DS 6 de mathématique

Proposition de corrigé *(avec commentaires)*

Exercice 1 : Quelques questions fondamentales

1. Justifier que tout sous-espace vectoriel inclut le vecteur nul.

Argument 1 : Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel, il contient donc par définition un élément neutre pour l'opération interne, c'est à dire le vecteur nul *(Chapitre 14, Définition 1 et Proposition - Définition 1)*.

Argument 2 : Par définition, un sous-espace vectoriel est non vide, et la multiplication par un scalaire est à valeur dans ce sous-espace vectoriel *(Chapitre 14, Proposition - Définition 1)*.
Soit u un vecteur d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.
Alors $0.u = 0_E \in F$.

2. Dans un espace vectoriel de dimension finie n, donner la caractérisation des bases.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs.

$$\mathscr{F} \text{ est une base} \iff \mathscr{F} \text{ est libre} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice}$$

Autre version, sympathique :
Une base est une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs vérifiant deux des conditions ci-dessous :

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \qquad \mathscr{F} \text{ est génératrice} \qquad \mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$$

3. Donner la formule donnant la dérivée d'un polynôme.

Soit $P = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, ...)$. Alors $P' = (a_1, 2a_2, 3a_3, ..., na_n, 0, ...)$.

En utilisant les vecteurs de la base canonique :

Soit $P = a_0 + a_1X + ...a_nX^n$. Alors $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + ... + na_nX^{n-1}$.

Et avec le symbole somme :
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. Alors $P' = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.

4. Que peut-on dire du degré d'une somme, d'un produit, et d'une composée de deux polynômes, ainsi que du degré de la dérivée d'un polynôme ?

Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs m et n.

Alors

$\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ $\deg(PQ) = m+n$ $\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = mn$

En outre : $\deg(P') = \deg(P) - 1$, sauf si $\deg(P) = 0$, auquel cas $\deg(P') = -\infty$.

5. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$? de $\mathbb{R}[X]$?

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

6. Que peut-on dire de l'ensemble des racines d'un polynôme réel de degré impair ?

Il est non vide.

7. Présenter la forme générale d'une décomposition primaire dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont les racines sont $\alpha_1, ..., \alpha_p$ avec des ordres de multiplicité respectivement de $r_1, ..., r_p$. Alors :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$$

<u>Remarque</u> : On a : $\sum\limits_{k=1}^{p} r_k = n$.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les racines sont $\alpha_1, ..., \alpha_p$ avec des ordre de multiplicité respectivement de $r_1, ..., r_p$. Alors :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{s_j}$$

<u>Remarque</u> : On a : $\sum\limits_{k=1}^{p} r_k + 2\sum\limits_{j=1}^{q} s_j = n$.

8. Dire ce que sont le noyau et l'image d'une application linéaire.

Le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ dont les images sont le vecteur nul de l'ensemble d'arrivée.
<u>Remarque</u> : C'est l'ensemble des antécédents du vecteur nul de l'ensemble d'arrivée.

L'image d'une application linéaire est l'ensemble des images des vecteurs de l'ensemble de départ.

Exercice 2 : Famille de fonctions linéairement indépendantes

Montrer que les fonctions :

$$x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \cos(x) \qquad x \mapsto x\sin(x) \qquad x \mapsto x\cos(x)$$

sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha\sin(x) + \beta\cos(x) + \gamma x\sin(x) + \delta x\cos(x) = 0$.

Remarque : Les quatre coefficients doivent vérifier une infinité de conditions, une pour chaque valeur de $x \in \mathbb{R}$. Choisissons en qui conduisent simplement au résultat.

Avec $x = 0$ nous avons la condition : $\quad \beta = 0$.

Avec $x = \pi$ nous avons la condition : $\quad -\beta - \pi\delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = 0$.

Avec $x = \dfrac{\pi}{2}$ nous avons la condition : $\quad \alpha + \dfrac{\pi}{2}\gamma = 0$.

Avec $x = -\dfrac{\pi}{2}$ nous avons la condition : $\quad -\alpha + \dfrac{\pi}{2}\gamma = 0$.

En faisant la somme et la différence terme à terme des deux dernières équations on obtient : $\alpha = \gamma = 0$.

Par définition d'une famille libre, on en conclut que les fonctions considérées sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque : Dit autrement : aucune combinaison linéaire de trois d'entre elles ne peut donner la quatrième.

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels de matrices

On considère la matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont on donnera une base.

   Remarque : On pourrait utiliser sans difficulté l'une des deux caractérisations d'un sous-espace vectoriel pour montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (conséquence de la linéarité du produit matriciel). Mais pour en donner une base, le travail ci-dessous est nécessaire, qui suffit à prouver que c'est un sous-espace vectoriel.
   Nous ferons donc l'économie de cette petite preuve, que le lecteur réalisera avec profit à titre d'exercice.

   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'ensemble.

La condition nécessaire et suffisante d'appartenance est :

$$AM = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ -2a - 4c = 0 \\ -2b - 4d = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

Remarque :
Dit autrement, il faut et il suffit que la première ligne de la matrice M soit l'opposé du double de la seconde ligne.

L'ensemble considéré s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Il apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant la famille composée de ces deux vecteurs comme base.

2. Même question pour $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Remarque : La remarque introductive de la question précédente est valable ici aussi.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'ensemble. La condition nécessaire et suffisante d'appartenance est :

$$AM = MA \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2c = a - 2b \\ b + 2d = 2a - 4b \\ -2a - 4c = c - 2d \\ -2b - 4d = 2c - 4d \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c = -b \\ -2a + 5b + 2d = 0 \\ -2a - 5c + 2d = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{5}{2}c + d \\ b = -c \end{cases}$$

L'ensemble considéré s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2}\alpha + \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta I_2, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Il apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2.
Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant la famille composée de ces deux vecteurs comme base.

Exercice 4 : Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les ensembles :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = 0 \text{ et } y-z+t = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\right).$$

1. Écrire F comme l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs.
En déduire une base de F.

Remarque : Un système de deux équations à quatre inconnues laisse en général deux degrés de liberté, c'est à dire que l'ensemble des solutions s'exprime à l'aide de deux paramètres réels.

On a :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y-z \\ t=z-y \end{cases}$$

Donc $F = \{(-y-z, y, z, z-y), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{y\,(-1, 1, 0, -1) + z(-1, 0, 1, 1)), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Dit encore autrement : $F = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 1))$.

Les deux vecteurs ci-dessus étant non colinéaires, ils constituent donc une base de F.

Remarque : Cette seule écriture établit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Méthode 1 : avec la définition
Montrons que pour un élément quelconque $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ il existe un unique couple (v, w) de $F \times G$ tel que $u = v + w$.
Notons $v = a(-1, 1, 0, -1) + b(-1, 0, 1, 1)$ et $w = c(1, 0, 0, 1) + d(0, 1, 1, 0)$ et résolvons l'équation :

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-1&-1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

Attachons nous à montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix}-1&-1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ est inversible à l'aide des opérations sur les lignes.
Les matrices suivantes sont inversibles si et seulement si la matrice A l'est.

$$\begin{array}{r} (L_2) \\ (L_3) \\ (L_1)+(L_2)+(L_3) \\ \end{array} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\-1&1&1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ (L_4)+(L_1)-(L_2)-(L_3) \end{array} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

La dernière matrice est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficient diagonaux sont non nuls, elle est donc inversible *(Chap 13 §3.3 Prop 15)*.
(nous résisterons à la tentation de l'inverser, puisque nous avons déjà la réponse à la

question posée.)

Remarque : La résolution du système était aussi possible sans calculs lourds puisqu'on pouvait écrire $d = y - a$ et $c = z - d$ pour se ramener à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues a et b.

Remarque : On pourrait aussi en conclure que les quatre vecteurs générant F et G sont une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice A étant inversible, on peut affirmer que pour tout quadruplet (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ il existe un unique quadruplet de coefficient réels (a, b, c, d) vérifiant la condition initialement posée, donc un vecteur v de F et un unique vecteur w de G tels que le vecteur (x, y, z, t) soit somme de u et v. On en conclut que les sous-espaces vectoriels G et V sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G.$$

Méthode 2 : avec la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie (Théorème 10 du chapitre 16)

Les deux sous-espaces vectoriels F et G possèdent une base à deux éléments, donc : $\dim(F) = \dim(G) = 2$. Dès lors :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

On a :

$$G = \left\{(a, b, b, a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Un vecteur (a, b, b, a) appartient à F si et seulement si :

$$\begin{cases} a + b + b = 0 \\ b - b + a = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b = 0$$

On en conclut : $\qquad F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}.$

La caractérisation de la supplémentarité en dimension finie nous permet d'affirmer que F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : Application linéaire et polynômes

On s'intéresse à l'application : $\qquad \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \longmapsto & P - XP' \end{array}.$

1. A l'aide de la caractérisation, établir que l'application f est une application linéaire.

Soit $(P, Q, \lambda) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= P + \lambda Q - X(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q - XP' - X\lambda Q' \qquad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= P - XP' + \lambda(Q - XQ') \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

L'application f est donc bien une application linéaire.

2. Soit $n = \deg(P)$. Justifier que $\deg(f(P)) = n$, sauf dans un cas que l'on précisera.

D'après la règle sur le degré d'une dérivée et d'un produit de polynômes, on a :

$$\deg(XP') = \deg(P).$$

D'après la règle sur le degré d'une somme de polynômes, on a : $\deg(f(P)) \leqslant \deg(P)$.
Soit $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P.
Alors le coefficient du terme de degré n de $f(P)$ est $a_n - na_n = a_n(1-n)$.
Ce coefficient de $f(P)$ est donc nul si et seulement si $n = 1$.

On en conclut que $\deg(f(P)) = n$ sauf si P est un polynôme de degré 1, auquel cas $f(P)$ est un polynôme constant.

3. En posant $P = aX^2 + bX + c$, déterminer $\mathrm{Im}(f)$, et en donner une base.
On a :

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 + bX + c - (2aX^2 + bX) = -aX^2 + c$$

$\mathrm{Im}(f)$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des polynômes X^2 et 1, éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Dès lors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X^2, 1)$ et admet la paire $(X^2, 1)$ pour base.

Remarque : C'est l'ensemble des polynômes de degré 2 sans monôme de degré 1.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, et en donner une base.
Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff -aX^2 + c = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff (a, c) = (0, 0)$$

par identification des coefficients.
On en conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X)$, c'est à dire la droite vectorielle dirigée par X. *(ou encore l'ensemble des monômes de degré 1).*

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Après avoir établi que f^k est défini, déterminer $f^k(aX^2 + bX + c)$.

L'espace vectoriel d'arrivée de l'application linéaire f est le même que celui de départ. Dès lors f est un endomorphisme et ses puissances sont définies.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit P_k la propriété : $f^k(aX^2 + bX + c) = (-1)^k aX^2 + c$.

P_1 est vraie, d'après la question **3.**.
Si P_k est vraie, alors

$$f\left(f^k(aX^2 + bX + c)\right) = f((-1)^k aX^2 + c) = -(-1)^k aX^2 + c = (-1)^{k+1} aX^2 + c.$$

Donc P_{k+1} est également vraie.
On en conclut par récurrence que quel que soit l'entier naturel non nul k :

$$f^k(aX^2 + bX + c) = (-1)^k aX^2 + c.$$

6. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])}$.

D'après la question ci-dessus, on a : $f^3 = f$, donc $f^3 - f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])}$.
Le polynôme Q recherché est donc $X^3 - X = X(X^2 - 1)$.

Remarque : Il est sympathique de vérifier que $f \circ (f^2 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 : Calcul de limite

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités et/ou d'équivalents

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$

Remarque : On a une forme indéterminée de type « l'infini moins l'infini ».
On sait que la fonction $\sin$ est équivalente à la fonction id au voisinage de 0, mais cette équivalence est insuffisante à conclure, car on obtiendrait une fonction équivalente à la fonction nulle au voisinage de 0, ce qui est faux car elle n'est pas égale à la fonction nulle au voisinage de 0.
Il faut donc faire intervenir le deuxième terme non nul du développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0. Cela devrait suffire pour conclure.
Commençons par écrire la différence sous forme de fraction, cela devrait alléger les calculs.

Pour tout x non nul on a : $\displaystyle\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} = \frac{\sin^3(x) - x^3}{x^3 \sin^3(x)}$.

Or

$$\sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 - 3 \times x^2 \times \frac{x^3}{3!} + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

On en déduit :

$$\sin^3(x) - x^3 \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^5$$

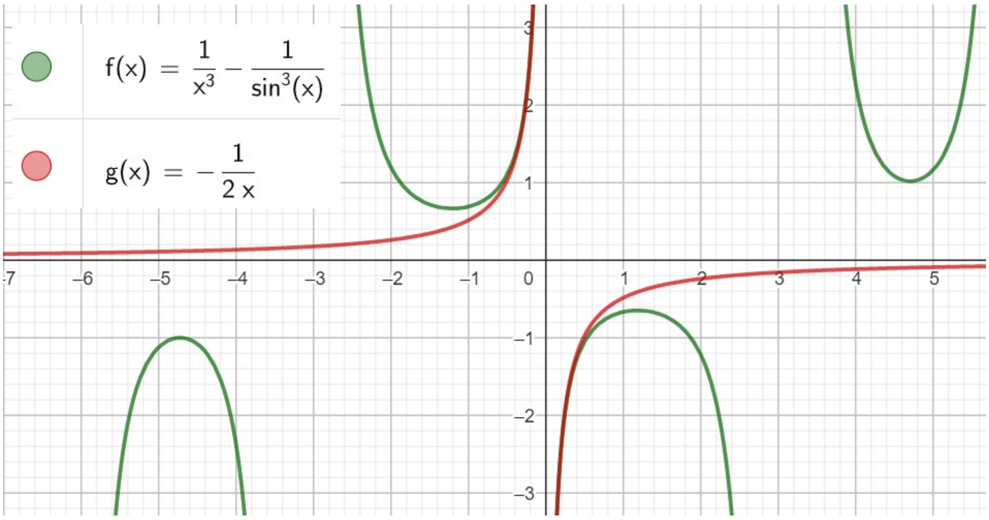
En outre : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$.

On en conclut :

$$\frac{\sin^3(x) - x^3}{x^3 \sin^3(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^5}{x^3 \times x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

Par limite de quotient on en déduit :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} = +\infty.$$



2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Remarque : On peut voir, comme précédemment, qu'un simple équivalent de la fonction ln *ne permettra pas de conclure.*
Faisons valoir le deuxième terme non nul de son développement limité.

On a : $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

D'où :

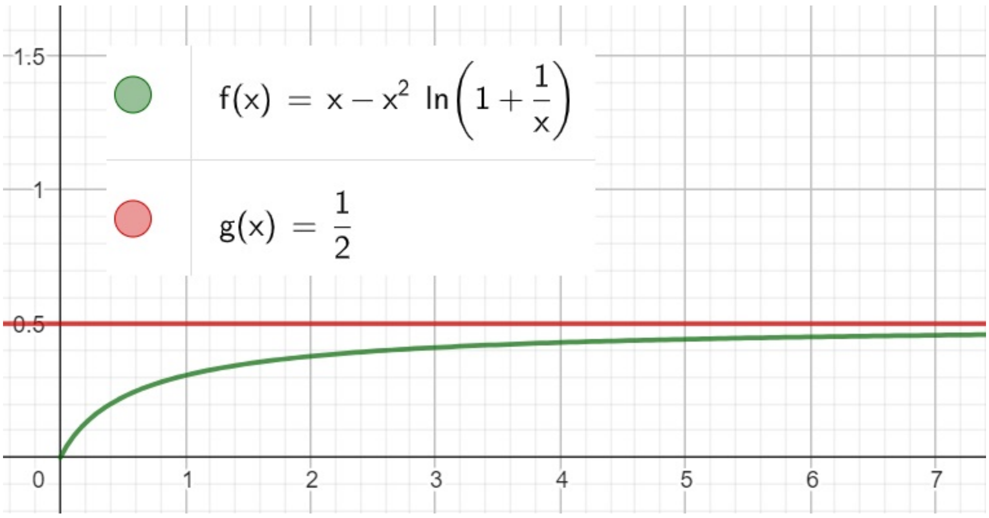
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Dès lors :

$$x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

On en conclut :

$$\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$



3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln(x)}$

Remarque : On s'assure qu'il s'agit d'une forme indéterminée (de type « zéro sur zéro »).

Encore une fois, un simple équivalent de la fonction ln *ne sera pas suffisant car cela conduirait à un dénominateur nul. Tentons un développement limité d'ordre 2.*

Posons $x = 1 + u$. Alors : $\dfrac{x\ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln(x)} = \dfrac{(1+u)\ln(1+u) - u}{\ln(1+u) - u}$.

Or $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ donc :

$$\frac{(1+u)\ln(1+u) - u}{\ln(1+u) - u} \underset{0}{=} \frac{(1+u)\left(u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)\right) - u}{-\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)} \underset{0}{=} \frac{\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)}{-\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)} \underset{0}{\sim} -1$$

On en conclut :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln(x)} = -1$$

4. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2} - 2\sin(x)}$

Remarque : Il s'agit d'une forme indéterminée (de type « zéro sur zéro »). Ramenons nous à des développement limités au voisinage de 0 à l'aide d'un changement de variable.

Posons $x = u + \dfrac{\pi}{4}$. Alors : $\dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{2} - 2\sin(x)} = \dfrac{\cos\left(2u + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2} - 2\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Or, d'après les formules trigonométriques :

$$\cos\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(2u) \underset{0}{=} -2u + o(u)$$

et

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(u) \underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+u) + o(u)$$

donc :

$$\frac{\cos\left(2u + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2} - 2\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)} \underset{0}{=} \frac{-2u + o(u)}{\sqrt{2}\,(-u + o(u))} \underset{0}{\sim} \sqrt{2}$$

On en conclut :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2} - 2\sin(x)} = \sqrt{2}$$

Exercice 7 : Développement limité

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2 + 2x + 2) \end{array}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

Remarque : La formule de Taylor-Young impliquerait de calculer la dérivée, la dérivée seconde et la dérivée troisième de f, ce qui semble un peu lourd comme calcul.

Remarque : L'argument de la fonction ln *tend vers 2. Ramenons nous à un argument qui tend vers 1.*

Pour tout réel x on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)$$

Or $\quad \ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$ et $\frac{1}{2}x^2 + x \underset{0}{\to} 0$.

Donc, par composition :

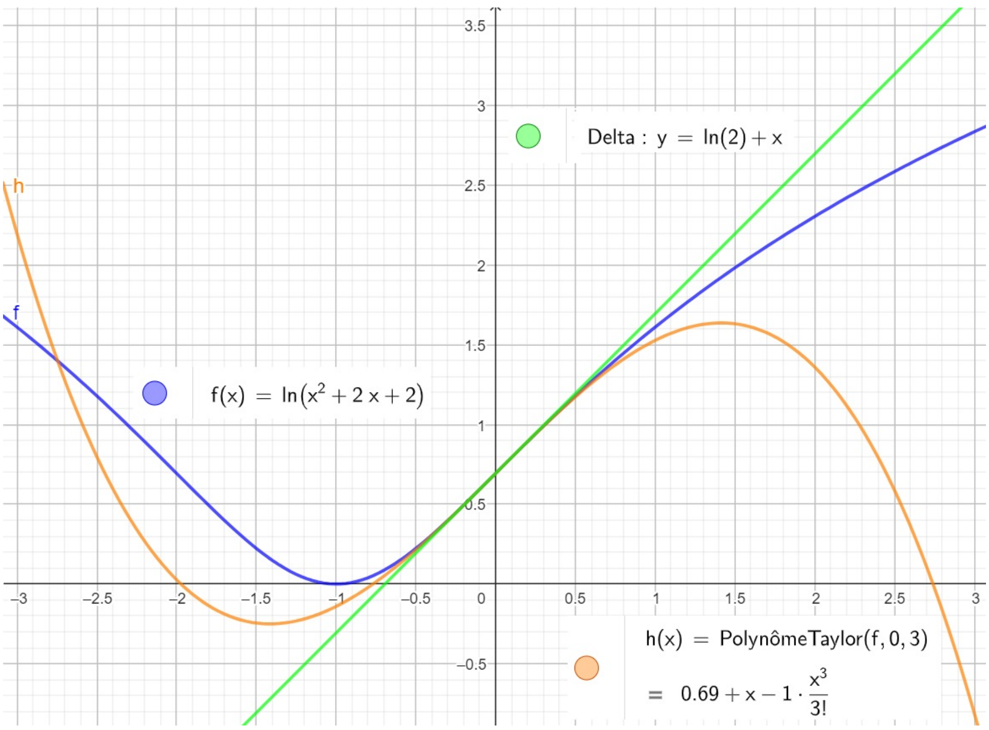
$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} \ln(2) + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} \ln(2) + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. En déduire l'équation de la tangente Δ au graphe Γ de la fonction f en 0 ainsi que les positions relatives de Δ et Γ au voisinage de 0.

L'équation de la tangente Δ au graphe Γ de la fonction f en 0 est :

$$y = \ln(2) + x.$$

Le terme non nul du développement limité suivant le terme de degré 1 est $-\frac{1}{6}x^3$ qui est négatif à droite de 0 et positif à gauche de 0. On en déduit qu'au voisinage de 0 la courbe Γ est « sous » sa tangente Δ à gauche, et « au-dessus » à droite.



Exercice 8 : Polynôme

Dans chacun des deux cas ci-dessous, déterminer l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la condition, et préciser si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

1. $P'(X^3) = (X+1)P$

Le polynôme nul est solution évidente.
L'égalité des polynômes impose l'égalité de leurs degrés donc :

$$\deg(P'(X^3)) = \deg((X+1)P)$$

soit

$$3(\deg(P)-1) = 1+\deg(P), \quad \text{ou encore :} \quad \deg(P) = 2.$$

Soit $P = aX^2+bX+c$ un tel polynôme.
On a :
$P' = 2aX+b$ donc $P'(X^3) = 2aX^3+b$ et $(X+1)P = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$.

L'identification des coefficients fournit le système :

$$\begin{cases} 2a = a \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \\ c = b \end{cases} \iff a=b=c=0.$$

On en déduit : $E = \left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\}$.

On sait que le singleton contenant le vecteur nul de tout espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

2. $(P^2)' = P$

Le polynôme nul est solution de ce problème.
Supposons qu'il existe un polynôme P non nul solution de ce problème.
On a alors $2\deg(P)-1 = \deg(P)$, donc $\deg(P) = 1$.
Soit $P = aX+b$ un tel polynôme.
Alors $(P^2)' = ((aX+b)^2)' = (a^2X^2+2abX+b^2)' = 2a^2X+2ab$
Par identification des coefficients dans l'égalité $(P^2)' = P$:

$$\begin{cases} 2a^2 = a \\ 2ab = b \end{cases} \iff \begin{cases} a(2a-1) = 0 \\ b(2a-1) = 0 \end{cases}$$

La première équation est vérifiée si et seulement si $a = 0$ ou $2a-1 = 0$.
Si $a = 0$ la deuxième équation impose $b = 0$, on revient au polynôme nul.
Si $a = \frac{1}{2}$, les deux équations sont vérifiées quel que soit b.
On en déduit que les solutions sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $\frac{1}{2}X+b$, $b \in \mathbb{C}$.
Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas le vecteur nul.

Autre argument possible :
Par exemple : $\quad 2\left(\frac{1}{2}X+b\right)=X+2b$
n'appartient pas à l'ensemble. Il n'est donc pas stable par multiplication par un scalaire.

Exercice 9 : Développement limité *

L'objectif de cet exercice est de démontrer des formules classiques à l'aide de développements limités.

Soit n un entier naturel non nul et f une fonction définie au voisinage de 0 par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}.$$

1. Premier développement limité

a. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de e^x-1 et de $\mathrm{e}^{(n+1)x}-1$.
A partir du développement limité de la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^x-1\underset{0}{=}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

On a : $\quad (n+1)x\underset{0}{\to}0$, donc par composition :

$$\mathrm{e}^{(n+1)x}-1\underset{0}{=}(n+1)x+\frac{1}{2}\left((n+1)x\right)^2+\frac{1}{6}\left((n+1)x\right)^3+o(x^3)$$

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+u}$.

$$\frac{1}{1+u}\underset{0}{=}1-u+u^2+o(u^2)$$

c. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f.
D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
f(x)&\underset{0}{=}\frac{(n+1)x+\frac{1}{2}\left((n+1)x\right)^2+\frac{1}{6}\left((n+1)x\right)^3+o(x^3)}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\\
&\underset{0}{=}\frac{n+1+\frac{1}{2}(n+1)^2x+\frac{1}{6}(n+1)^3x^2+o(x^2)}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}\\
&\underset{0}{=}\left(n+1+\frac{1}{2}(n+1)^2x+\frac{1}{6}(n+1)^3x^2+o(x^2)\right)\times\Bigg(1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)^2+o(x^2)\\
&\underset{0}{=}n+1+\left(-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)^2\right)x+\left(\frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{4}(n+1)^2+(n+1)\times\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\right)x^2\\
&\underset{0}{=}n+1+\frac{1}{2}n(n+1)x+\frac{1}{12}(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)x^2+o(x^2)\\
&\underset{0}{=}n+1+\frac{1}{2}n(n+1)x+\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

2. Second développement limité

a. Écrire $f(x)$ comme une somme de n termes simples.

D'après l'identité géométrique :

$$\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1 = (\mathrm{e}^x)^{n+1} - 1 = (\mathrm{e}^x - 1)\left(1 + \mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x)^2 + \ldots + (\mathrm{e}^x)^n\right)$$

On en déduit :

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \ldots + \mathrm{e}^{nx}$$

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f à partir de cette somme.

On sait que : $\mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{e}^{kx} \underset{0}{=} 1 + kx + \frac{1}{2}(kx)^2 + o(x^2)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2\right) + \ldots + \left(1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2\right) + o(x^2) \\ &= n + 1 + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) x + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

3. En déduire la formule donnant la somme des n premiers entiers non nuls, et celle donnant la somme des carrés des n premiers entiers non nuls.

L'unicité du développement limité nous permet, par identification des coefficients des termes de degré 1 et 2 des deux développements limités obtenus, d'obtenir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

∼