrer qu'une application est bijective **et** déterminer son application réciproque.
- Lorsque une application réciproque f^{-1} est proposée, il est en général plus efficace d'utiliser ce théorème.

Corollaire 2 (bijectivité et réciproque d'une réciproque)
Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Proposition 13 (bijectivité et réciproque d'une composée)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors la composée $g \circ f$ est bijective, et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$\sim$